



ANÁLISE DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO TRANSIENTE ATRAVÉS DO MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Daniela Silva Santurio

José Cláudio de Faria Telles

danielassanturio@gmail.com

tells@coc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil, COPPE, UFRJ
Caixa Postal 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

José Antônio Fontes Santiago

santiago@coc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil, COPPE, UFRJ
Caixa Postal 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Abstract. *Este trabalho apresenta estratégias e aplicações do método de soluções fundamentais (MFS) para equações de difusão. Soluções fundamentais transientes desenvolvidas para as equações de difusão foram diretamente aplicadas ao problema afim de se obter a resposta numérica através da combinação linear das soluções fundamentais no operador de difusão. O esquema proposto não faz uso de nenhuma das técnicas convencionalmente usadas para tratar a derivada no tempo existente na equação que rege o fenômeno, ou seja, a nova proposta é livre de técnicas como a transformada de Laplace ou diferenças finitas. Ao posicionar corretamente os pontos de campo e os pontos fonte em um certo nível de tempo, a solução avança no tempo até que as soluções de estado estacionário sejam atingidas. Foram propostos aqui dois modelos de posicionamento dos pontos fontes (fontes fixas e fontes móveis) e através de exemplos numéricos foram estudados a influencia deste posicionamento no condicionamento e na precisão dos resultados calculados para o problema. Ao analisar as respostas obtidas ao se comparar os modelos apresentados com as soluções analíticas, pôde-se constatar que o método proposto demonstra ser uma promissora metodologia sem malha quando aplicada a problemas de difusão.*

Keywords: *Método das Soluções Fundamentais, Métodos sem Malha, Equação da Difusão, Difusão Transiente*

1. INTRODUÇÃO

Recentemente, os Métodos Sem Malha ou Métodos Meshless vêm recebendo considerável atenção em relação aos métodos numéricos clássicos, isto se deve, principalmente, a sua fácil discretização espacial, que se contrapõe a dificuldade comum a todos os métodos malha rígida, que é a obtenção de uma malha adequada e o grande esforço computacional despendido na geração da mesma. Uma breve pesquisa sobre os Métodos Meshless revela as mais variadas abordagens decorrentes de diversas origens matemáticas, tornando-os utilizáveis em uma ampla gama de aplicações.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido apresentado como uma boa alternativa para redução de malha. Na formulação clássica (Brebbia et al., 1984; Brebbia & Domingues, 1989), o MEC baseia-se em uma equação integral que envolve incógnitas apenas do contorno, gerando assim, sistemas de equações com um menor número de graus de liberdade e, portanto, requer um menor tempo computacional, dando maior estabilidade numérica às soluções. Todavia, o MEC quando aplicado à equação da difusão além de exigir o tratamento tanto da derivada temporal, através da transformada de Laplace (Zhu SP., 1998; Zhu SP. et al., 1998; Sutradhar et al., 2002) ou diferenças finitas (Bulgakov et al., 1998), exige também um tratamento especial da equação se esta não for homogênea, fazendo uso por exemplo do Método da Reciprocidade Dual (Nardini & Brebbia, 1982). Entretanto, o maior problema enfrentado pelo MEC é a determinação das integrais singulares no contorno, as quais demandam grande esforço computacional.

Através da utilização do Método das Soluções Fundamentais tais problemas podem ser aliviados, isto porque, por ser um método de contorno indireto ele não faz uso de integração numérica em geral, e em particular evita a singularidade da solução fundamental do problema. A ideia principal do MSF consiste em aproximar a solução do problema através da combinação linear de soluções fundamentais geradas através aplicação de um impulso em pontos fonte que avaliados nos pontos campo existentes no contorno. Então, para um problema em que a solução fundamental é conhecida, a resposta numérica pode ser obtida primeiramente para pontos no contorno e posteriormente para pontos no domínio com a utilização do Método das Soluções Fundamentais.

Para problemas de difusão dinâmico Walker (1992) utilizou o MFS em problemas bidimensionais com soluções fundamentais integradas no tempo, posteriormente Chen et al. (1998), Balakrishnan & Ramachandran (2000) expandiram a aplicação do MSF utilizando a solução fundamental de Helmholtz Modificada. Grande parte dos trabalhos fazem uso da transformada de Laplace ou através de diferenças finitas para tratar a derivada temporal e obter respostas evolutivas no tempo, mas, recentemente novas técnicas para tratar a equação diferencial representante do problema vêm sendo desenvolvidas. Young (2004), Young & Fan (2004), Reeve & Johansson (2013) utilizam diretamente as soluções fundamentais transientes e evitam quaisquer tipo de integração apenas posicionando adequadamente as fontes tanto no domínio do tempo quanto no espaço.

O presente trabalho também não faz uso se nenhuma técnica de integração temporal e possui como objetivo apresentar novas alternativas acerca do posicionamento dos pontos fonte a fim de aprimorar o uso do Método das Soluções Fundamentais em problemas transientes. Como todo processo de difusão é evolutivo no tempo, a partir das condições iniciais do problema os termos transientes do modelo podem ser calculados através dos resultados gerados pelo MSF em vários passos de tempo. Várias formas e problemas foram considerados e para averiguar a precisão dos resultados respostas analíticas foram consideradas.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: equações governantes e condições de contorno são descritas na Seção 2; a formulação do Método das Soluções Fundamentais aplicado ao problema da difusão é apresentado na Seção 3; exemplos numéricos e suas avaliações na Seção 4 e na Seção 5 estão as conclusões baseadas no trabalho desenvolvido.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

Dado um domínio $\Omega(\mathbf{X})$ e um contorno $\Gamma(\mathbf{X}) = \Gamma_u(\mathbf{X}) + \Gamma_q(\mathbf{X})$, a equação da difusão transiente é dada por:

$$\frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = k \nabla^2 U(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Omega(\mathbf{X}) \quad (1)$$

onde $\mathbf{X}$ representa as coordenadas espaciais, t é tempo, k a difusividade térmica, U é o potencial em análise e ∇^2 é operador Laplaciano de derivadas parciais.

A condição inicial do problema é representada por:

$$U(\mathbf{X}, 0) = \bar{U}(\mathbf{X}, 0) = U_0 \text{ em } \Omega(\mathbf{X}) \quad (2)$$

Duas condições de contorno podem ser prescritas. A condição de Dirichlet para o potencial U :

$$U(\mathbf{X}, t) = \bar{U}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Gamma_u(\mathbf{X}) \quad (3)$$

e a condição de Neumann para o fluxo:

$$\frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial n} = \bar{Q}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Gamma_q(\mathbf{X}) \quad (4)$$

onde $\Gamma_u(\mathbf{X})$ e $\Gamma_q(\mathbf{X})$ são as partes do domínio em que estão prescritas as condições de Dirichlet e Neumann respectivamente, n é a normal relacionada ao contorno $\Gamma_q(\mathbf{X})$ e U_0 , $\bar{U}(\mathbf{X}, t)$ e $\bar{Q}(\mathbf{X}, t)$ são funções prescritas.

3. MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

As soluções fundamentais para a equação da difusão são funções de Green que descrevem o campo de potencial gerado através de uma fonte unitária aplicada no ponto ξ e no tempo t :

$$U^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) = \frac{1}{(4\pi\alpha\tau)^{d/2}} \exp\left[\frac{-r^2(\mathbf{X}, \xi)}{4\alpha\tau}\right] H(\tau) \quad (5)$$

$$Q^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) = \frac{-r(\mathbf{X}, \xi) \frac{\partial r(\mathbf{X}, \xi)}{\partial n}}{8\pi\alpha\tau^2} \exp\left[\frac{-r^2(\mathbf{X}, \xi)}{4\alpha\tau}\right] \quad (6)$$

onde $\mathbf{X}$ é a coordenada do ponto campo, ξ é a coordenada do ponto fonte, t_F é o tempo do ponto campo, t o tempo de aplicação do impulso no ponto fonte, $\tau = t_F - t$, d é a dimensão do modelo, $r(\mathbf{X}, \xi)$ é o raio medido entre o ponto fonte e o ponto campo em questão, $\frac{\partial r(\mathbf{X}, \xi)}{\partial n}$ é projeção do raio sobre a normal do contorno e $H(\tau)$ é a função de Heaviside. Destaca-se que a função de Heaviside foi incluída para enfatizar o fato de que a solução fundamental é zero se $t > t_F$.

De acordo com o método das soluções fundamentais, a solução geral do problema pode ser considerada como a combinação linear das soluções fundamentais do operador da difusão e terão a seguinte forma:

$$U(\mathbf{X}, t_F) = \sum_{j=1}^{N_i+N_b} \alpha_j U^*(\mathbf{X}, t_F; \xi_j, t_j) \quad (7)$$

$$Q(\mathbf{X}, t_F) = \sum_{j=1}^{N_i+N_b} \alpha_j Q^*(\mathbf{X}, t_F; \xi_j, t_j) \quad (8)$$

sabe-se que N_i é o número de fontes iniciais (existentes apenas no domínio) e N_b é o número de fontes no contorno e α_j são os coeficientes a serem determinados que representam a intensidade das fontes aplicadas.

A fim de se determinar as intensidades das fontes o sistema linear abaixo deve ser resolvido:

$$[A_{ij}]\{\alpha_j\} = \{b_i\} \quad (9)$$

onde A_{ij} é a matriz que contém as soluções fundamentais para os pontos escolhidos e b_i é o vetor que contém as condições iniciais e as condições de contorno prescritas.

Considerando prescrito apenas condições de Dirichlet:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi\alpha(t_F - t))^{d/2}} \exp\left[\frac{-r^2(\mathbf{X}, \xi)}{4\alpha(t_F - t)}\right] H(t_F - t), & \text{para } t_{Fi} > t_j \\ 0, & \text{para } t_{Fi} < t_j \end{cases} \quad (10)$$

$$b_i = \begin{cases} \bar{U}(\mathbf{X}, 0) \\ \bar{U}(\mathbf{X}, t) \end{cases} \quad (11)$$

Para a montagem da matriz $\mathbf{A}$ é necessário realizar a escolha adequada do posicionamento temporal e geométrico dos pontos fonte e, além disso, observou-se que a matriz é quase-singular. A singularidade da matriz foi abordada através da utilização técnica de Tikhonov:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (12)$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro de regularização cujos valores geralmente variam entre 10^{-14} e 10^{-1} e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Regularizada a matriz, com a solução do sistema linear descrito na Eq.(12) para cada passo de tempo torna-se possível o cálculo do potencial em todos os pontos internos através da Eq.(7) até que a solução estática seja alcançada.

3.1. Posicionamento das fontes

Através das Eq. (10) e Eq. (11) nota-se que tanto a dimensão da matriz quanto a do vetor depende do número de pontos campo e pontos fonte escolhidos em cada passo de tempo. Entretanto, deve-se saber que cada passo de tempo é dividido em passos intermediários de tempo onde, primeiramente determinam-se os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ para os pontos em que as condições iniciais são prescritas e depois os pontos onde as condições de contorno são conhecidas.

A escolha da posição tanto geométrica quanto temporal dos pontos fonte está diretamente relacionada com a precisão do MSF. Em relação à posição geométrica das fontes optou-se, por simplicidade, analisar somente um esquema de discretização: pontos fonte com posição coincidente com a posição dos pontos campo. Já em relação à coordenada temporal destas fontes seriam testadas duas formas de distribuição: pontos fonte fixos no início do problema e pontos de coordenadas temporais variantes (fontes móveis).

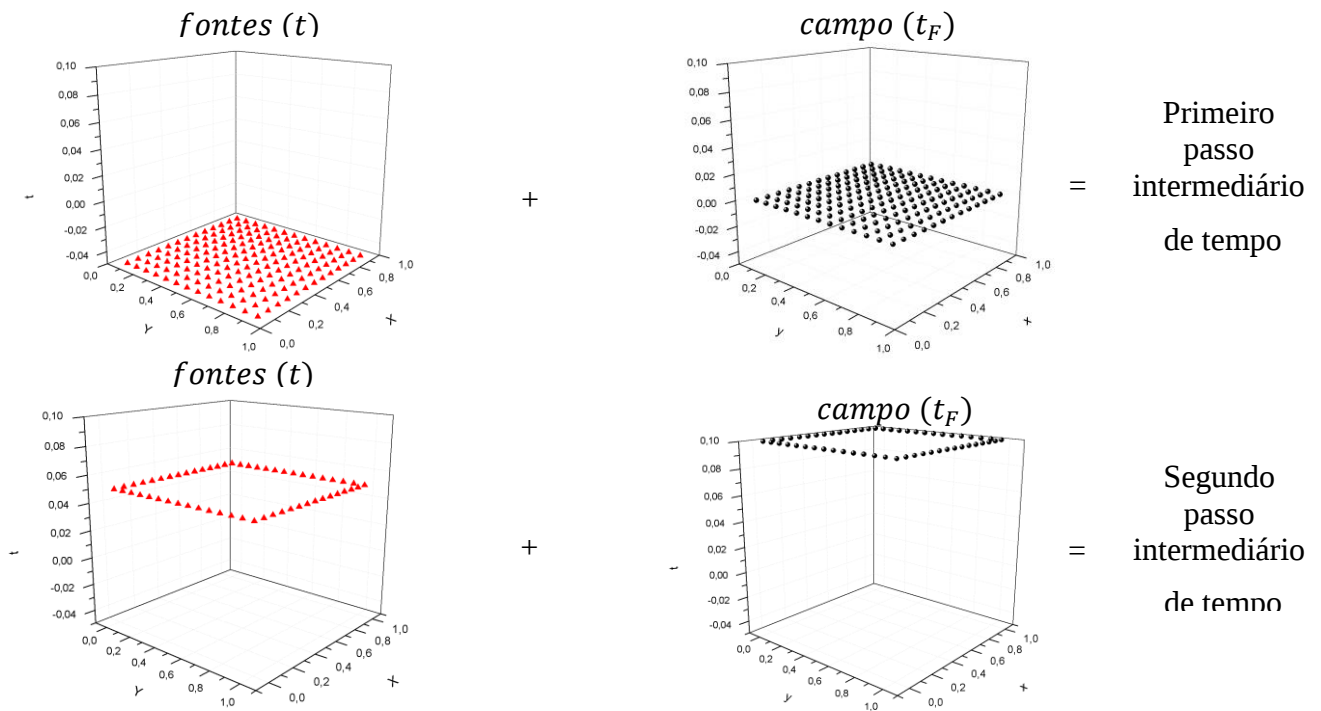


Figura 1: Divisão passo de tempo para montagem da matriz A

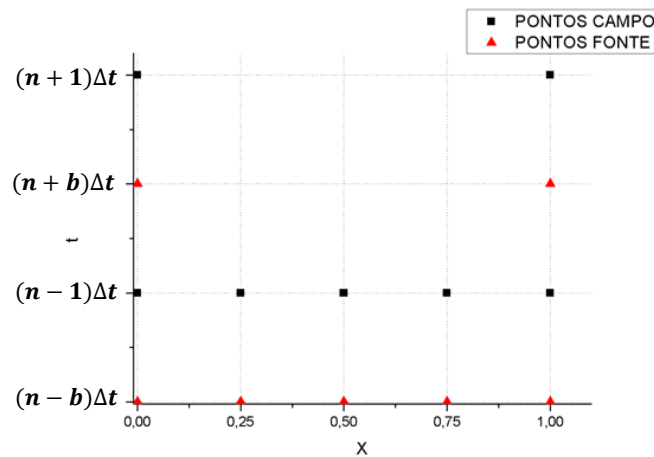


Figura 2: Nuvem de pontos unidimensional ilustrando os pontos fontes variando no tempo com coordenadas geométricas iguais as coordenadas do campo

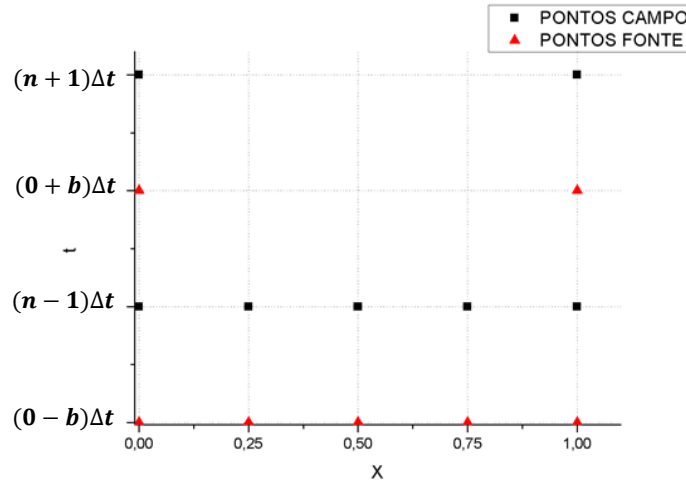


Figura 3: Nuvem de pontos unidimensional ilustrando os pontos fontes fixos no tempo com coordenadas geométricas iguais as coordenadas do campo

Pode-se notar pelas figuras acima (Fig. 2 e Fig. 3) que para a resolução do problema transiente é necessário a determinação das coordenadas temporais intermediárias geradas pelo coeficiente b . No caso de fontes variando com o tempo, dado o passo de tempo n os pontos fontes localizam-se em $(n - b)\Delta t$ no domínio e em $(n + b)\Delta t$ no domínio, já no caso em que as fontes estão fixas em uma coordenada inicial no tempo essas se localizam em $(0 - b)\Delta t$ no domínio e em $(0 + b)\Delta t$ no contorno.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

A fim de explorar a potencialidade das metodologias desenvolvidas e compará-las entre si e com soluções analíticas três exemplos numéricos foram testados. Como forma de avaliar os fatores que influenciam na precisão de ambas as metodologias vários incrementos de tempo, numero de nós e coeficientes para os passos intermediários foram testados. Além disso, para todos os exemplos testados fez-se presente a necessidade de se utilizar técnicas e regularização de matrizes, empregou-se, assim, a técnica de Tikhonov com o parâmetro $\lambda = 10^{-8}$ em todas as aplicações.

4.1. Placa submetida a carregamento senoidal

Seja uma placa quadrada de dimensão 1m x 1m modelada através de uma nuvem de pontos de 225 nós, com o coeficiente intermediário $b = 0.5$ (adotado tanto para o MSF com fontes fixas quanto para o MSF com fontes móveis) sujeita as seguintes condições:

$$U(x, y, 0) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi y) \quad (13.a)$$

$$\begin{aligned}
U(0, y, t) &= [\text{sen}(\pi y)]e^{-k\pi^2 t} \\
U(1, y, t) &= [\text{sen}(\pi y)]e^{-k\pi^2 t} \\
U(x, 0, t) &= [\text{sen}(\pi x)]e^{-k\pi^2 t} \\
U(x, 1, t) &= [\text{sen}(\pi x)]e^{-k\pi^2 t}
\end{aligned} \tag{13.b}$$

A solução analítica é dada por:

$$U(x, y, t) = [\text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi y)]e^{-k\pi^2 t} \tag{13.c}$$

onde foi adotado o coeficiente de difusividade k foi adotado igual a $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$.

Os resultados de potencial no ponto A de coordenadas (0,5;0,5) para ambos os métodos em consideração (MSF com fontes fixas e MSF com fontes fixas) levando em consideração diferentes incrementos de tempo propostos pode ser visto na Fig. (4). Percebe-se que, para o problema considerado, a variação no incremento de tempo não gerou significativa alteração nas respostas quando analisada para um tempo total de 3s. Para os quatro Δt s estudados nota-se uma proximidade relevante em relação a resposta analítica e, em ambos os casos, percebe-se uma dificuldade de distinção entre as respostas, o que mostra uma excelente precisão dos métodos propostos.

Na análise do erro absoluto entre os métodos e a resposta analítica observa-se pela Fig.(5.a) que para fontes fixas quando há o decrescimento do incremento de tempo melhor a precisão da resposta calculada. Em contrapartida, para o caso de fontes móveis na Fig.(5.b), percebe-se que o melhor comportamento para o erro acontece quando $\Delta t = 0.16\text{s}$. Para ambas as fontes, a precisão quando relacionada apenas aos incrementos de tempo não sofre significativo aumento quando há decrescimento do tempo, mas a existência de um Δt ideal para o caso estudado fica clara. Em compensação, a precisão sofre considerável alteração quando os métodos são comparados entre si, para fontes fixas no início do problema o erro gerado para quaisquer incremento de tempo utilizado é sensivelmente menor quando relacionado a fontes móveis.

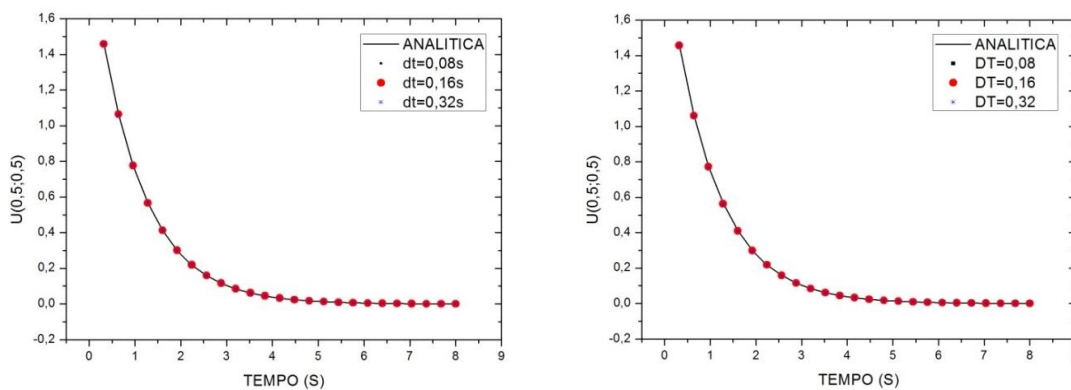


Figura 4: Resultados do potencial para o ponto A(0,5;0,5) em relação à diferentes incrementos de tempo para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

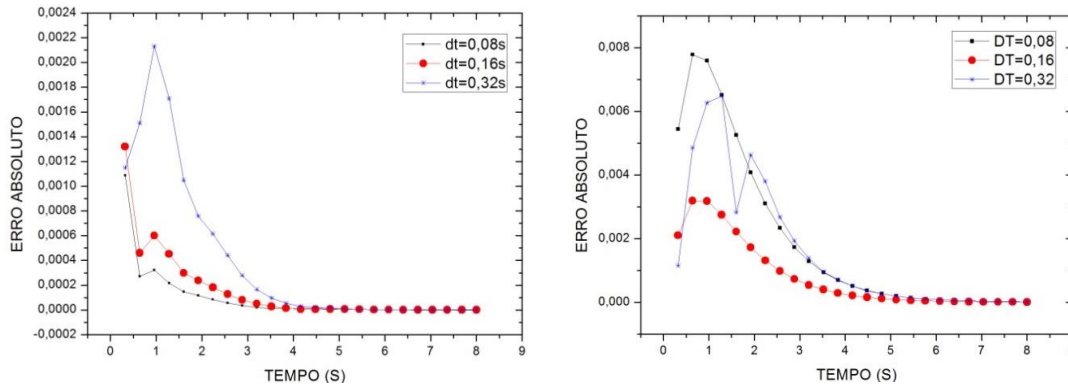


Figura 5: Erro absoluto do potencial para o ponto A(0,5;0,5) em relação à diferentes incrementos de tempo para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

Outra forma de análise dos resultados é conhecer o desenvolvimento dos potenciais ao longo de uma linha horizontal de pontos em diferentes passos de tempo até que a solução do problema estático seja atingida.

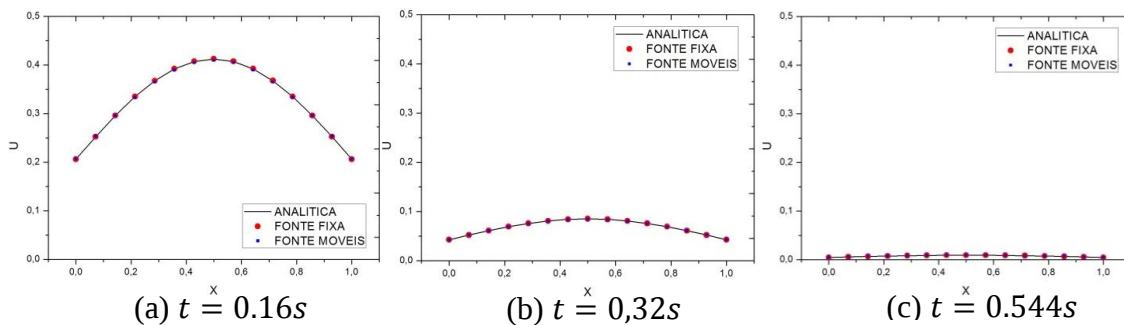


Figura 6: Desenvolvimento do potencial para uma linha de pontos localizados ($x, y = 0.5m$) para (a) $t = 0.16s$; (b) $t = 0.32s$ e (c) $t = 0.544s$

O potencial para os dois modelos de fontes e em todos os pontos da malha no para o tempo com valor de $t = 0.32s$ são apresentadas na Fig.(7). Nota-se que a solução calculada apresenta comportamento condizente com o esperado para o problema, como a equação da difusão é uma equação parabólica sabe-se que a solução será também uma variação do tipo parabólica.

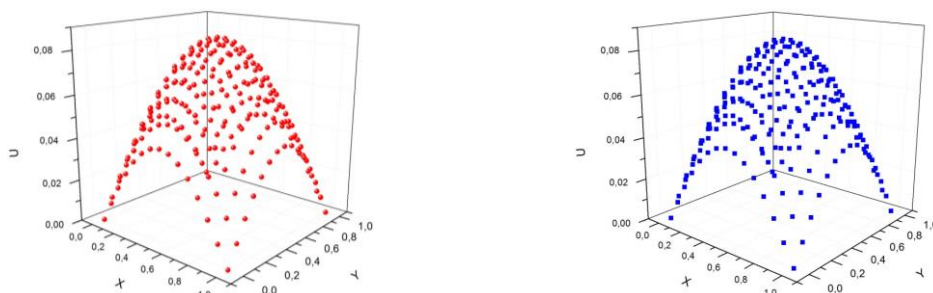


Figura 7: Potencial em todos os nós da malha no tempo $t = 0.32s$ para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

4.2. Placa submetida a carregamento variável

Seja uma placa quadrada de dimensão 1m x 1m modelada através de 3 nuvens de diferentes de pontos (MALHA A: 121 nós, MALHA B: 225 nós, MALHA C: 441 nós) com diferentes coeficientes intermediário $b = 0.4, 0.5$ e 0.6 e $\Delta t = 0.01s$ (adotado tanto para o MSF com fontes fixas quanto para o MSF com fontes móveis) sujeita as seguintes condições:

$$U(x, y, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (14.a)$$

$$\begin{aligned} U(0, y, t) &= [1 + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}} \\ U(1, y, t) &= [\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + 1 + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}} \\ U(x, 0, t) &= [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}} \\ U(x, 1, t) &= [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}} \end{aligned} \quad (14.b)$$

A solução analítica é dada por:

$$U(x, y, t) = [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}} \quad (14.c)$$

onde o coeficiente de difusão adotado foi $k = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$.

Na Fig.(8) realizou-se o estudo de diferentes passos intermediários de tempo para os casos de fontes fixas e fontes móveis e, para ambos os métodos observou-se que o b que melhor se adequa ao problema estudado é aquele de valor 0.6. Isto se deve ao fato de que quando as fontes ficam mais distantes dos pontos campo, estas não geram excessivas perturbações na resposta.

Quando se relaciona a solução fundamental para distâncias fixas com tempos variáveis percebe-se que nos instantes iniciais da solução existe um pico no seu valor, logo, o fato da precisão aumentar com aumento de b parece adequado (ponto campo em tempo mais distante capta menor perturbação).

Além disso, o fato da solução fundamental apresentar tal pico para tempos iniciais levou a observação de que, com a diminuição do valor de b a matriz calculada para o problema se torna cada vez mais singular, necessitando de técnicas de regularização mais rígidas.

Já na Fig.(9) pode-se observar a relação entre o erro e a discretização espacial adotada também para o caso de fontes fixas e de fontes móveis. Pode-se perceber que para o problema estudado o numero de nós existentes na malha não exerce grande influência quando relacionado à precisão.

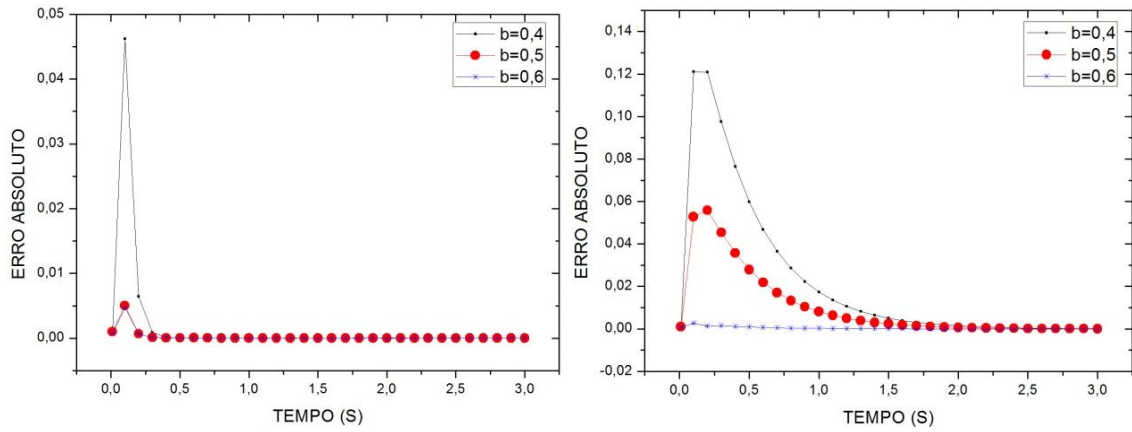


Figura 8: Erro absoluto para MALHA 2 com $b = 4.0; 0.5$ e 0.6 e $\Delta t = 0.01s$ para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

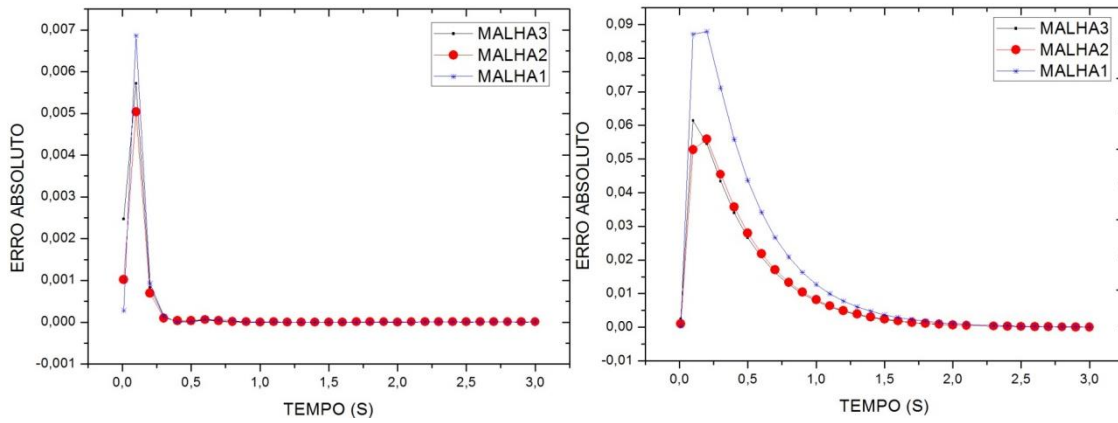


Figura 9: Erro absoluto para MALHA 1, 2 e 3 com $b = 0.5$ e $\Delta t = 0.01s$ para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

4.3. Choques térmicos sucessivos

Uma região circular de raio unitário inicialmente a $0^\circ C$ é submetida a dois choques térmicos, em todo seu contorno nos instantes t_0 e t_1 como representado por:

$$U(x, y, 0) = 0^\circ C \text{ em } \Omega \quad (15.a)$$

$$U(x, y, t) = 50^\circ C \text{ para } 0 < t < t_0 \text{ em } \Gamma \quad (15.b)$$

$$U(x, y, t) = 100^\circ C \text{ para } t_0 < t < t_1 \text{ em } \Gamma$$

Foram considerados dois problemas diferentes de acordo com o tempo de acontecimento do choque térmico, mas, para ambos utilizou-se fontes fixas e fontes

móveis, $\Delta t = 0.05s$, nuvem de pontos de 189 nós e o passo intermediário de tempo variando de acordo com $b = 0.4$, $b = 0.5$ e $b = 0.6$.

4.3.1. Problema A : $t_0 = 0s$ e $t_1 = 0,5s$

Na figura (10.a) pode-se observar a variação da resposta no ponto A(0;0,8) em relação ao tempo total para vários passos intermediários b utilizando o MSF com fontes fixas e, na Fig; (10.b), o mesmo gráfico foi gerado mas para o MSF com fontes móveis. Em ambos os gráficos nota-se que todos os passos b foram capazes de captar o choque térmico ocorrido durante o problema.

Mais uma vez fica evidente que, para fontes fixas a viração de b não gera grandes alterações na resposta enquanto ao observar as fontes móveis percebe-se que, para o problema tratado, este método é relativamente sensível a escolha de b .

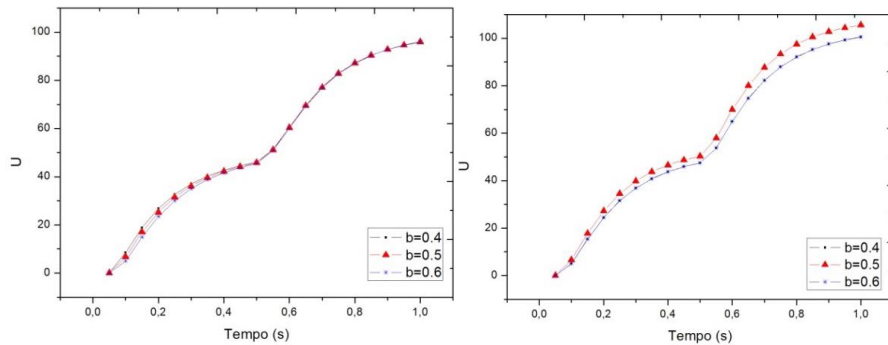


Figura 10: Potencial para o ponto A ao longo do tempo para a variação de b utilizando (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

Na figura (11) realizou-se a comparação entre o MSF com fontes fixas e o MSF com fontes móveis para $b = 0.5$ para o ponto A. Percebe-se que ambos estão condizentes com o choque ocorrido no tempo de 0,5s mas com o decorrer do tempo a resposta obtida com fontes fixas parece ser mais estável que para as fontes móveis, assim fica claro observar como as repostas divergem com passar do problema.

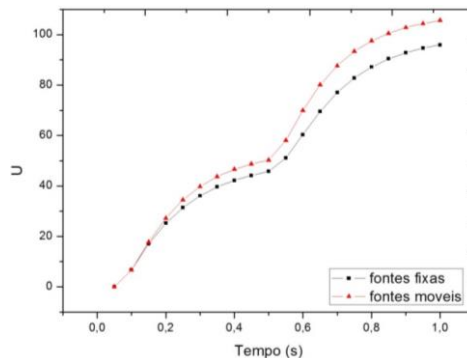


Figura 11: Relação entre a temperatura ao longo do tempo para fontes fixas e móveis no ponto A

4.3.2. Problema B: $t_0 = 0s$ e $t_1 = 1,0s$

Para o ponto B(0;0) estudado neste problema é evidente a diferença quando relaciona-se as fontes fixas e fonte móveis b . No primeiro caso as diferenças na resposta de temperatura são mínimas, enquanto para o segundo caso existe uma considerável diferença nas soluções obtidas. Ainda, similarmente ao problema A, percebe-se as repostas divergem com passar do problema.

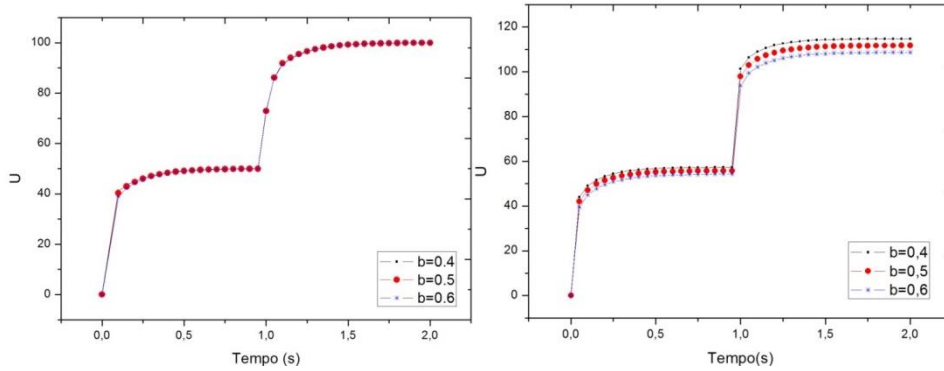


Figura 12: Potencial para o ponto B ao longo do tempo para a variação de b utilizando (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

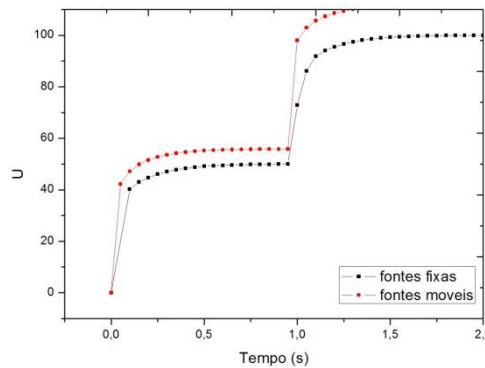


Figura 13: Relação entre a temperatura ao longo do tempo para fontes fixas e móveis no ponto B

5. CONCLUSÕES

A utilização da transformada de Laplace ou o esquema de diferenças finitas são as maneiras mais comuns de se tratar as derivadas temporais existentes na equação da difusão, entretanto a formulação apresentada neste trabalho não requer nenhum dos dois procedimentos. Para que o método pudesse ter sido aplicado diretamente ao modelo, fez-se necessário que a variável independente tempo fosse tratada como um dos

domínios de solução das soluções fundamentais, gerando assim, uma solução com espaço-tempo unificado.

Posicionando corretamente os pontos fonte e os pontos campo do modelo a solução numérica pode ser obtida para cada passo de tempo. Dois modelos de posicionamento temporal destes termos foram considerados: um modelo utilizando fontes fixas no início do tempo proposto e outro modelo com fontes que mudam de coordenadas temporais juntamente com os pontos campos.

Os métodos desenvolvidos possuem uma formulação que se revelou eficiente na solução dos diversos problemas de potencial tratados, não obstante as suas limitações, percebeu-se que o método possui nível de precisão controlável, versatilidade, ganho computacional e fácil implementação.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balakrishnan K, Ramachandran Pa., (2000) The Method Of Fundamental Solutions For Linear Diffusion-Reaction Equations. *Math Comput Model*; 31(2/3):221–37.

Brebbia, C. A. & Dominguez, J., (1989). *Boundary Elements An Introductory Course*, Computacional Mechanics Publications, Southampton, Mcgraw-Hill Book Company.
Brebbia, C.A. & Ferrante, A. J., (1986). *Computational Methods For The Solution Of Engineering Problems*, Pentech Press.

Brebbia, C.A., Telles J. C. F. & Wrobel L. C., (1984). *Boundary Elements Techniques – Theory And Applications In Engineering*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg-New Yorktokyo.

Bulgakov V, Sarler B, Kuhn G., (1998). Iterative Solution Of Systems Of Equations In The Dual Reciprocity Boundary Element Method For The Diffusion Equation. *International Journal For Numerical Methods In Engeering*, Vol.43, Pp-713–32.

Chen Cs, Golberg Ma, Hon Yc., (1998). The Method Of Fundamental Solutions And Quasi-Monte-Carlo Method For Diffusion Equations. *Int J Numer Meth Eng* 43:1421–35.

Nardini, D. & Brebbia, C. A., (1982). A New Approach For Free Vibration Analysis Using Boundary Elements, *Boundary Element Methods In Engineering*, (Ed C. A. Brebbia), Pp 312-326, Springer-Verlag, Berlin And New York.

Reeve, T., & Johansson, B. T. (2013). The Method Of Fundamental Solutions For A Time-Dependent Two-Dimensional Cauchy Heat Conduction Problem. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 37(3), 569-578.

Sutradhar A, Paulino Gh, Gray Lj., (2002) Transient Heat Conduction In Homogeneous And Non-Homogeneous Materials By The Laplace Transform Galerkin Boundary Element Method. *Eng Anal Bound Elem*, Vol.26:119–32.

Walker Sp., (1992). Diffusion Problems Using Transient Discrete Source Superposition. *Int J Numer Meth Eng*;35:165–78.

Young, D. L. , Tsai C. C., Murugesan K., Fan C. M., And Chen C. W., (2004). Time-Dependent Fundamental Solutions For Homogeneous Diffusion Problems. *Eng. Anal. Boundary Elements*, 28:1463–1473.

Young, D. L., Tsai, C. C., & Fan, C. M. (2004). Direct Approach To Solve Nonhomogeneous Diffusion Problems Using Fundamental Solutions And Dual Reciprocity Methods. *Journal Of The Chinese Institute Of Engineers*, 27(4), 597-609.

Zhu Sp., (1998). Solving Transient Diffusion Problems: Time-Dependent Fundamental Solution Approaches Versus Ltrdm Approaches. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, Vol.21,Pp 87–90.

Zhu Sp, Liu Hw, Lu Xp., (1998) A Combination Of Ltrdm And Atps In Solving Diffusion Problems. *Engineering Analysis Wich Boundary Elements*, Vol.21, Pp 285–9.