



ANÁLISES DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL NAS SUAS VERSÕES ISOPARAMÉTRICA E ISOGEOMÉTRICA

Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro

Edson Denner Leonel

sergio.cordeiro@usp.br

edleonel@sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas

Av. Trabalhador São Carlense 400 Centro, 13.566-590, São Paulo, São Carlos, Brasil

Resumo. A representação da propagação de fissuras é de extrema importância para a análise da segurança estrutural de componentes mecânicos. A análise numérica desse fenômeno é muitas vezes baseada nos conceitos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), os quais estão atualmente consolidados. No entanto, a aplicação desses conceitos em estruturas geometricamente complexas é ainda limitada. Recentemente, as Análises IsoGeométricas (AIG) tem se mostrado uma alternativa promissora para a modelagem mecânica de geometrias complexas. No presente trabalho apresenta-se um estudo comparativo envolvendo a formulação isoparamétrica do Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual) e sua versão isogeométrica para a avaliação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) em problemas tridimensionais. A formulação isogeométrica é baseada em superfícies NURBS de ordens polinomiais quaisquer. As integrais fortemente singulares e hipersingulares são avaliadas pelo método de Guiggiani e os FIT são determinados pela técnica de correlação de deslocamentos. Para aproximações com funções base NURBS de ordens polinomiais superiores a linear, a condição de continuidade de Hölder é satisfeita em qualquer ponto no interior da superfície. Isso resulta em uma redução no número de pontos de colocação sobre as faces da fissura em comparação à abordagem isoparamétrica com elementos descontínuos. Problemas envolvendo fissuras de borda e interna são analisados para estudar as respostas dos FIT. A formulação isogeométrica apresenta resultados precisos para os FIT utilizando menos graus de liberdade em relação à formulação convencional. No entanto, as análises foram mais custosas em termos de tempo de processamento.

Palavras-chave: Fatores de intensidade de tensão, Método dos elementos de contorno dual, Análises isogeométricas, Superfícies NURBS

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC,
Brazil, November 5-8, 2017.

1 INTRODUÇÃO

A partir dos conceitos da mecânica da fratura é possível avaliar com precisão a integridade mecânico material de componentes estruturais. Atualmente, os conceitos da MFEL utilizados nas análises de fratura já se encontram bem consolidados na literatura (Kanninen & Popelar, 1985). No entanto, sua aplicação a estruturas que possuem geometria e condições de contorno complexas apresenta ainda desafios, tais como: (i) garantir respostas de FIT suficientemente precisas para que os parâmetros que deles dependam sejam precisamente avaliados, (ii) garantir custo computacional adequado e (iii) criar modelos de análise mecânica tridimensionais com topologia complexa contendo superfícies de fissuras de maneira eficiente a partir de modelos geométricos de CAD. Diversas técnicas foram desenvolvidas nas últimas décadas com o objetivo de extrair os FIT com precisão e custo computacional adequado, i.e., satisfazer (i) e (ii). Métodos baseados nas expansões assintóticas dos campos elásticos como as técnicas de correlação de deslocamentos e de tensões (Chan et al., 1970; Banks-Sills & Sherman, 1986; Bank-Sills et al., 2005), utilizando ou não elementos *quarter-points* (Barsoum, 1974), foram os primeiros a serem utilizados em problemas de fratura. Apesar de simples, tais métodos apresentam respostas pouco precisas e necessitam de técnicas complementares para o aprimoramento dos resultados (Gupta et al., 2017). Métodos baseados em energia como a integral-J (Rice, 1968), o método da integral iterativa (Moran & Shih, 1987), o método da integral de contorno (Stern et al., 1976) e o método da função de corte (Szabo & Babuska, 1988) são métodos precisos e teoricamente convergem na mesma taxa que a energia de deformação (Gupta et al., 2017). No entanto, esses métodos são custosos computacionalmente e perdem a precisão no caso de superfícies de fissuras 3-D não planares (Gonzalez et al., 2013), além de dificultarem o tratamento da propagação de fissuras de borda. Os desafios (i) e (ii) são portanto extensamente abordados na literatura. Por outro lado, pouco foi discutido com relação à criação de modelos de fratura a partir de modelos geométricos de CAD. Formulações numéricas baseadas no enriquecimento dos campos de deslocamentos com funções descontínuas, como a do Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM), permitem inserir e propagar fissuras em malhas volumétricas não coincidentes com as fissuras (Moes et al., 1999). No entanto, uma malha volumétrica adequada para o problema não fissurado deve ser fornecida.

Uma maneira de solucionar o desafio (iii) passa pela utilização dos conceitos das Análises Isogeométricas (AIG) (Hughes et al. 2005; Cottrell et al., 2009), nas quais as mesmas funções base que descrevem a geometria dos modelos CAD podem ser utilizadas para aproximar os campos mecânicos. Conforme discutido em trabalhos que abordam as AIG (Cottrell et al., 2006; Bazilevs et al., 2010), nem sempre é simples gerar malhas volumétricas a partir de modelos geométricos do CAD. De fato, a criação de um modelo de análise a partir de um modelo geométrico CAD pode ser uma árdua tarefa a depender da complexibilidade topológica do componente mecânico/estrutural (Hughes et al. 2005). Como a grande maioria dos modelos CAD tratam a descrição geométrica de sólidos a partir de superfícies paramétricas NURBS, formulações baseadas em integrais de contorno são particularmente eficientes para o desenvolvimento de modelos isogeométricos, uma vez que nesses casos é necessário apenas a discretização das superfícies (Simpson et al., 2012; Lian et al., 2013; Scott et al., 2013). Dentre as formulações de elementos de contorno para análises de fratura destaca-se a formulação MEC dual apresentada por Hong e Chen (1988) e Portela et al. (1992) para problemas 2D e por Mi e Aliabadi (1992) para problemas 3D. Com o MEC dual é

possível modelar mecanicamente sólidos fissurados com uma única região, sendo necessário discretizar apenas o contorno do problema e as superfícies da fissura. Portanto é uma formulação adequada para o contexto das Análises Isogeométricas (Peng et al., 2017a-b). No presente trabalho apresenta-se um estudo comparativo da formulação convencional do MEC dual 3D com elementos isoparamétricos de Lagrange e de uma formulação isogeométrica do MEC dual com superfícies NURBS para a avaliação dos FIT via a técnica de correlação de deslocamentos. Dois exemplos foram analisados, i.e., um prisma com uma fissura de borda e uma fissura circular e um meio infinito. Ao final do estudo, apontam-se as principais potencialidades e dificuldades da formulação isogeométrica em relação à formulação convencional.

2 A MECANICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

A Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) é eficiente em análises de propagação de fissuras e pode ser aplicada quando a zona de processo posicionada à frente da fissura apresenta pequenas dimensões. As grandezas mecânicas definidas sobre a frente das fissuras, tais como a Taxa de Liberação de Energia, G , e os Fatores de Intensidade de Tensão (FIT), K , governam os problemas da MFEL. Os FIT são grandezas que podem ser quantificadas em regiões onde os campos de tensões apresentam singularidades e possibilitam a determinação da energia disponível para a propagação de fissuras. Os FIT podem ser quantificados por técnicas que tomam por base o comportamento assintótico dos campos mecânicos de tensões ou ainda de deslocamentos. Uma técnica simples, mas comumente utilizada para a extração dos FIT, é a técnica de correlação de deslocamentos (Chan et al., 1970), a qual foi adotada no presente trabalho.

2.1 Técnica de correlação de deslocamentos

Para introduzir a técnica de correlação de deslocamentos, deve-se considerar um sistema de coordenadas Cartesianas local (x'_1, x'_2, x'_3) e um sistema de coordenadas esféricas também local (r, θ, φ) , ambos definidos para um ponto sobre frente de fissura conforme a Figura 1.

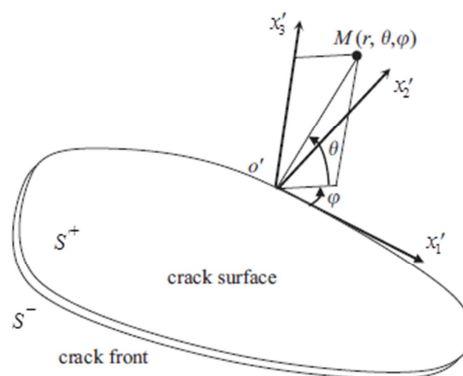


Figura 1. Coordenadas locais definidas sobre a frente das fissuras (Xiao & Yue, 2011)

A solução assintótica de William (William, 1956) para os campos elásticos de deslocamentos nas proximidades da frente da fissura é expressa em função desses sistemas de coordenadas locais.

Definindo as descontinuidades de deslocamentos $\|u_i(r)\| = u_i(r, \pi, -\pi/2) - u_i(r, -\pi, -\pi/2)$ para $i = x'_1, x'_2, x'_3$ é possível expressar os FIT recorrendo-se a solução de William, resultando (Gupta et al., 2017):

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{G}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \|u_1(r)\| + O(r) & K_{II} &= \frac{G}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \|u_2(r)\| + O(r) \\ K_{III} &= \frac{G}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \|u_3(r)\| + O(r) \end{aligned} \quad (1)$$

Em que $G = E/(1+\nu)$ é o módulo de elasticidade transversal e $k = 3-4\nu$ é a constante de Kolosov para a condição de Estado Plano de Deformação (EPD). E e ν são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Note que o erro teórico da Equação 1 é da ordem $O(r)$. Portanto, em teoria, quanto menor o valor de r maior é a precisão dos FIT. Por outro lado, os erros numéricos nas respostas das descontinuidades $\|u_i(r)\|$ também podem afetar a precisão da técnica. Esses erros numéricos tendem a serem maiores à medida que r diminui devido ao comportamento assintótico dos deslocamentos. Sendo assim, a determinação de distâncias r ótimas é um problema intrínseco da técnica quando associada a métodos numéricos e será discutido mais a diante para as formulações convencional e isogeométrica do MEC dual.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

O Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual) permite a análise de problemas de valor de contorno de sólidos contendo superfícies de fissuras com uma única região (Portela et al. 1992). O método é baseado no uso de duas equações integrais linearmente independentes (equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície) para os pontos de colocação coincidentes sobre as faces opostas de uma fissura conforme ilustrado na Figura 2. Dessa maneira é possível modelar fissuras de maneira geometricamente exata sem que o sistema de equações algébricas se torne linearmente dependente.

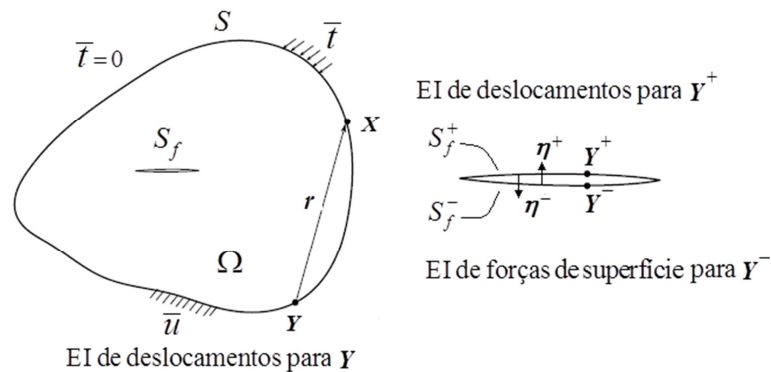


Figura 2. Colocação das equações integrais duais

O método é particularmente eficiente para análises de propagação de fissuras devido às facilidades de remalhamento providas da redução da dimensionalidade do problema. Além disso, como as equações governantes da elastoestática são satisfeitas no interior do domínio, os campos mecânicos de deslocamentos e tensões podem ser obtidos com elevada precisão nas proximidades da frente da fissura.

3.1 Equações integrais duais

A imposição da equação integral de deslocamentos em um ponto de colocação $\mathbf{Y}^+$ pertencente à superfície S_f^+ da fissura ilustrada na Figura 2b resulta em:

$$c_{ij}(\mathbf{Y}^+)u_j(\mathbf{Y}^+) + c_{ij}(\mathbf{Y}^-)u_j(\mathbf{Y}^-) + \oint_S T_{ij}(\mathbf{Y}^+, \mathbf{X})u_j(\mathbf{X})dS = \int_S U_{ij}(\mathbf{Y}^+, \mathbf{X})t_j(\mathbf{X})dS \quad (2)$$

Em que $U_{ij}(\mathbf{Y}^+, \mathbf{X})$ e $T_{ij}(\mathbf{Y}^+, \mathbf{X})$ são as soluções fundamentais de Kelvin para os deslocamentos e as forças de superfícies, $c_{ij}(\mathbf{Y}^+)u_j(\mathbf{Y}^+)$ e $c_{ij}(\mathbf{Y}^-)u_j(\mathbf{Y}^-)$ são termos livres da equação integral que resultam da colocação em pontos simétricos $\mathbf{Y}^+$ e $\mathbf{Y}^-$ e $u_j(\mathbf{X})$ e $t_j(\mathbf{X})$ são os campos de deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno. Já a equação integral de forças de superfície, deduzida em Hong e Chen (1988) a partir da diferenciação da equação integral de deslocamentos, imposta por colocação em um ponto fonte $\mathbf{Y}^-$ resulta em:

$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{Y}^-) - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{Y}^+) + \eta_i(\mathbf{Y}^-) \oint_S S_{kij}(\mathbf{Y}^-, \mathbf{X})u_k(\mathbf{X})dS = \eta_i(\mathbf{Y}^-) \oint_S D_{kij}(\mathbf{Y}^-, \mathbf{X})t_k(\mathbf{X})dS \quad (3)$$

Em que $S_{kij}(\mathbf{Y}^+, \mathbf{X})$ e $D_{kij}(\mathbf{Y}^+, \mathbf{X})$ são núcleos integrais derivados das soluções fundamentais de Kelvin, são $\eta_i(\mathbf{Y}^+)$ e $\eta_i(\mathbf{Y}^-)$ os versores normais nos pontos de colocação e $1/2t_j(\mathbf{Y}^+)$ e $-1/2t_j(\mathbf{Y}^+)$ são os termos livres da equação integral (3), a qual só existe para pontos de colocação $\mathbf{Y}^+$ e $\mathbf{Y}^-$ pertençam a contornos suaves. As integrais fortemente singulares $\oint$ e hipersingulares $\oint$ podem ser regularizadas a partir do Método de Guiggiani (Guiggiani et al., 1992), o qual pode ser aplicado tanto para elementos isoparamétricos quanto para elementos definidos sobre superfícies NURBS.

3.2 Aproximações com elementos polinomiais de Lagrange

As equações integrais (2) e (3) são exatas, ou seja, nenhuma aproximação foi imposta sobre o equacionamento analítico da elastoestática linear. No entanto, para solucionar os problemas numericamente via MEC dual é necessário discretizar o contorno em elementos de superfície. De acordo com a abordagem convencional, o contorno de um sólido tridimensional pode ser discretizado com elementos de superfície quadriláteros ou triangulares de Lagrange. Invocando o conceito de elementos isoparamétricos, as equações integrais contínuas podem ser reescritas como equações algébricas. Impondo por colocação as equações algébricas para

cada um dos nós dos elementos obtém-se o sistema de equações algébricas $\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt}$. Impondo as condições de contorno no sistema é possível solucionar o problema de valor de contorno via MEC dual. É importante mencionar que para a equação integral de forças de superfícies (hipersingular) existir é necessário que as funções base $N^\alpha(\xi_1, \xi_2)$ das aproximações dos campos mecânicos $u_j(X)$ e $t_j(X)$ possuam continuidade C^1 sobre o ponto de colocação. Isso implica na necessidade de discretizar as superfícies das fissuras com elementos descontínuos, para os quais os pontos de colocação são internos conforme ilustra a Figura 3.

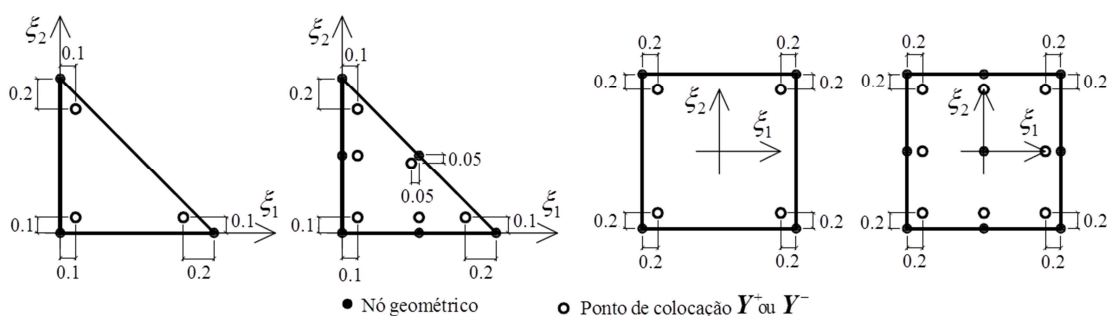


Figura 3. Elementos descontínuos triangulares e quadrilaterais de aproximação linear e quadrática

A utilização de elementos descontínuos soluciona o problema da existência da equação integral hipersingular, i.e., satisfaz a condição de continuidade de Hölder que garante a existência da parte finita de Hadamard, porém aumenta consideravelmente o número de pontos de colocação nas faces das fissuras. Para tratar as descontinuidades de deslocamento nos contornos externos interceptados por fissuras de borda foram adotados elementos descontínuos de aresta.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL ISOGEOMÉTRICO

A principal diferença entre as formulações convencionais utilizando elementos de contorno isoparamétricos e as formulações isogeométricas é o tipo de funções base utilizadas para descrever a geometria e aproximar os campos mecânicos. Nas abordagens convencionais, tanto a geometria quanto os campos mecânicos são aproximados por elementos com funções base polinomiais de Lagrange, $N^\alpha(\xi_1, \xi_2)$. Já no caso de formulações isogeométricas, as mesmas funções base utilizadas por programas CAD para descrever de maneira exata a geometria também são utilizadas para aproximar os campos mecânicos. Entre as tecnologias CAD disponíveis, as superfícies paramétricas NURBS destacam-se como as mais difundidas e, portanto foram utilizadas na formulação isogeométrica do MEC dual apresentada a seguir.

4.1 B-splines e superfícies NURBS

A partir de um vetor de coordenadas paramétricas crescentes, i.e., vetor de knots, é possível definir recursivamente as funções base univariadas $N_{i,p}(\xi)$ de uma curva B-spline, sendo p a ordem polinomial. As funções base de ordem $p = 0$ são definidas como:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

Para ordens polinomiais superiores a zero as funções base são definidas a partir da *formula recursiva de Cox-de Boor* (Cox, 1971; de Boor, 1972).

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

Para $p = 0$ ou $p = 1$ as funções base definidas por 4 e 5 resultam iguais aos polinômios de Lagrange utilizados nas formulações convencionais. No entanto, para $p \geq 2$ as funções base se diferem dos polinômios de Lagrange. As funções base das B-splines possuem diversas propriedades matemáticas atrativas para as análises numéricas. Entre essas se destacam a partição da unidade e o controle da continuidade. As funções base B-splines são contínuas até a $p - k$ derivada sobre um valor de knot com multiplicidade k . Com isso é possível garantir a continuidade C^1 interelementos para as superfícies NURBS que discretizam a face da fissura. Portanto é possível reduzir consideravelmente o número de pontos de colocação visto que elementos descontínuos não são mais necessários.

Dada uma rede de pontos de controle no espaço físico R^3 , B_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, ordens polinomiais p , q e vetores de knots $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ e $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ é possível definir uma superfície B-spline $S(\xi, \eta)$ a partir de um produto tensorial conforme a Equação 6.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{ij,pq}(\xi, \eta) B_{ij} \quad (6)$$

em que $N_{i,p}(\xi)$ e $M_{j,q}(\eta)$ são funções base univariadas de ordens p e q correspondentes aos vetores de knots Ξ e H , respectivamente. $N_{ij,pq}(\xi, \eta)$ são funções base bivariadas da superfície $S(\xi, \eta)$. No caso de superfícies B-spline, o domínio paramétrico, ou patch, é definido pelo produto $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$. Superfícies NURBS podem ser descritas a partir de uma combinação linear de funções base semelhantemente ao apresentado na Eq. 6 para as superfícies B-spline.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) B_{ij} \quad (7)$$

em que B_{ij} é a rede de controle da NURBS e $R_{ij}(\xi, \eta)$ são funções base bivariadas polinomiais por parte racionalizadas definidas a partir das funções base univariadas $N_{i,p}(\xi)$, $M_{j,q}(\eta)$ e dos pesos ω_{ij} .

$$R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}}} \quad (8)$$

4.2 Aproximação dos campos mecânicos

Invocando o conceito isogeométrico, as funções base $R_{ij}(\xi, \eta)$ são também utilizadas para aproximar os campos mecânicos de deslocamentos e forças de superfície. Definindo vetores $\mathbf{u}_{ij}$ e $\mathbf{t}_{ij}$ em $\mathbb{R}^3$ é possível introduzir a aproximação numérica para os campos de deslocamentos e de forças de superfície.

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{u}_{ij} \quad \mathbf{t}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{t}_{ij} \quad (9)$$

Devido ao caráter local das funções base $R_{ij}(\xi, \eta)$ é interessante definir como elementos os intervalos entre knots sucessivos, ou knots spans. Dessa maneira evita-se avaliar integrações numéricas de funções base que são nulas sobre os elementos. No caso de superfícies NURBS, o domínio dos elementos é definido pelo produto $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ que pode ser mapeado para o espaço Gaussiano $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ para efetuar a integração numérica. Para um elemento as aproximações dos campos mecânicos podem ser escritas localmente sobre os domínios de integração $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ como:

$$\mathbf{u}^e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sum_{b=1}^{nl} R_b(\xi(\hat{\xi}), \eta(\hat{\eta})) \mathbf{u}^b \quad \mathbf{t}^e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sum_{b=1}^{nl} R_b(\xi(\hat{\xi}), \eta(\hat{\eta})) \mathbf{t}^b \quad (10)$$

Em que e é um elemento $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ sobre o qual a aproximação é descrita, $b=1, \dots, nl$, com $nl = (p+1)(q+1)$, é a numeração local das funções base $R_{ij}(\xi, \eta)$ e os vetores $\mathbf{u}^b$ e $\mathbf{t}^b$ correspondem aos coeficientes $\mathbf{u}_{ij}$ e $\mathbf{t}_{ij}$ que multiplicam as funções base não nulas no domínio $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$. O mapeamento do espaço Gaussiano para o espaço paramétrico pode ser definido para um elemento $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ como:

$$\xi = \xi_i + (\hat{\xi} + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} \quad \eta = \eta_j + (\hat{\eta} + 1) \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)}{2} \quad (11)$$

4.3 Estratégias de colocação

Para superfícies NURBS que discretizam regiões do contorno onde os campos de deslocamentos e de forças de superfícies são contínuos, os pontos de colocação podem ser definidos sobre as abscissas de Greville. As abscissas de Greville (Greville, 1964) são definidas no espaço paramétrico $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ da superfície NURBS como:

$$\xi_i^0 = \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \eta_j^0 = \frac{\eta_{j+1} + \eta_{j+2} + \dots + \eta_{j+q}}{q}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

Em que n e m correspondem ao número de funções base univariadas dos knots $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ e $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ que definem a superfície. Deve-se mencionar que o número de pontos de colocação definidos na Eq. 12, $N = n.m$, é igual ao número de funções base bivariadas $R_{ij}(\xi, \eta)$. Tal correspondência é imprescindível para que o número de equações algébricas geradas por colocação das equações integrais seja igual ao número de incógnitas dos problemas.

No caso das superfícies NURBS que descrevem as fissuras, nas quais a equação integral hipersingular deve ser imposta, todos os pontos de colocação devem pertencer ao interior do espaço paramétrico $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ para que a continuidade C^1 seja garantida. No entanto, alguns dos pontos de colocação definidos sobre as abscissas de Greville localizam-se nos limites, ou arestas, do espaço paramétrico. Para contornar esse problema define-se o conceito de *superfícies NURBS descontínuas*, de maneira análoga ao que foi proposto por Mi e Aliabadi (1992) para os elementos isoparamétrico. No caso das superfícies NURBS descontínuas, as funções base são calculadas de maneira padrão a partir dos vetores de knots originais Ξ , H . Já os pontos de colocação são posicionados sobre as abscissas de Greville de vetores de knots auxiliares Ξ^* , H^* , definidos a partir de Ξ e H de tal forma que $\Xi^* \times H^* \supset \Xi \times H$. As componentes dos vetores de knots auxiliares podem ser obtidas como:

$$\xi_i^* = \begin{cases} \xi_i + 0.1\alpha_1 & 1 \leq i \leq p+1 \\ \xi_i & p+2 \leq i \leq n \\ \xi_i - 0.1\alpha_2 & n+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases} \quad \eta_j^* = \begin{cases} \eta_j + 0.1\alpha_3 & 1 \leq j \leq q+1 \\ \eta_j & q+2 \leq j \leq m \\ \eta_j - 0.1\alpha_4 & m+1 \leq j \leq m+q+1 \end{cases} \quad (13)$$

em que α_1, α_3 e α_2, α_4 são os knots spans iniciais e finais do vetores Ξ e H :

$$\alpha_1 = 0.1(\xi_{p+2} - \xi_1) \quad \alpha_2 = 0.1(\xi_{n+p+1} - \xi_n) \quad \alpha_3 = 0.1(\eta_{q+2} - \eta_1) \quad \alpha_4 = 0.1(\eta_{m+q+1} - \eta_m) \quad (14)$$

A Figura 4 ilustra a correspondência entre os vetores de knots originais e os vetores de knots auxiliares para um dado patch descontínuo $\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\} \times \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$ de ordens $p=2$ e $q=2$. Adotando ordens $p \geq 2$ e $q \geq 2$ é possível garantir a continuidade C^1 das funções base em todos os pontos de colocação das superfícies NURBS descontínuas. Para

tratar as descontinuidades de deslocamento nos contornos externos interceptados por fissuras de borda foram adotados elementos descontínuos de aresta.

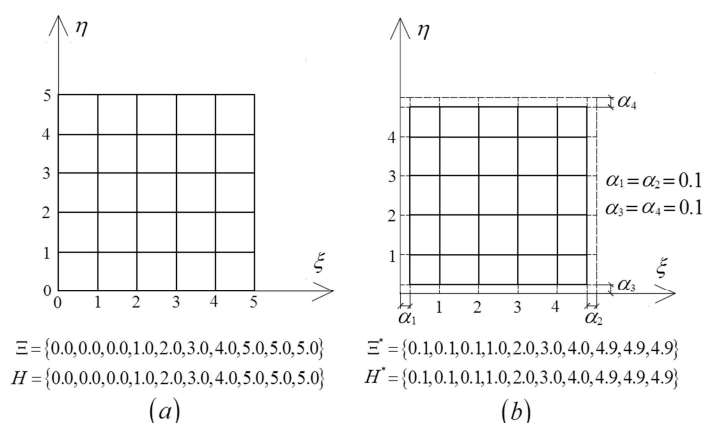


Figura 4. Superfície NURBS descontínua: (a) Patch original (b) Patch auxiliar

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Dois exemplos numéricos foram utilizados para validar os códigos computacionais desenvolvidos. Os problemas foram analisados numericamente utilizando as abordagens isoparamétrica e isogeométrica. Ambos os exemplos são considerados *benchmarks* da mecânica da fratura elástica linear para os quais as soluções analíticas dos FIT são conhecidas. Portanto, a partir dos mesmos foi possível estudar o comportamento dos FIT, extraídos a partir da técnica de correlação de deslocamentos, em função da distância r .

5.1 Fissura de borda

O primeiro exemplo envolve um prisma com uma fissura de borda conforme ilustra a Figura 5. A tensão de tração foi adotada como unitária, i.e., $\sigma = 1$ (unidades de tensão). As dimensões do problema são caracterizadas pelo comprimento da fissura de $a = 2,5$ (unidades de comprimento) e pelas relações dimensionais apresentadas na Figura 5. As constantes elásticas adotadas foram $E = 1000$ (unidades de tensão) e $\nu = 0,3$. Para a abordagem com elementos isoparamétricos o problema foi discretizado em três distintas malhas de elementos com aproximação linear. Em ordem crescente de refinamento, as malhas: Linear M1, Linear M2 e Linear M3 resultam 695, 1591 e 3895 pontos de colocação, respectivamente. A Figura 6 apresenta as malhas dos modelos isoparamétricos.

Já na abordagem isogeométrica o problema foi discretizado em 13 superfícies NURBS não aparadas bi quadráticas, i.e., $p = q = 2$. Novamente três modelos foram criados e foram denominados Refinamento 0, Refinamento 1 e Refinamento 2, resultando 449, 1091 e 1707 pontos de colocação. A Figura 7 apresenta os modelos isogeométricos destacando os pontos de colocação.

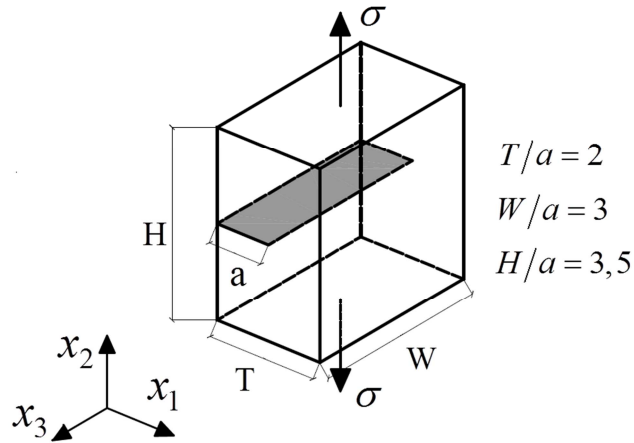


Figura 5. Prisma com fissura de borda

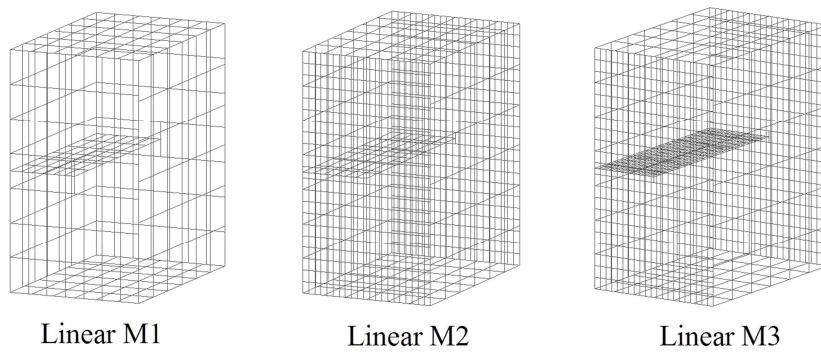


Figura 6. Malhas adotadas para os modelos isoparamétricos

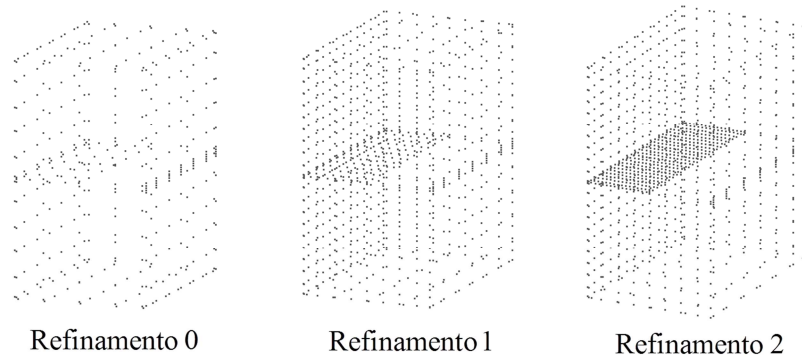


Figura 7. Refinamentos adotados para os modelos isogeométricos

Já a Figura 8 apresenta os deslocamentos e a deformada do problema em escala 1:10 para o modelo isoparamétrico “Linear M2” e para o modelo isogeométricos “Refinamento 1”. Note a semelhança entre os campos obtidos com ambas as abordagens. Como o problema é em modo I, somente a resposta normalizada $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ foi estudada. Os valores numéricos de K_I foram calculados a partir da técnica de correlação de deslocamentos. Portanto, primeiramente foi estudado o comportamento do valor numérico de K_I em função da distância de extração r . A resposta analítica, assumindo um caso de EPD, é comparada aos

resultados fornecidos pelos modelos numéricos. A Figura 9 apresenta o comportamento de K_I em função de r para os três modelos isoparamétricos e para os três modelos isogeométricos. Note que para os modelos isoparamétricos, as melhores respostas de FIT são obtidas para os pontos de colocação mais próximos da frente da fissura, i.e., menores valores de r .

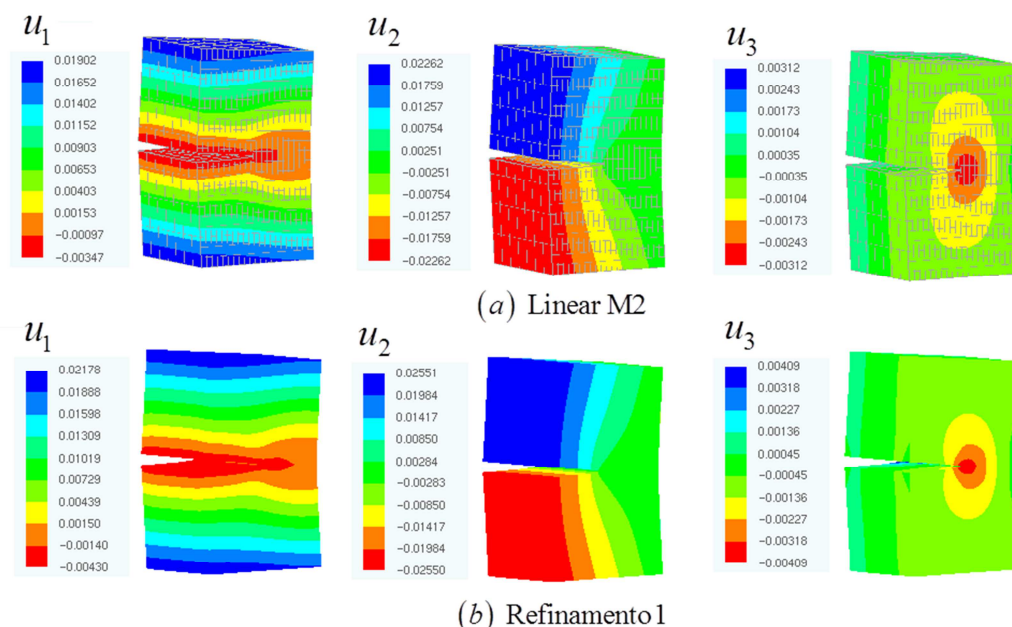
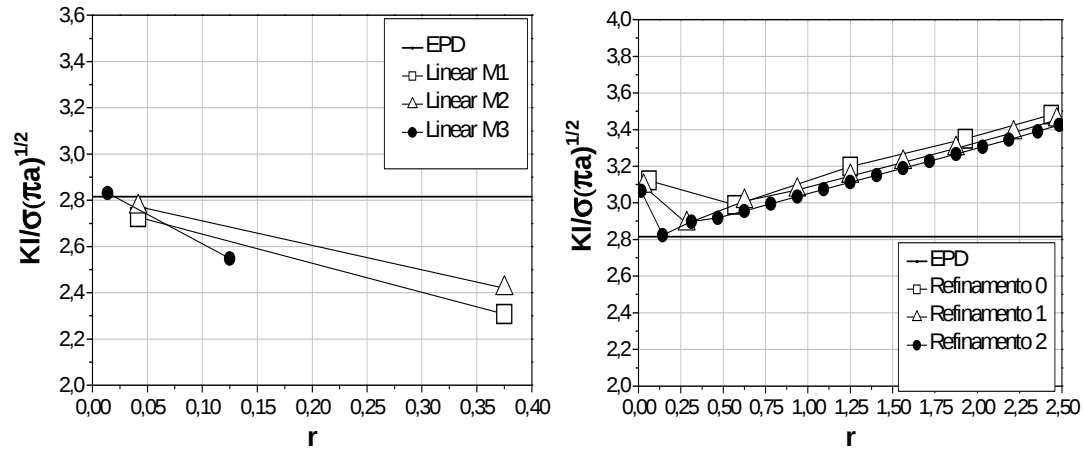
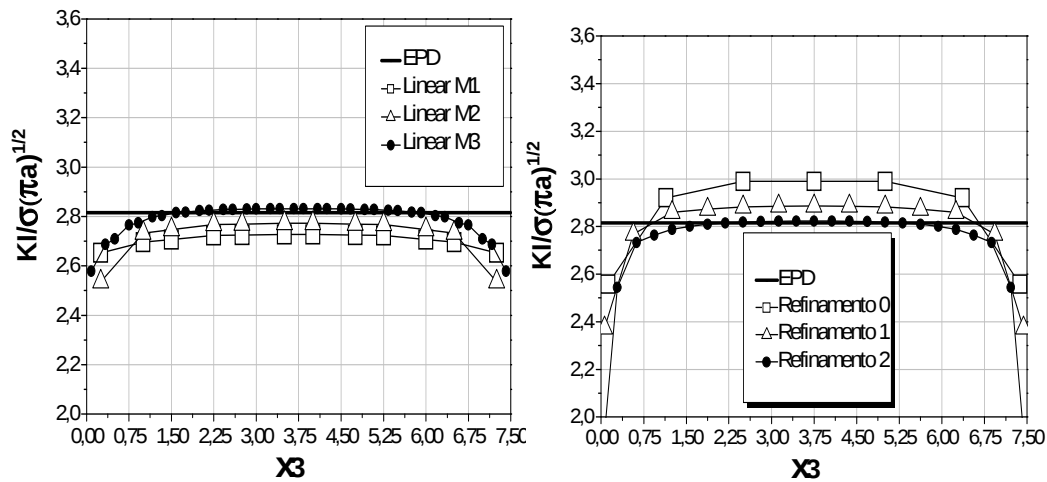


Figura 8. Deslocamentos e deformada 1:10 para os modelos “Linear M2” e “Refinamento 1”

Já para os modelos isogeométricos, as melhores respostas de FIT são obtidas para o segundo ponto de colocação mais próximo da linha de frente da fissura. Resultado semelhante é reportado para elementos isoparamétricos quadráticos (Cisilino & Aliabadi, 1999). Fixando os referidos pontos de colocação para a extração dos FIT, a Figura 10 apresenta as respostas normalizadas $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ ao longo espessura x_3 do sólido para os modelos isoparamétricos e isogeométricos junto com a resposta de referência em EPD. Já a tabela 1 apresenta um comparativo do erro médio nas respostas de $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ em $x_3 = 3,75$ (unidades de comprimento) para os modelos isoparamétricos e isogeométricos.

Para ambas as formulações do MEC dual as respostas dos FIT parecem estar convergindo para a solução analítica em EPD a media que se refinam os modelos numéricos. Para os modelos mais refinados, i.e., “Linear M3” e “Refinamento 2”, os erros nos FIT são pequenos o suficiente para garantir respostas precisas em análises de propagação. Note, no entanto, que o modelo isogeométrico “Refinamento 2” possui 1707 pontos de colocação, que corresponde a menos da metade dos 3895 pontos de colocação do modelo “Linear M3”, o qual utiliza elementos descontínuos para discretizar as superfícies da fissura.

Figura 9. Resultados de K_I versus r Figura 10. Resultados de K_I versus x_3 Tabela 1. Respostas de $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ para os modelos isoparamétricos e isogeométricos

Modelos isoparamétricos	Erro médio	Modelos isogeométricos	Erro médio
Linear M1	3,14%	Refinamento 0	6,19%
Linear M2	1,53%	Refinamento 1	2,54%
Linear M3	0,58%	Refinamento 2	0,29%

5.2 Fissura circular em um meio infinito

O segundo problema refere-se a uma fissura circular de raio r em um meio infinito, submetida a uma tensão remota σ , conforme ilustra a Figura 11.

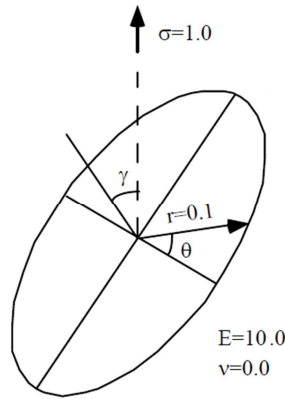


Figura 11. Fissura circular em meio infinito.

A solução analítica para os FIT desse problema é apresentada em Murakami (1987) como sendo:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sin^2(\gamma) \sqrt{\pi r} (2/\pi) & K_{II} &= \sigma \sin(\gamma) \cos(\gamma) \sin(\theta) \sqrt{\pi r} (2/\pi) 2/(2-\nu) \\ K_{III} &= \sigma \sin(\gamma) \cos(\gamma) \cos(\theta) \sqrt{\pi r} (2/\pi) 2/(2-\nu)(1-\nu) \end{aligned} \quad (15)$$

Em que γ é o ângulo entre a direção da tensão σ e a direção perpendicular ao plano da fissura. Dois casos: $\gamma = 90^\circ$, solicitação em modo I de fratura, e $\gamma = 45^\circ$, solicitação em modo misto de fratura, foram estudados. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adotados para o problema foram $E = 10$ (unidades de tensão) e $\nu = 0$, e uma tensão remota unitária, $\sigma = 1$ (unidades de tensão) foi aplicada. Para tratar o problema numericamente via o MEC dual, inseriu-se a fissura circular de raio $r = 0,1$ (unidades de comprimento) no centro de um bloco de dimensões $10 \times 5 \times 5$ (unidades de comprimento) no intuito de simular o meio infinito.

Para as análises com elementos isoparamétricos, o contorno do bloco foi discretizado com 320 elementos triangulares de aproximação linear resultando em 450 pontos de colocação. Quatro diferentes malhas foram adotadas para discretizar a fissura, sendo as mesmas denominadas: “Linear M1”, “Linear M2”, “Quadrática M1” e “Quadrática M2”, as quais resultaram respectivamente em 480, 992, 1056 e 2208 pontos de colocação. A Figura 12 ilustra, para as quatro malhas, os elementos descontínuos para a aproximação dos deslocamentos e das forças de superfície sobre a fissura.

Já nas análises isogeométricas o bloco é definido por seis patches bi quadráticos, i.e., $p = q = 2$. Considerando como descontínuos os dois patches onde atuam as tensões não nulas resulta em 192 pontos de colocação sobre as superfícies do bloco. A princípio, cada face da fissura foi definida com quatro patches bi quadráticos, um para cada quadrante da circunferência, evitando assim problemas de assimetria dos pontos de colocação. No mapeamento do espaço paramétrico para o espaço físico, a direção ξ representa a direção angular da circunferência ao passo que a direção paramétrica η representa a direção radial. Uma vez que a ordem $p = 2$ é suficiente para descrever de maneira exata a geometria circular da linha de frente e que o comportamento assintótico dos deslocamentos ocorre na direção radial da fissura, o refinamento foi realizado elevando-se a ordem polinomial q da direção

paramétrica η . Quatro diferentes refinamentos foram adotados para os oito patches da fissura na análise de convergência: Refinamento 0 ($p=2, q=2$), Refinamento 1 ($p=2, q=3$), Refinamento 2 ($p=2, q=4$), Refinamento 3 ($p=2, q=5$).

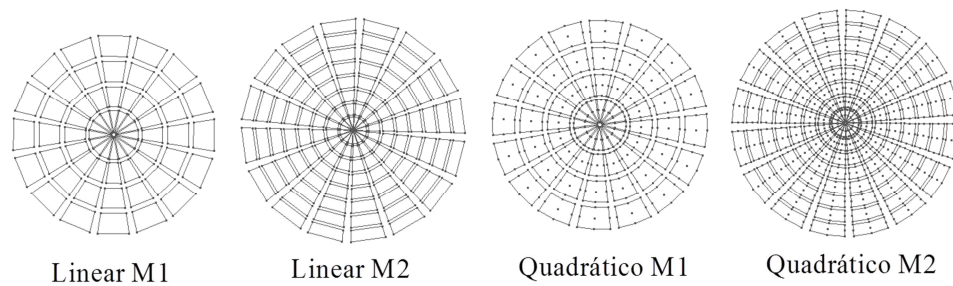


Figura 12. Malhas adotadas para os modelos isoparamétricos

Considerando como descontínuos os oito patches da fissura, os refinamentos 0, 1, 2 e 3 resultam, respectivamente, 72, 96, 120 e 144 pontos de colocação. A Figura 13 apresenta os pontos de colocação sobre as faces da fissura para os quatro refinamentos descritos na tabela 2.

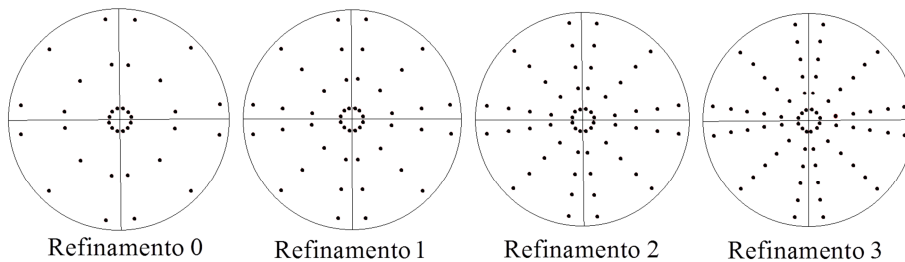


Figura 13. Refinamentos adotados para os modelos isogeométricos

A convergência do problema foi estudada em termos dos resultados dos FIT, os quais foram obtidos por meio da técnica de correlação de deslocamentos. Primeiramente foi considerado o caso $\gamma = 90^\circ$. Nesse caso avaliou-se a precisão da resposta de K_I em função da distância de extração r . Posteriormente foi estudada a solicitação em modo misto, $\gamma = 45^\circ$, onde foi possível comparar as respostas dos três FIT K_I , K_{II} e K_{III} .

Modo I ($\gamma = 90^\circ$). O caso de solicitação em modo I, $\gamma = 90^\circ$, foi primeiramente estudado para analisar a influência da distância r na extração dos FIT via a técnica de correlação de deslocamentos. O gráfico à esquerda da Figura 14 apresenta os resultados de K_I versus r para os modelos isoparamétricos. A partir dessa figura é possível perceber que no caso de elementos de aproximação linear os melhores resultados de K_I são obtidos para os pontos de colocação mais próximos da frente da fissura. Já no caso de elementos quadráticos os melhores resultados de K_I são obtidos para os segundos pontos de colocação mais próximos de $r=0$, semelhantemente ao observado para os modelos isogeométricos do exemplo anterior com funções base NURBS bi quadráticas. Já o gráfico à direita da Figura 14 apresenta os resultados de K_I versus r para os modelos isogeométricos. A partir dos resultados é possível perceber que, à medida que se melhora o refinamento do problema, a

distância ótima parece estar convergindo para um valor aproximadamente igual à $r \approx 0,0225$ (unidades de comprimento), que corresponde no espaço paramétrico à $\eta = 0,775$.

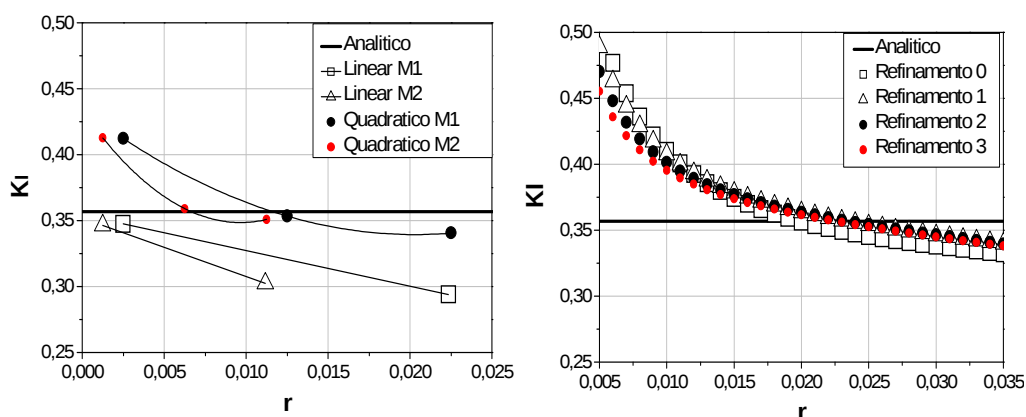


Figura 14. Resultados de K_I versus r

Fixando as distâncias r definidas a partir da Fig. 14 apresentam-se no gráfico da Figura 15 os resultados de K_I versus θ para o caso $\gamma = 90^\circ$, sendo θ o ângulo ilustrado na Fig.11.

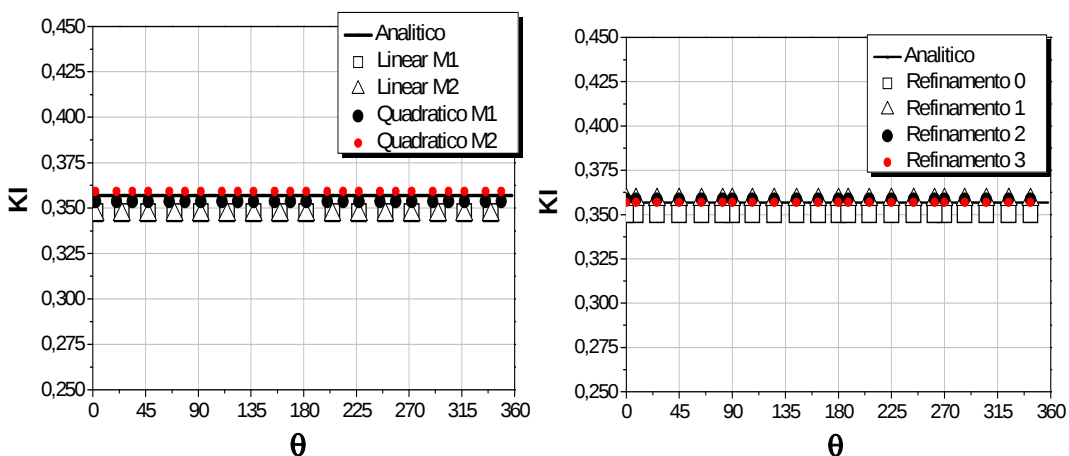


Figura 15. Resultados de K_I versus θ

Modo misto ($\gamma = 45^\circ$). Fixando as distâncias r ótimas definidas nas análises em modo I foi possível avaliar os valores dos FIT K_I , K_{II} e K_{III} para o caso de solicitação em modo misto, $\gamma = 45^\circ$. Os resultados dos três FIT K_I , K_{II} e K_{III} são apresentados em função de θ nos gráficos da Figura 16 para os modelos isoparamétricos. A Tabela 3 apresenta os erros médios das respostas numéricas dos três FIT K_I , K_{II} e K_{III} para os modelos isoparamétricos. Conforme o esperado os melhores resultados são observados para os elementos de contorno de aproximação quadrática uma vez que os mesmos proporcionam uma melhor aproximação para a geometria circular da fissura. Foi observada uma grande discrepância de precisão nas respostas de K_{II} e K_{III} ao elevar a ordem dos elementos de linear para quadrática. Verificou-

se ainda que a falta de precisão dos elementos lineares na avaliação dos FIT K_I e K_{III} não decorre propriamente da resposta de deslocamentos do MEC dual, mas sim da definição dos sistemas de coordenadas locais sobre os pontos da linha de frente da fissura. Grandes discrepâncias são observadas ao tentar definir sistemas de coordenadas locais baseados nas arestas retas dos elementos lineares que aproximam a linha de frete circular da fissura. Os erros na definição dos sistemas de coordenadas locais são então propagados na rotação dos deslocamentos e consecutivamente no cálculo dos FIT. Já no caso dos modelos isogeométricos os resultados dos três FIT K_I , K_{II} e K_{III} são apresentados em função de θ nos gráficos da Figura 17 e os erros médios são apresentados na Tabela 4. Note que a representação geometricamente exata dos sistemas de coordenadas locais sobre a linha de frente da fissura faz com que os erros médios dos três FIT K_I , K_{II} e K_{III} sejam aproximadamente iguais. Além disso, os erros médios e máximos dos FIT apresentados na Tabela 4 são consideravelmente inferiores aos apresentados na Tabela 3 para os modelos isoparamétricos.

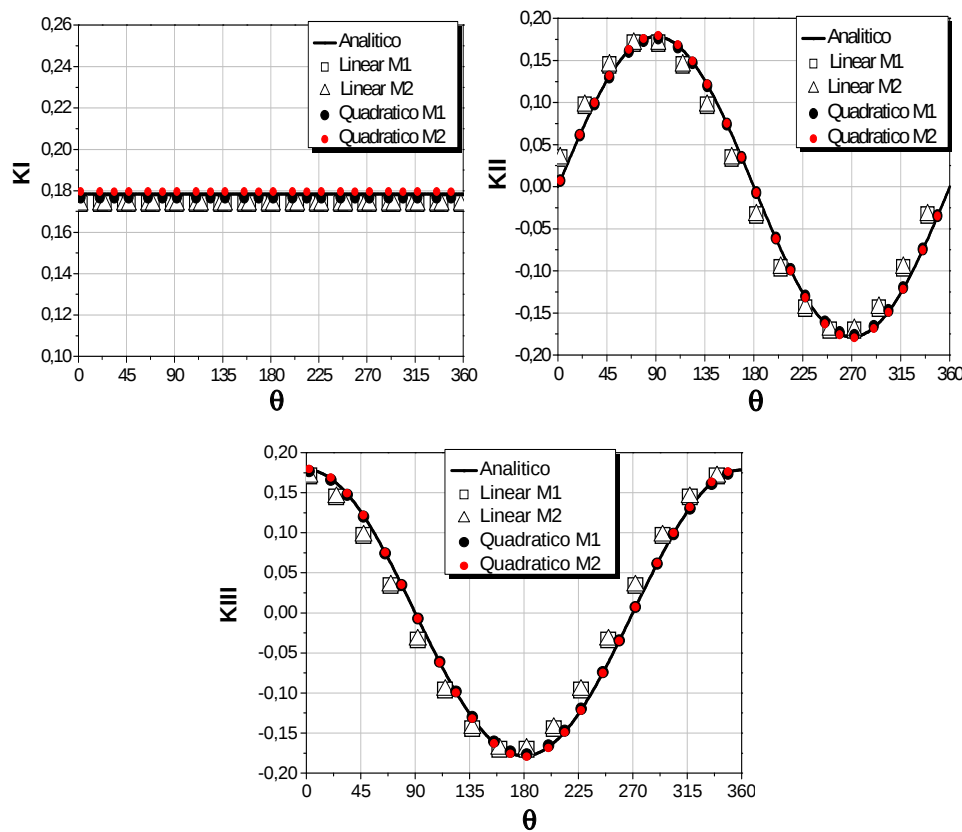


Figura 16. Resultados de K_I , K_{II} e K_{III} versus θ : Modelos isoparamétricos

Tabela 3. Respostas de K_I , K_{II} e K_{III} para os modelos isoparamétricos

Modelos isoparamétricos	Erro médio KI	Erro médio KII	Erro médio KIII
Linear M1	2,87%	15,87%	15,87%
Linear M2	2,50%	15,61%	15,61%
Quadrático M1	0,90%	0,90%	0,90%
Quadrático M2	0,67%	0,64%	0,64%

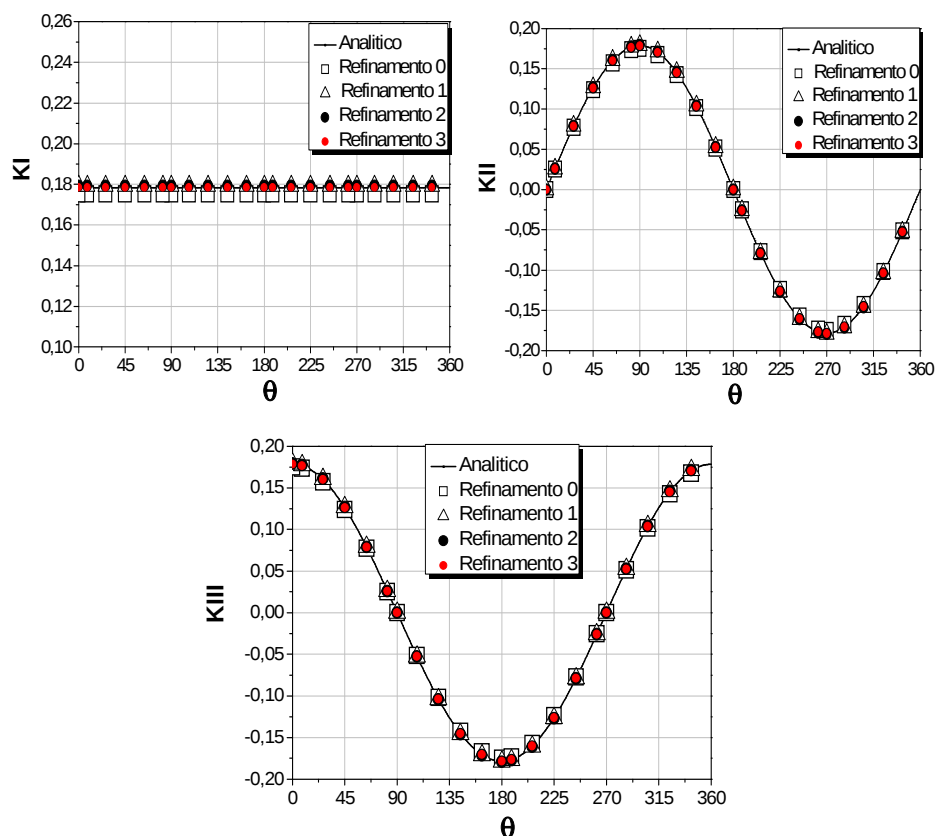


Figura 17. Resultados K_I , K_{II} e K_{III} versus θ : Modelos isogeométricos

Tabela 4. Respostas de K_I , K_{II} e K_{III} para os modelos isogeométricos

Modelos isogeométricos	Erro médio KI	Erro médio KII	Erro médio KIII
Refinamento 0	1,78%	1,78%	1,78%
Refinamento 1	0,52%	0,52%	0,52%
Refinamento 3	0,44%	0,44%	0,44%
Refinamento 4	0,04%	0,04%	0,04%

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho a formulação tridimensional do MEC dual foi implementada considerando as abordagens isoparamétrica (polinômios de Lagrange) e isogeométrica (NURBS). O objetivo do trabalho foi apresentar um comparativo entre essas duas formulações na obtenção dos FIT em problemas tridimensionais da mecânica da fratura via a técnica de correlação de deslocamentos. Nos problemas estudados, os modelos isogeométricos resultaram valores precisos para os FIT com um número menor de pontos de colocação em relação aos modelos isoparamétricos. No entanto, o tempo de processamento desses modelos foi superior devido ao esforço computacional relacionado à avaliação recursiva das funções base das NURBS. Entre as principais vantagens da formulação isogeométrica em relação à formulação isoparamétrica podem ser citadas a redução no número de pontos de colocação sobre as faces da fissura e a possibilidade de integração completa entre modelos CAD e modelos de análise uma vez que sejam tratados os problemas relativos às superfícies aparadas. Em contra partida, o custo computacional para a construção do sistema de equações é mais elevado mesmo para um menor número de pontos de colocação. Além disso, no caso de fissuras de borda, a maior continuidade das funções base NURBS dificulta a elaboração de uma formulação para inserir a descontinuidade no contorno interceptado pela superfície da fissura.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a bolsa de estudos fornecida pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CPNq) nº 141565/2015-2.

REFERENCES

- Banks-Sills, L., Sherman, D., 1986. Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements. *International Journal of fracture*, vol. 32, pp. 127–140.
- Banks-Sills, L., Hershkovitz, L.; Wawrzynek, P.A.; Eliasi, R.; Ingraffea, A.R., 2005. Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I – $z=0$ is a symmetric plane. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, pp. 2328–2358.
- Barsoum, R.S., 1974. Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of fracture*, vol. 10, pp. 603–605.
- Bazilevs, Y., Calo, V.M., Cottrell, J.A., Evans, J.A., Hughes, T.J.R., Lipton, S., Scott, M.A., Sederberg, T.W., 2010. Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 229–263.
- Chan, S.K., Tuba, L.S., Wilson, W.K., 1970. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, pp. 1–17.
- Cisilino, A.P., Aliabadi, M.H., 1999. Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 63, pp. 713–733.
- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y., 2009. *Isogeometric Analysis: Towards integration of CAD and FEA*. John-Wiley.

- Cottrell, J., Reali, R., Bazilevs, Y., Hughes, T.J.R., 2006. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 5257–5296.
- Cox, M.G., 1971. *The numerical evaluation of B-splines*. Technical Report, National Physics Laboratory DNAC 4.
- De Boor, C., 1972. On calculation with B-splines. *Journal of Approximation Theory*, vol. 6, pp. 50–62.
- Greville, T., 1964. Numerical procedures for interpolation by spline functions. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Serie B, Numerical Analysis*, vol. 1, pp. 53–68.
- Gonzalez-Albuixech, V.F., Giner, E., Tarancon, J.E., Fuenmayor, F.J., Gravouil, A., 2013. Domain integral formulation for 3-d curved and non-planar cracks with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 264, pp. 129–144.
- Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J., Rizzo, F.J., 1992. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59, pp. 604–614.
- Gupta, P., Duarte, C.A., Dhankhar, A., 2017. Accuracy and robustness of stress intensity factor extraction methods for the generalized/eXtended Finite Element Method. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 179, pp. 120–153.
- Hong, H.K., Chen, J.T., 1988. Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114, pp. 1028–1044.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4135–4195.
- Kanninen, M., Popelar, C., 1985. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press.
- Lian, H., Simpson, R.N., Bordas, S.P.A., 2013. Stress analysis without meshing: isogeometric boundary-element method for elastostatic analysis. *Proceedings of the institution of civil engineers: Engineering and Computational Mechanics*, vol. 166, pp. 88–99.
- Mi, Y., Aliabadi, M.H., 1992. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 10, pp. 161–171.
- Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131–150.
- Moran, B., Shih, C., 1987. Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 27, pp. 615–642.
- Murakami, Y., 1987. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press.
- Peng, X., Atroshchenko, E., Kerfriden, P., Bordas, S.P.A., 2017a. Linear elastic fracture simulation directly from CAD: 2D NURBS-based implementation and role of tip enrichment. *International Journal of Fracture*, vol. 204, pp. 55–78.

- Peng, X., Atroshchenko, E., Kerfriden, P., Bordas, S.P.A., 2017b. Isogeometric boundary element methods for three dimensional static fracture and fatigue crack growth. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 316, pp. 151–185.
- Portela, A., Aliabadi, M.H., 1992. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269–1287.
- Rice, J.R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
- Scott, M.A., Simpson, R.N., Evans, J.A., Lipton, S., Bordas, S.P.A., Hughes, T.J.R., Sederberg, T.W., 2013. Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 254, pp. 197–221.
- Simpson, R.N., Bordas, S.P.A., Trevelyan, Rabczuk, T., 2012. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 209-212, pp. 87–100.
- Stern, M., Becker, E.B., Dunham, R.S., 1976. A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, vol. 12, pp. 359–368.
- Szabo, B.A., Babuska, I., 1988. Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and reentrant corners. In T.A. Cruse, eds, *Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium*, ASTM STP 969, pp. 101–124.
- Williams, M.L., 1956. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 109–114.
- Xiao, H.T., Yue, Z.Q., 2011. A three-dimensional displacement discontinuity method for crack problems in layered rocks. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, vol. 48, pp. 412–420.