



OTIMIZAÇÃO DE PLACAS MODELADAS ATRAVÉS DE NURBS

Hélio Gomes Filho

Élcio Cassimiro Alves

heliogomesfilho@gmail.com

elcio.calves1@gmail.com

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, 29075-910, Vitória, Espírito Santo, Brasil

Etereldes Gonçalves Júnior

etereldes@gmail.com

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, 29075-910, Vitória, Espírito Santo, Brasil

Resumo. Este trabalho apresenta a otimização de placas finas submetidas a carregamento estático através de uma formulação híbrida para a análise de deslocamentos. A análise é realizada através de uma combinação do método clássico de elementos finitos para análise de placas finas (baseado na teoria de Kirchhoff) com um domínio gerado por NURBS (do inglês, Non-Rational B-Splines). As NURBS possibilitam a modelagem com exatidão de uma quantidade muito maior de domínio que as funções polinomiais, isso é, sem que haja a necessidade de aproximar a fronteira dos domínios. Para exemplificar isso, pode-se destacar os domínios circulares e elipsoidais. Assim, além das NURBS tornarem desnecessária a utilização de um gerador de malhas, elas trazem vantagens na análise, eliminando os erros provenientes da aproximação da fronteira. Para o processo de otimização utiliza-se o algoritmo PQS (Programação Quadrática Sequencial) disponível através da função `fmincom` do software comercial Matlab, onde a variável de projeto é a espessura dos elementos, a função objetivo é minimizar o volume (e por consequência o peso) da placa e as restrições baseiam-se em um dado deslocamento máximo. Exemplos para validação do método de análise e para demonstração da otimização são dados ao longo do texto.

Keywords: Placas, Otimização, NURBS, Análise, Estruturas

1 INTRODUÇÃO

Desde a concepção do Método dos Elementos Finitos, inúmeros elementos foram desenvolvidos para se modelar as mais diversas geometrias e os mais variados fenômenos. Sendo assim, há elementos específicos para cada tipo de problema.

Em relação à análise de placas, existem diversos elementos, como exemplo disso Hrabok & Hradey (1984) apresentam em seu artigo 88 tipos diferentes de elementos. Todos os elementos apresentados por eles possuem fronteira definida polinomialmente pela interpolação de seus nós, o que faz com que esses elementos mapeiem exatamente apenas os domínios que possuem fronteira definida também por polinômios.

Hughes, Cottrell & Bazilevs (2005). apresenta uma evolução do Método dos Elementos Finitos, chamado de Análise Isogeométrica (em inglês, *Isogeometric Analysis*), que utiliza as funções NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) para mapearem o domínio e também como funções base para construir o espaço soluções das Equações Diferenciais Parciais. Pielg & Tiller (1996) apresentam em seu livro a formulação das NURBS e a modelagem de domínios convencionais por meio delas.

A grande vantagem do método isogeométrico é que as funções NURBS geram com exatidão domínios muito comuns no cotidiano que os polinômios não podem gerar, como por exemplo, círculos e elipses, sem falar em domínios mais complexos. Sendo assim, ao invés de usarmos um domínio aproximado, é possível solucionar os problemas em um domínio definido exatamente, o que trás muitas vantagens na solução dos problemas além de garantir a convergência da solução, como mostra Gomes & Gonçalves (2017). A Fig. 1 mostra as diferenças dos elementos definidos em um domínio aproximado composto por elementos quadrangulares e em um domínio exato gerado por NURBS. Para uma referência, em português, sobre a Análise Isogeométrica (AIG) ver Gomes Filho (2016) e, em inglês, ver Cottrell, Hughes & Bazilevs (2009).

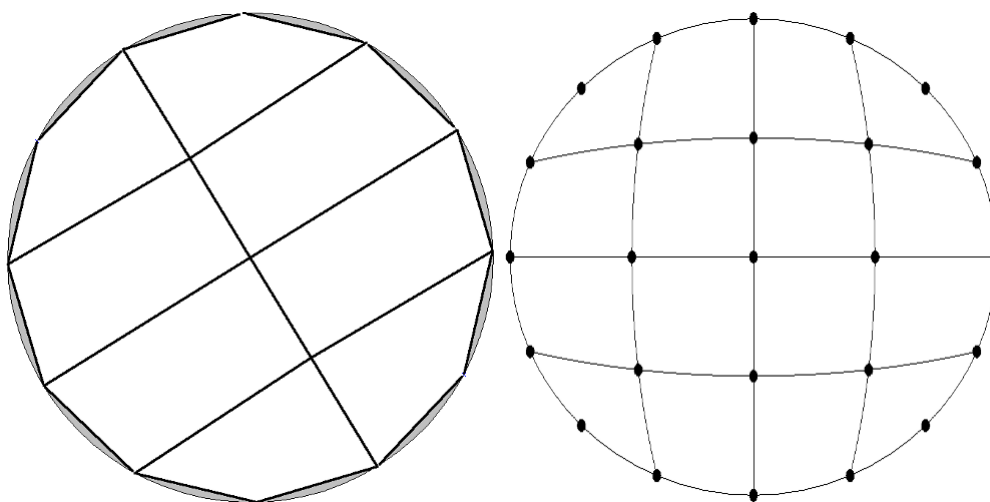


Figura 1: Comparação entre domínios modelados por elementos quadrilaterais (à esquerda) e elementos gerados por NURBS (à direita).

Fonte: Autor.

A respeito da análise de estruturas, Hughes, Cottrell & Bazilevs (2005) em seu trabalho dedicam um capítulo ao assunto. Nesse capítulo são apresentadas as formulações para análise de

deslocamentos e tensões para geometrias clássicas da literatura. Como exemplo são abordados a placa infinita com um furo circular, sólido cilíndrico sujeito a pressão interna, sólido em forma de ferradura, casca cilíndrica de extremidades restritas sujeitas a pressão interna, casca hemisférica e o telhado cilíndrico de Sordelis-Lo.

Kiendel et al (2009) e Kiendel et al (2010) em seus trabalhos apresentam uma formulação voltada a análise de cascas através de elementos de Kirchhoff-Love, onde abordam de forma não linear o problema de elasticidade.

Avaliando a formulação apresentada por Hughes, Cottrel & Bazilevs (2009), que não considera a flexão apresentada nas placas, e a formulação apresentada por Kiendel et al (2009), que é de alto nível de complexidade, buscou-se desenvolver uma formulação própria que fosse simples, eficiente e compreendesse também a flexão das placas. Dessa forma, desenvolveu-se uma formulação híbrida, combinando a utilização das NURBS para a modelagem dos domínios, com uma formulação relativamente simples para análise de placas baseada na teoria de Kirchhoff (apresentada em Logan (2011)). Vale ressaltar que não se utilizou o método isogeométrico, apenas baseou-se na ideia do mesmo quanto a aplicação das NURBS.

É comum, além de se desejar analisar estruturas, buscar-se por geometrias que resultem em economia de material para o problema em análise. Com isso, o processo de otimização tem ganhado cada vez mais destaque nos programas computacionais. Esse fato faz com que as pesquisas nessa área também tenha aumentado, principalmente nos últimos 20 anos com a grande evolução dos computadores.

Meira (2000) desenvolveu uma formulação para análise de placas e cascas submetidas a carregamento dinâmico no regime linear-elástico. Utilizou-se então o algoritmo PQS (Programação Quadrática Sequencial) no processo de otimização e adotou-se como restrições valores limites de deslocamentos, acelerações, frequências e/ou tensões.

Espath (2009) em seu trabalho desenvolve a análise estrutural e a otimização de cascas parametrizadas por meio de superfícies NURBS. Utilizou-se o algoritmo PQS para a realização da otimização de forma das cascas.

Já Rocha (2013) realiza a otimização de cascas laminadas utilizando o algoritmo genético. Nesse trabalho não utilizou-se a Análise Isogeométrica, e sim um elemento de casca abatida baseado na Teoria de Marguerre, considerando as não-linearidades geométricas e físicas do problema.

Alves & Vaz (2013) apresentam a formulação do problema de otimização de placas submetidas a carregamentos aleatórios (carregamento dinâmico não determinístico) para placas isotrópicas e do tipo sanduíche, enquanto Alves (2016) apresenta comparação entre otimização de estruturas submetidas a carregamento dinâmico por meio de método determinístico e probabilístico aplicado a análise de placas.

Nesse trabalho será realizada a otimização da espessura dos elementos de placas através do algoritmo PQS, visando a redução do volume da placa (e com isso também do peso) e tendo como restrição o deslocamento máximo.

2 FORMULAÇÃO

Nesta seção serão apresentados os conceitos básicos a respeito das NURBS, a formulação em elementos finitos utilizada para análise estática de placas, seguidos pela formulação do método híbrido.

2.1 B-splines, NURBS e a função geométrica

Como a definição das NURBS está ligada a definição das b-splines, vamos começar definindo a segunda. B-splines são funções polinomiais definidas por partes. Sua definição necessita de dois elementos, que são o vetor de nós e o grau da curva. O vetor de nós é um conjunto de números reais não decrescentes, geralmente definido de 0 à 1.

As funções base b-splines são definidas de forma recursiva em Eq. (1) e Eq. (2).

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{p+1} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{p+i+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

onde p é o grau, u é a variável e $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ é o vetor de nós.

As derivadas de primeira ordem das funções base b-splines são dadas pela Eq. (3), enquanto as derivadas de ordem superior são apresentadas na Eq. (4).

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3)$$

$$N^{(k)}_{i,p}(u) = p \left(\frac{N^{(k-1)}_{i,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N^{(k-1)}_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (4)$$

As NURBS são razões ponderadas entre b-splines, sendo assim, para definir funções base NURBS também são necessários os pesos respectivos a cada uma das funções base b-splines que servirão como base para a construção. Então, sejam $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ os pesos, as funções base NURBS são definidas na Eq. (5).

$$R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=1}^m w_j N_{j,p}(u)} \quad (5)$$

De maneira análoga, define-se as funções base NURBS bidimensionais, bastando apenas ao invés de utilizar um conjunto de funções base b-splines, utilizar dois, conforme a Eq. (6).

$$R_{ij,pq}(u, v) = \frac{w_{ij} N_{i,p}(u) M_{j,q}(v)}{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m w_{rs} N_{r,p}(u) M_{s,q}(v)} \quad (6)$$

As derivadas das funções NURBS em uma e duas dimensões podem ser facilmente calculadas com as definições até aqui apresentadas.

A ferramenta principal a ser usada na análise isogeométrica é a função geométrica, que é responsável pela parametrização da superfície. Definidas as funções base bidimensionais NURBS, pode-se definir a função geométrica $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que relaciona o domínio retangular, chamado de paramétrico, com o domínio que forma a geometria do problema, chamado de domínio geométrico. A função geometria está definida pela Eq. (7), onde P_{ij} são chamados de pontos de controle e são pontos pertencentes a $\mathbb{R}^2$ característicos da geometria a qual se deseja modelar.

$$F(u, v) = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} R_{ij,pq} P_{ij} \quad (7)$$

As derivadas da função geométrica também podem ser facilmente calculadas. Para mais detalhes sobre NURBS, inclusive sobre o processo de refinamento, ver Pielg e Tiller (1995).

2.2 Análise de placas por meio do método dos elementos finitos

Como dito anteriormente, dentre as tantas formulações de elementos de placa, optou-se utilizar uma das mais simples. A formulação escolhida é de um elemento retangular com quatro nós, tendo cada um deles três graus de liberdade, a saber, deslocamento transversal e duas rotações no plano. Para mais detalhes sobre este elemento, ver Logan (2011).

Seja w o deslocamento transversal na direção z , θ_x e θ_y as rotações sobre os eixos x e y , respectivamente, tem-se que os deslocamentos de cada nó podem ser escritos através do vetor $\mathbf{d} = [w \ \theta_x \ \theta_y]^T$. Sendo assim, se a placa é composta pelos nós i, j, k e l temos o seguinte vetor deslocamentos, apresentado na Eq. (8).

$$\mathbf{d} = [w_i \ \theta_{x_i} \ \theta_{y_i} \ w_j \ \theta_{x_j} \ \theta_{y_j} \ w_k \ \theta_{x_k} \ \theta_{y_k} \ w_l \ \theta_{x_l} \ \theta_{y_l}]^T \quad (8)$$

Devido aos doze graus de liberdade do elemento, adota-se como equação para o deslocamento transversal do elemento um polinômio com doze termos, apresentado na Eq. (9), onde x e y são as coordenadas na placa.

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (9)$$

Pode-se escrever as rotações em função do deslocamento w , como apresentado na Eq. (10) e na Eq. (11), e assim também escrevê-las através de um polinômio, como nas Eq. (12) e Eq. (13).

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (11)$$

$$\theta_x = a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + 2a_9xy + 3a_{10}y^2 + a_{11}x^3 + 3a_{12}xy^2 \quad (12)$$

$$w = -a_2 - 2a_4x - a_5y - 3a_7x^2 - 2a_8xy - a_9y^2 - 3a_{11}x^2y - a_{12}y^3 \quad (13)$$

Pode-se escrever a Eq. (9), a Eq. (12) e a Eq. (13) de forma matricial, como apresentado na Eq. (14),

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ou por simplicidade, $\Psi = \mathbf{P}\mathbf{a}$, onde $\mathbf{P}$ é a matriz que depende de x e y .

A matriz dos coeficientes $\mathbf{a}$ ainda é desconhecida, porém conhecidos os deslocamentos nodais do elemento é possível calculá-la: basta escrever a Eq. (14) para cada um dos nós e dessa forma teríamos o se sistema linear apresentado na Eq. (15), onde $\mathbf{P}_i$ é a matriz $\mathbf{P}$ calculada para o nó i .

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{a} \quad (15)$$

Calculados os coeficientes a_i , pode-se calcular os deslocamentos para quais ponto pertencente a placa em função dos deslocamentos nodais, através da Eq. (16).

$$\Psi = PC^{-1}d = Nd \quad (16)$$

onde $N = PC^{-1}$ é chamada de matriz das funções de forma.

De maneira análoga, sabendo que as curvaturas podem ser escritas em função de w como $\kappa_x = -\partial^2 w / \partial x^2$, $\kappa_y = -\partial^2 w / \partial y^2$ e $\kappa_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y$, pode-se escrever a Eq. (17),

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4y & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ou de forma simplificada, $\kappa = Qa$. Como anteriormente, pode-se calcular as curvaturas em qualquer ponto em função dos deslocamentos nodais, como mostra a Eq. (18),

$$\kappa = QC^{-1}d = Bd \quad (18)$$

onde $B = QC^{-1}$ é chamada matriz de deformação.

Conhecida a matriz B é possível calcular a matriz de rigidez do elemento através da Eq. (19), onde D é a matriz de elasticidade, apresentada na Eq. (20), E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e t é a espessura da placa.

$$K = \int \int B^T B D d\Omega \quad (19)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

O vetor de cargas nodais devida à carga distribuída q sobre a superfície do elemento é dado pela Eq. (21), onde N_s é a matriz das funções de forma tomada apenas a linha referente a direção transversal.

$$F_s = \int \int N_s^T q d\Omega \quad (21)$$

2.3 Transformação do domínio através da função geométrica

Como dito anteriormente, a função geométrica será utilizada na modelagem dos domínios em análise, dispensando a utilização de um gerador de malha. Para isso, serão necessários ajustes na formulação do elemento apresentado anteriormente para adequá-lo a transformação de domínio.

A ideia da formulação é fazer uma mudança de variáveis através da função geométrica para que se possa calcular a solução no domínio paramétrico, que é mais simples de realizar a integração por meios numéricos, e obter a solução referente ao domínio geométrico, que é o domínio em análise. A Fig. 2 apresenta essa transformação entre domínios.

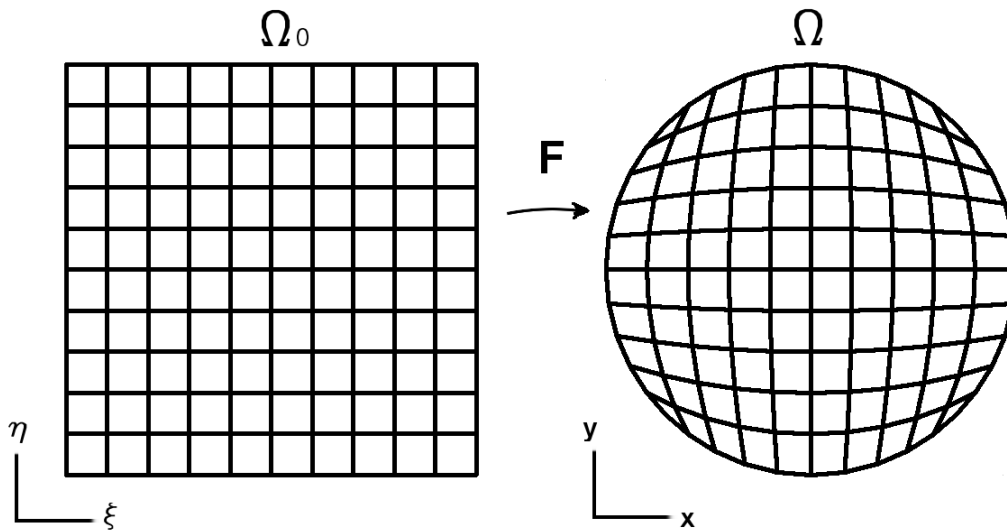


Figura 2: Transformação através do função geométrica do domínio paramétrico (à esquerda) no domínio geométrico (à direita).

Fonte: Gomes Filho (2016)

Pode-se fazer uma mudança de variável em w (deslocamento transversal) utilizando a função geométrica implicitamente. Sejam x e y as variáveis do domínio geométrico e u e v as variáveis do domínio paramétrico, temos a seguinte transformação, apresentada na Eq. (22).

$$w(x, y) = w(F(u, v)) \quad (22)$$

Para fazer a mudança de variável na integração do cálculo da matriz de rigidez também é necessário calcular as derivadas de primeira e segunda ordem de w com relação a x e y , sendo conhecidas essas derivadas nas direções u e v . Utilizando a regra da cadeia e escrevendo de forma matricial, temos a Eq. (23) para as derivadas de primeira ordem e a Eq. (24) para as de segunda ordem.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Através das derivadas calculadas pela Eq. (23) e Eq. (24), calcula-se as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ para se resolver o problema. Supondo que o domínio paramétrico seja $[0, 1]^2$, o que é frequentemente ocorre, o calculo da matriz de rigidez se torna a Eq. (25).

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\det(\mathbf{J})| du dv \quad (25)$$

3 OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização possui alguns conceitos básicos referentes a sua formulação. Esses são: variáveis de projeto, função objetivo e as restrições. Dessa forma, um problema de otimização pode ser escrito como na Eq. (26).

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } fun.obj.(var_1, var_2, \dots, var_n) \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} restr_1 \\ \vdots \\ restr_m \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

As variáveis de projeto são os valores modificáveis durante o processo de otimização na busca da solução ótima, a função objetivo é uma função que depende das variáveis de projeto e a qual se busca obter o menor valor possível dadas as restrições do problema, e as restrições estão relacionadas ao domínio possível para solução do problema e é importante que estejam bem definidas para evitar grandes áreas de busca do algoritmo.

O problema aqui apresentado tem como objetivo minimizar o volume da placa, tendo como variáveis de projeto as espessuras dos elementos e como restrições o deslocamento máximo de cada nó da placa. Esse problema possui restrições não lineares, pois as espessuras são elevadas ao cubo na construção da matriz de rigidez. A Eq. (27) descreve o problema.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i=1}^m t_i A_i \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} |w_1| \leq d_{max} \\ \vdots \\ |w_n| \leq d_{max} \\ t_{min} \leq t_1 \leq t_{max} \\ \vdots \\ t_{min} \leq t_m \leq t_{max} \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

onde t_i e A_i são, respectivamente a espessura e a área do elemento i , w_j é o deslocamento do nó j , d_{max} é o deslocamento transversal máximo permitido, t_{min} e t_{max} são as espessuras mínima e máxima permitidas. Vale ressaltar que os deslocamentos são obtidos da solução do sistema linear $Kd = F$.

Optou-se por utilizar o algoritmo PQS disponível na biblioteca de rotinas do programa de computador Matlab[®] para a solução do problema de otimização.

4 RESULTADOS

Tendo em vista toda a teoria até aqui apresentada, verificam-se agora os resultados do método de análise de placas utilizando NURBS na modelagem do domínio. Para isso, compara-se o método com resultados da teoria clássica de análise de placas, disponíveis em Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959).

A formulação do método de análise foi implementada no programa de computador Matlab[®], visando a facilidade da utilização das diversas bibliotecas disponíveis.

Vale destacar que para todos os exemplos aqui apresentados foram utilizadas NURBS de grau 2 na modelagem e que os pontos de controle dos retângulos foram distribuídos de forma uniforme dentro da área da placa, enquanto os pontos de controle do círculo foram obtidos de Gomes & Gonçalves (2017).

4.1 Placa Retangular Apoiada Submetida a Carga Pontual

Para uma carga pontual P no ponto de coordenada (u, v) de uma placa retangular de dimensões a e b apoiada em todos os lados, a deformada em um ponto (x, y) é dada pela Eq. (28).

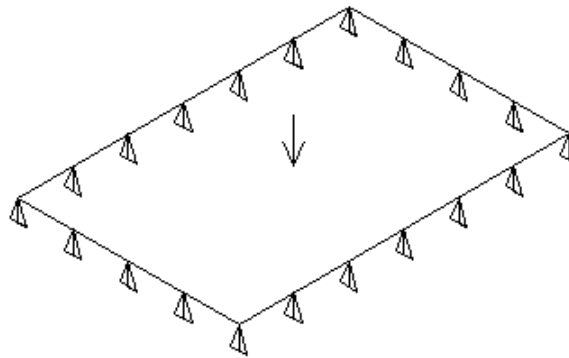
$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 D ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi u}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi v}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (28)$$

Tabela 1: Comparação de deformação máxima para placa retangular apoiada submetida à carga concentrada (em metros).

Nº de elem.	u_{max} (2x2)	u_{max} (4x2)	u_{max} (10x2)
4	$3.8298e - 6$	$5.4049e - 6$	$4.0911e - 6$
16	$2.7780e - 6$	$4.0022e - 6$	$4.3312e - 6$
64	$2.5947e - 6$	$3.7083e - 6$	$3.9413e - 6$
256	$2.5497e - 6$	$3.6360e - 6$	$3.7754e - 6$
1024	$2.5379e - 6$	$3.6163e - 6$	$3.7256e - 6$
Valor Exato	$2.5336e - 6$	$3.6088e - 6$	$3.7043e - 6$

onde $D = \frac{Ee^3}{12(1 - \nu^2)}$.

Como exemplo, tomou-se três placas diferentes em dimensões $2 \times 2m$, $4 \times 2m$ e $10 \times 2m$, todas com espessura $t = 0.1m$, módulo de elasticidade $E = 200GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, apoiadas em todos os lados e submetidas a uma carga concentrada no seus centro de valor $P = -1kN$, conforme mostra a Fig. 3. A Tabela 1 apresenta a deformada máxima obtida pelos modelos analisados com diferentes números de elementos. A Tabela 2 apresenta o erro absoluto¹ para os mesmo modelos. A Fig. 4 apresenta a deformada transversal para placa 4×2 modelada com 64 elementos.

**Figura 3: Modelo de placa retangular submetida a carga pontual para validação da análise estática.**

Fonte: Autor.

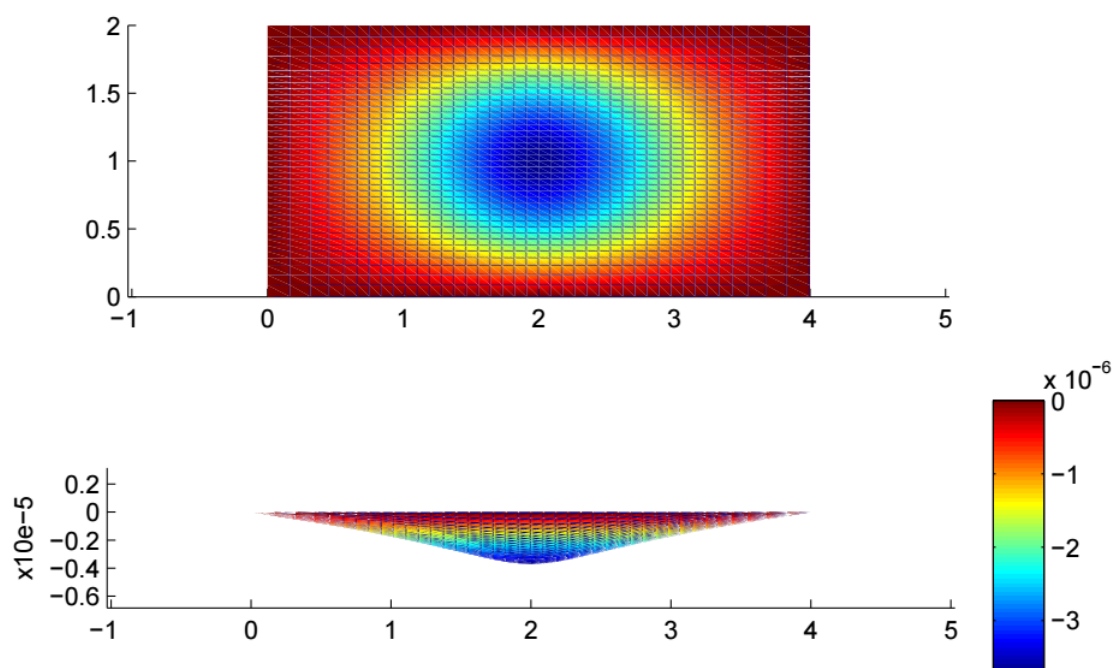
4.2 Placa Retangular Apoiada Submetida a Carga Distribuída

Dada uma carga uniforme q distribuída sobre toda uma placa retangular de dimensões a e b apoiada em todos os lados, a deformada em um ponto (x, y) é apresentada pela Eq. (29).

¹O erro absoluto é dado por $Erro(\%) = \frac{|u_{placa} - u_{exato}|}{u_{exato}} 100\%$

Tabela 2: Erro absoluto da deformação máxima para placa retangular apoiada submetida à carga concentrada.

Nº de elem.	Erro(%)– 2x2	Erro(%)– 4x2	Erro(%)– 10x2
4	51.160	49.770	10.442
16	9.646	10.901	16.924
64	2.421	2.757	6.398
256	0.635	0.754	1.919
1024	0.170	0.208	0.575

**Figura 4: Deformada de placa retangular 4x2 sujeita a carga concentrada modelada por 64 elementos.**
Fonte: Autor.

$$w(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (29)$$

Como exemplo, utiliza-se os mesmo modelos apresentados na subseção anterior, simplesmente substituindo a carga pontual por uma carga uniformemente distribuída sobre toda placa de valor $q = -1kN/m^2$, conforme mostra a Fig. 5. A Tabela 3 apresenta a deformada máxima obtida pelos modelos analisados com diferentes números de elementos. A Tabela 4 apresenta o erro absoluto para os mesmo modelos. A Fig. 6 apresenta a deformada transversal para placa 4×2 modelada com 64 elementos.

Tabela 3: Comparação de deformação máxima para placa retangular apoiada submetida à carga distribuída (em metros).

Nº de elem.	u_{max} (2x2)	u_{max} (4x2)	u_{max} (10x2)
4	$5.4367e - 6$	$1.5547e - 5$	$3.6480e - 5$
16	$3.8870e - 6$	$9.7774e - 6$	$1.6237e - 5$
64	$3.6286e - 6$	$9.0591e - 6$	$1.1518e - 5$
256	$3.5686e - 6$	$8.8999e - 6$	$1.1310e - 5$
1024	$3.5538e - 6$	$8.8612e - 6$	$1.1326e - 5$
Valor Exato	$3.5489e - 6$	$8.8484e - 6$	$1,1331e - 5$

Tabela 4: Erro absoluto da deformação máxima para placa retangular apoiada submetida à carga distribuída

Nº de elem.	Erro(%)– 2x2	Erro(%)– 4x2	Erro(%)– 10x2
4	53.194	75.704	221.949
16	9.527	10.499	43.297
64	2.246	2.381	1.650
256	0.555	0.582	0.185
1024	0.138	0.145	0.044

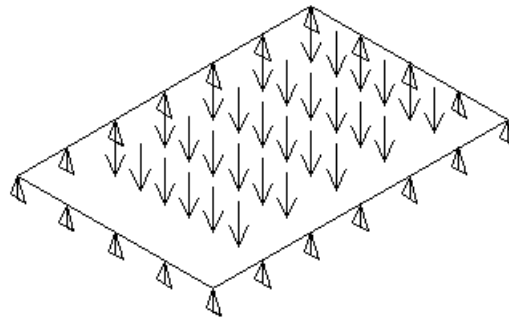


Figura 5: Modelo de placa retangular submetida carga distribuída para validação da análise estática.

Fonte: Autor.

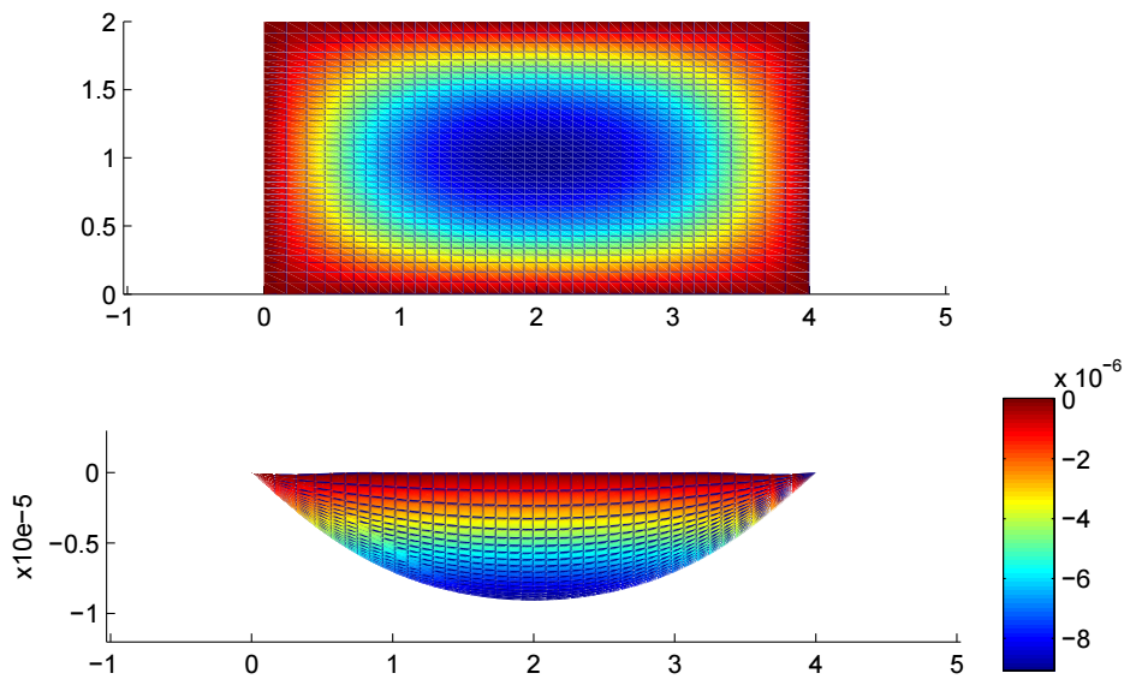


Figura 6: Deformada de placa retangular 4x2 sujeita a carga distribuída modelada por 64 elementos.

Fonte: Autor.

4.3 Placa Circular Submetida a Carga Pontual

Para uma placa circular apoiada nas bordas com uma carga concentrada P no seu centro e raio R , a deformada em um ponto de distância r do centro é dada pela Eq. (30).

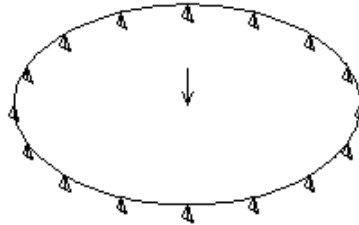
$$w(r) = \frac{P}{16\pi D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} (R^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right) \quad (30)$$

Para exemplificar, modelou-se uma placa circular de raio igual a $2m$, espessura $t = 0.1m$, $E = 200GPa$, $\nu = 0.3$ submetida a uma carga concentrada no seu centro com valor $P =$

Tabela 5: Comparação de deformação máxima para placa circular submetida à carga concentrada.

Nº de elem.	u_{max} apoiada (m)	Erro Abs. (%)
4	$1.4095e - 5$	27.799
16	$1.1860e - 5$	7.535
64	$1.1278e - 5$	2.258
256	$1.1102e - 5$	0.662
1024	$1.1048e - 5$	0.172
Valor Exato	$1.1029e - 5$	-

$-1kN$, apoiada, conforme mostra a Fig. 7. O resultado da deformação máxima e do erro absoluto está apresentado na Tabela 5. A Fig. 8 apresenta a deformação dessa placa.

**Figura 7: Modelo de placa circular submetida a carga pontual para validação da análise estática.**

Fonte: Autor.

4.4 Placa Circular Submetida a Carga Distribuída

Para uma placa circular engastada nas bordas submetida a uma carga uniformemente distribuída sobre toda sua extensão q e raio R a deformada em um ponto de distância r do centro é dada pela Eq. (31).

$$w(r) = \frac{q}{64D}(R^2 - r^2)^2 \quad (31)$$

Como exemplo, tomou-se o mesmo exemplo da subseção anterior, porém substituindo a carga pontual por uma carga uniformemente distribuída de valor $q = -1kN/m^2$, conforme mostra a Fig. 9. O resultado da deformação máxima e do erro absoluto está apresentado na Tabela 6. A Fig. 10 apresenta a deformação dessa placa.

4.5 Otimização de Espessura

Como primeiro exemplo de otimização, definiu-se que a espessura deveria ser constante. Adotou-se um modelo de 64 elementos para uma placa de $4m$ por $2m$ com todos os lados apoiados, sujeita a um carregamento distribuído sobre toda sua área de $-10kN$, além do peso próprio

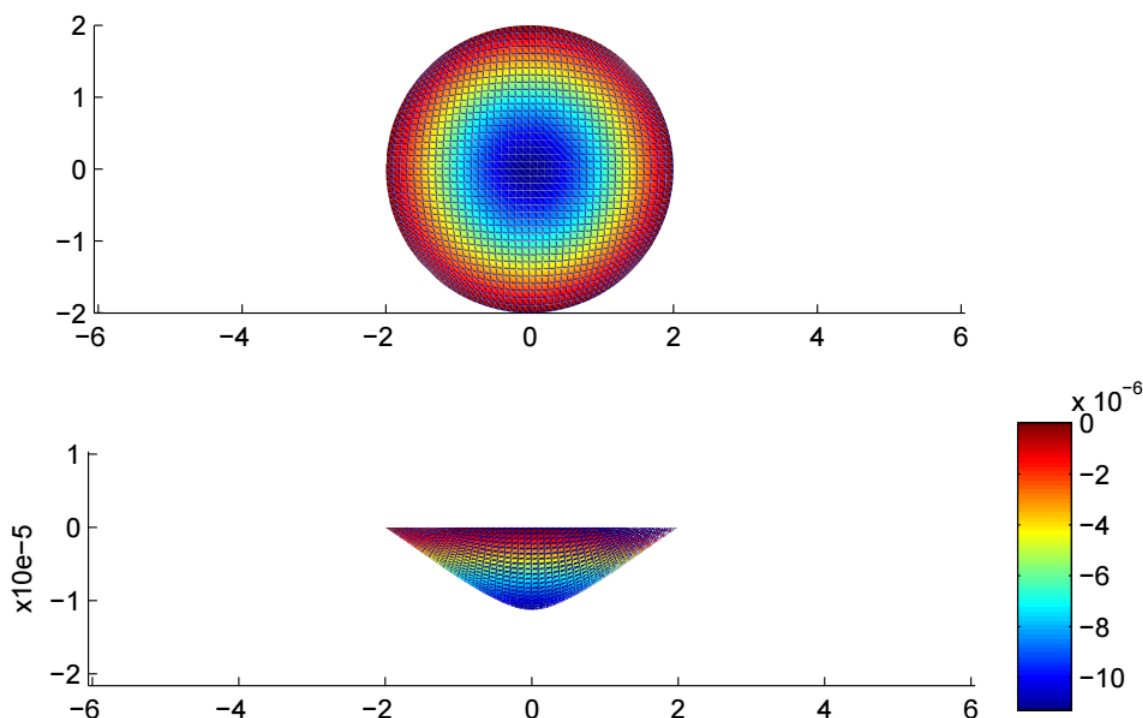


Figura 8: Deformada de placa circular apoiada com raio 2m sujeita a carga concentrada modelada por 64 elementos.

Fonte: Autor.

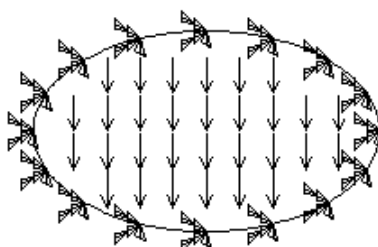


Figura 9: Modelo de placa circular submetida a carga distribuída para validação da análise estática.

Fonte: Autor.

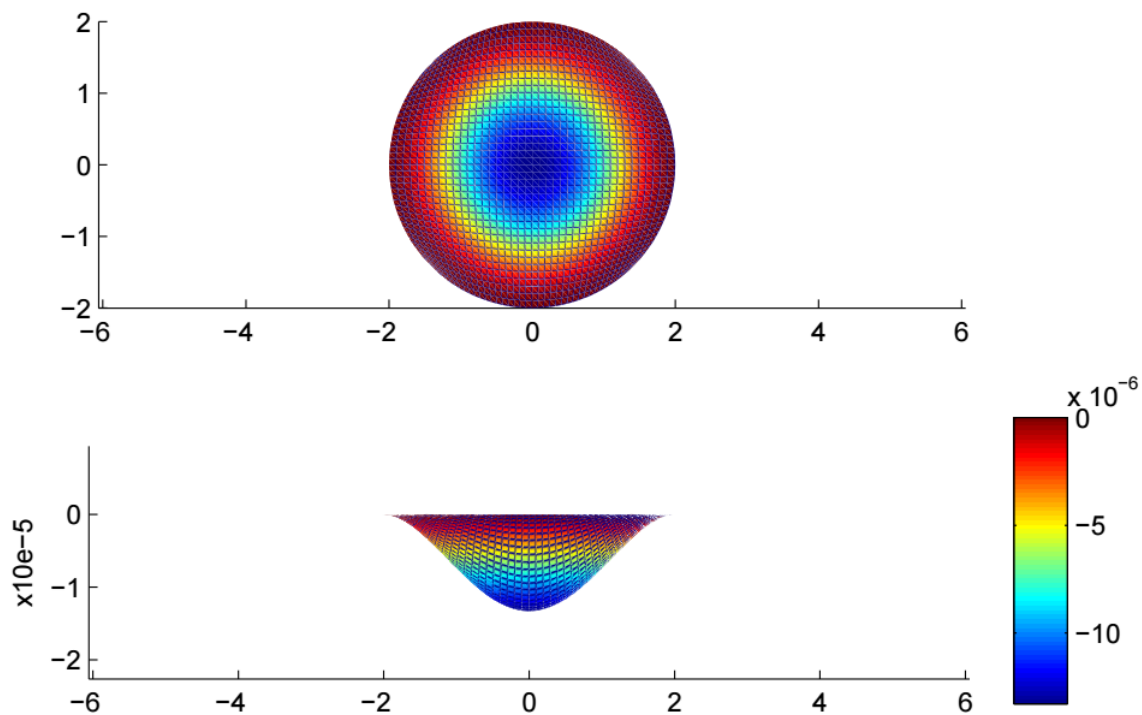
da placa. Adotou-se também $E = 200GPa$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800kg/m^3$, espessuras mínima e máxima iguais a 2cm e 15cm, respectivamente, e deslocamento máximo igual a 0.1cm. Como resultado obteve-se uma espessura ótima igual a 5.0071cm e um volume de 0.40057m³.

Para o mesmo exemplo, permitiu-se agora que as espessuras dos 64 elementos fossem variáveis de projeto. Adotou-se como valor inicial das variáveis de projeto a espessura ótima obtida anteriormente, isso é, 5.0071cm. Como resultado obteve-se um volume de 0.2734m³, que representa uma redução de 31.75%. As espessuras podem ser observadas na Fig. (11) onde cada cor simboliza uma espessura diferente.

Para o terceiro exemplo, utilizou-se uma placa circular de raio igual a 3m, também modelada por 64 elementos, engastada em toda a borda, com carga distribuída de $-1kN$, além do peso próprio, e as mesmas características do material anterior. As restrições adotadas foram:

Tabela 6: Comparação de deformação máxima para placa circular submetida à carga distribuída.

Nº de elem.	u_{max} engast. (m)	Erro Abs.(%)
4	$1.1458e - 5$	16.059
16	$1.1592e - 5$	15.077
64	$1.3287e - 5$	2.659
256	$1.3581e - 5$	0.505
1024	$1.3636e - 5$	0.103
Valor Exato	$1.3650e - 5$	-

**Figura 10: Deformada de placa circular engastada com raio 2m sujeita a carga distribuída modelada por 64 elementos.**

Fonte: Autor.

deslocamento máximo de 0.1cm , espessura mínima de 5cm e máxima de 20cm , além de valor inicial igual a espessura mínima, isso é, 5cm .

Para a otimização com espessura constante, obteve-se uma espessura ótima de 15.44cm e um volume mínimo igual a 4.3667m^3 , enquanto para o problema com espessuras variáveis, obteve-se um volume mínimo igual a 3.3094m^3 , representando uma redução de 24.21% . A Fig. (12) apresenta a distribuição das espessuras na placa circular.

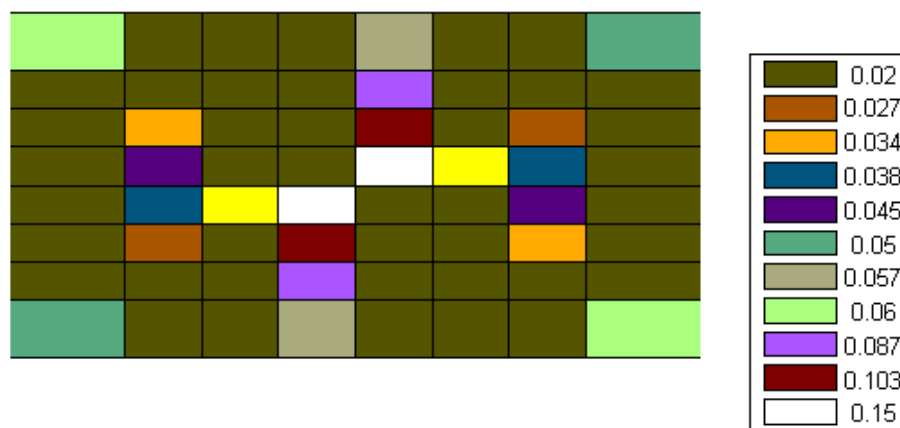


Figura 11: Distribuição das espessuras dos elementos após processo de otimização (espessuras em metros).
Fonte: Autor.

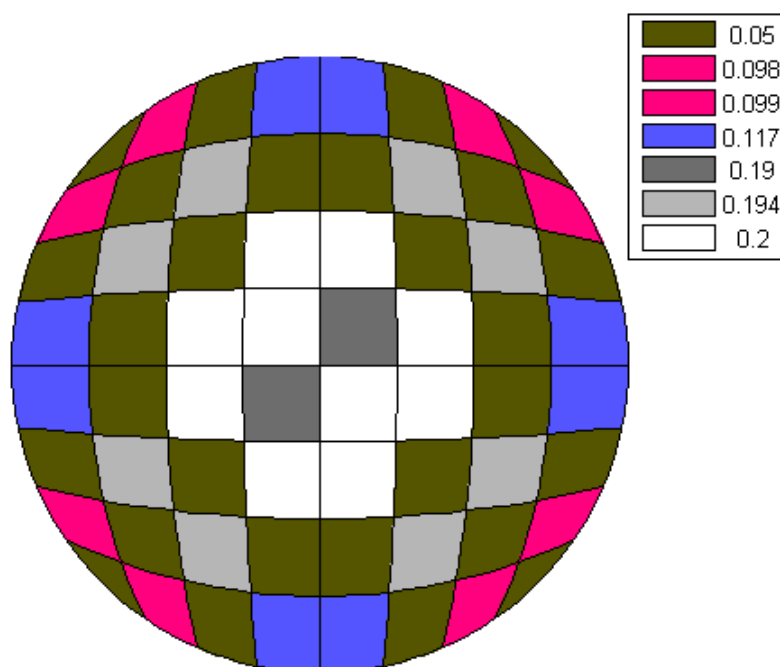


Figura 12: Distribuição das espessuras dos elementos após processo de otimização (espessuras em metros).
Fonte: Autor.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Dados os resultados obtidos da análise estática, verificou-se a convergência dos resultados do deslocamento máximo para o valor exato definido em literatura, sendo assim, em observação com os deslocamentos apresentados em figuras, percebe-se que o método é válido. Além disso, dos exemplos apresentados percebe-se que com apenas 64 elementos o erro é em geral, menor do que 3%.

A respeito do processo de otimização, percebe-se que mesmo para problemas com quatro eixos de simetria, os resultados da distribuição de espessuras ao longo da placa não são tão simétricos como esperado, vide os exemplos dados onde obteve-se apenas dois eixos de

simetria. Isso indica possíveis mínimos locais, para os quais necessita-se desenvolver outras restrições para vencê-los. Um exemplo de possível solução é o agrupamento de elementos de mesma espessura, o que também reduziria o tempo o custo computacional. Fica como trabalho a busca por maneiras de contornar esse problema.

REFERENCIAS

- Alves, E. C., 2016. Optimization of structures subjected to dynamic load: deterministic and probabilistic methods. *REM - International Engineering Journal*, vol. 69, n.3, pp. 281 – 286.
- Alves, E. C., & Vaz, L. E., 2013. Optimum design of plates structures under random loadings. *REM - International Engineering Journal*, vol. 66, n.1, pp. 41 – 47.
- Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y., 2009. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons.
- Espath, L. F. R., 2009. *Otimização de forma estrutural de cascas via deformação livre de forma baseado em NURBS*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Gomes, H., & Golçalves, E., 2017. Comparação entre o método de análise isogeométrica e o método dos elementos finitos. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 18, n. 1, pp. 85 – 103.
- Gomes Filho, H., 2016. *Método dos elementos finitos através da análise isogeométrica: uma introdução*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo.
- Hrabok, M. M., & Hradey, T. M., 1984. A review and catalogue of plate bending finite elements. *Computers & structures*, v.19, n. 3, pp. 479 – 495.
- Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 39, pp. 4135 – 4195.
- Kiendl, J. et al., 2010. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-love shell structures comprised of multiple patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 37, pp. 2403 – 2416.
- Kiendl, J. et al., 2009. Isogeometric shell analysis with kirchhoff-love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 49, pp. 3902 – 3914.
- Logan, D. L., 2011. *A first course in the finite element method*. Cengage.
- Meira, S. A. F., 2000. *Optimization of shell structures under dynamic loads*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Pielg, L., & Tiller, W., 1996. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media.
- Rocha, I. B. C. M., 2013. *Análise e otimização de cascas laminadas considerando não linearidade geométrica e falha progressiva*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará.
- Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of plates and shells*. McGraw-hill.