



INFLUÊNCIA DE CARGAS AXIAIS CENTRÍFUGAS SOBRE AS FREQUÊNCIAS NATURAIS EM PÁS DE TURBINA EÓLICA

Fernanda Almeida Leite de Oliveira

Marcus Vinicius Girão de Moraes

Maura Angélica Milfont Shzu

fernandaleite.unb@gmail.com

mvmoraes@unb.br

maura@unb.br

Universidade de Brasília – Faculdade do Gama

Área Especial de Indústria Projeção A, 72.444-240, DF, Gama, Brasil

Resumo. *Este trabalho estuda o comportamento das frequências naturais de uma pá de turbina eólica considerando os efeitos de rotação. Inicialmente, estuda-se o modelo de viga engastada livre sob a ação da força centrífuga decorrente da rotação. Obtiveram-se resultados analíticos aproximados através do método de Galerkin e resultados numéricos via MEF através do ANSYS®. Os resultados obtidos foram comparados com um exemplo da literatura. Finalmente, aplicou-se a mesma metodologia para uma pá de turbina eólica. Devido a força centrífuga, as frequências naturais aumentam com a velocidade de rotação do rotor Ω . Portanto, no diagrama de Campbell não se observa velocidade crítica na primeira frequência natural para a curva de excitação 1Ω .*

Palavras-chave: *Método de Galerkin, MEF, Turbina Eólica, Força Centrífuga.*

1 INTRODUÇÃO

O rotor de turbinas eólicas pode ser visto como máquinas rotativas. Durante sua operação, as pás eólicas estão sujeitas a forças centrífugas e ao peso próprio que perturbam as frequências naturais da estrutura (Ramakrishnan & Feeny, 2011).

Ishida Inoue e Nakamura (2009) escrevem o comportamento de uma pá rotativa por um sistema equivalente de 1 grau de liberdade (1Gdl) evidenciando a ação das forças centrífugas e do peso próprio na dinâmica de rotores eólicos. Neste trabalho analítico, numérico e experimental, evidencia-se a relação um o comportamento dinâmico do tipo oscilador paramétrico, ou seja, um problema não linear do tipo Hill-Mathieu.

A massa possui influência nos valores de frequências naturais da estrutura em função da sua posição. Dependendo do posicionamento dos elementos da turbina, o peso próprio ora resulta em forças de tração, ora em forças de compressão. Uma avaliação simplificada da influência do peso próprio é descrita em Oliveira et al (2014).

Em outro enfoque, soluções analítico-aproximadas baseadas em métodos de modos assumidos (por exemplo, métodos de Ritz, Rayleigh-Ritz e Resíduos Ponderados) são amplamente utilizadas na literatura devido a complexidade geométrica do problema de pás eólicas. Estas avaliações simplificadas visam validar a metodologia de solução em plataformas computacionais complexas. No presente caso, a modelagem de pás eólicas assemelha-se ao comportamento dinâmico de pás de helicópteros descritas por vigas engastadas submetidas a forças centrífugas. Esta descrição lagrangeana de pás rotativas está presente em diversos trabalhos na literatura (Hoa, 1979) (Hodges & Rutkowski, 1981) (Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982).

Os métodos de modos assumidos agregam uma ampla gama de métodos aproximados (Finlayson, 1972). Do ponto de vista variacional, temos os métodos de Ritz e o método de Rayleigh-Ritz. Estes métodos variacionais buscam minimizar a energia total do sistema mecânico. Do ponto de vista dos resíduos ponderados, temos os métodos de Colocação, Galerkin, e Mínimos Quadrados. Estes métodos são caracterizados por minimizar o resíduo do equilíbrio de forças por meio de média ponderada.

O presente trabalho estuda o comportamento dinâmico de pás rotativas submetidas a forças centrífugas. Soluções analítico-aproximadas pelo método de Galerkin foram desenvolvidas e comparadas com a literatura e o software ANSYS®. Para tanto, determina-se a evolução das frequências naturais de uma viga engastada de seção retangular constante para uma faixa de velocidades de rotação. Os resultados analítico-aproximados e numérico ANSYS® da viga rotativa são comparados com relação ao trabalho de Wright, Smith, Thresher & Wang (1982). Eles utilizam o método variacional de Rayleigh-Ritz avaliando diferentes tamanhos de hub e a influência de massas concentradas na extremidade livre da viga. Uma vez validada a metodologia de aplicação, estuda-se a evolução das frequências naturais de uma pá eólica para uma faixa de velocidade de rotação usual em aerogeradores. Os resultados obtidos no ANSYS® da pá eólica são comparados ao trabalho de Araújo, Morais, Avila & Shzu (2014).

2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A pá de um aerogerador possui geometria complexa, cujas seções variam ao longo de seu comprimento. Tal característica onera a análise numérica computacional e dificulta o estudo analítico de seu comportamento. Desta forma, optou-se por simplificar o sistema em um modelo de viga engastada-livre rotativa (Figura 1).

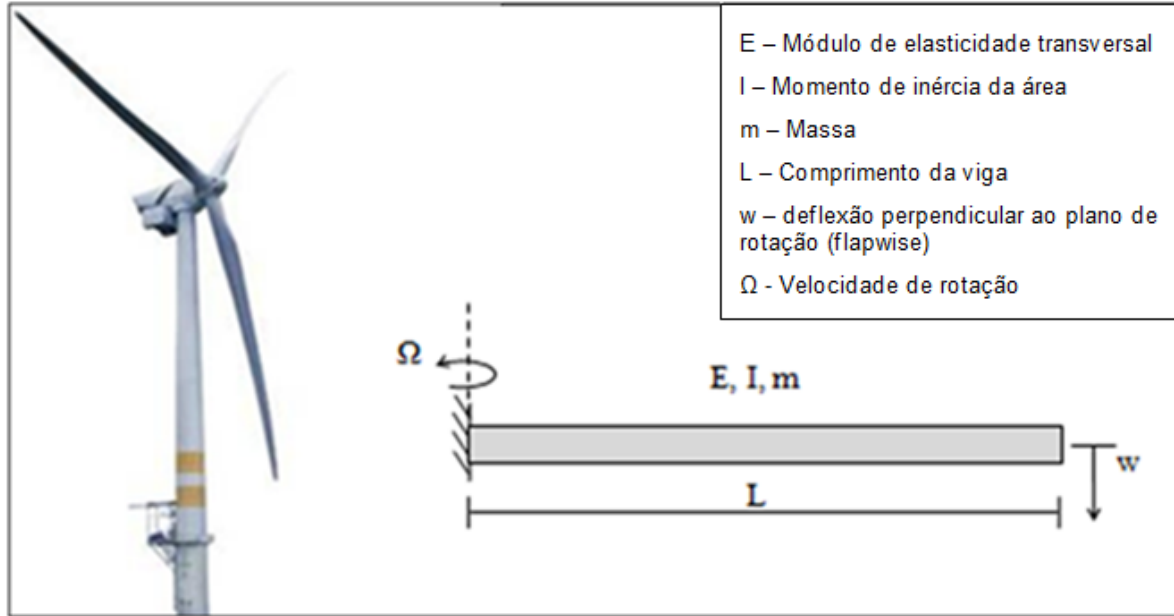


Figura 1 – Turbina eólica e representação da pá por uma viga engastada

A força centrífuga é uma função dada pela Eq. (1):

$$F_c = \frac{\rho A \Omega^2}{2} (L^2 - x^2) \quad (1)$$

sendo A a área da seção transversal e Ω a velocidade de rotação da viga.

Portanto, a equação diferencial de movimento para o modelo da pá é:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(L^2 - x^2) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = f(x, t) \quad (2)$$

sendo $w(x, t)$ a deflexão lateral.

Em vibração livre, a viga com seção uniforme e isotrópica, a Eq. (2) reduz-se a:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(L^2 - x^2) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (3)$$

3 SOLUÇÃO ANALÍTICA PELO MÉTODO DE GALERKIN

É vantajoso reduzir um sistema mecânico contínuo em um sistema discreto (Avila, Shzu, Pereira, Santos, Morais, & Prado, no prelo). De acordo com o método de Galerkin, (Paidoussis, 2004), a solução aproximada da Eq. (3) pode ser expressa por:

$$w(x, t) \simeq w_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) q_j(t) \quad (4)$$

sendo $\psi_j(x)$ funções testes que pertençam ao domínio $\mathbb{D} = [0, L]$ e satisfaçam as condições de contorno, e $q_j(t)$ são coordenadas generalizadas do sistema discretizado.

Utiliza-se a forma modal de uma viga engastada-livre simples como função teste:

$$\psi_j(x) = \cosh \lambda_j x - \cos \lambda_j x - \sigma_j (\sinh \lambda_j x - \sin \lambda_j x) \quad (5)$$

onde, $\sigma_j = (\sinh \lambda_j L - \sin \lambda_j L) \div (\cosh \lambda_j L + \cos \lambda_j L)$ e $\lambda_j L$ são as raízes da equação transcendental $\cos \lambda_j L \cdot \cosh \lambda_j L = -1$. Os autovalores λ_j obtidos correspondem às frequências naturais e as autofunções ψ_j correspondem às formas modais.

Para uma viga engastada-livre tem-se que $\lambda_1 L = 1.875104$, $\lambda_2 L = 4.694091$, $\lambda_3 L = 7.854757$ e $\lambda_4 L = 10.995541$. Ao substituir a solução aproximada, dada pela Eq. (4), na Eq. (3), o resultado não será zero, mas sim em uma função resíduo $\mathbb{R}[w_N]$ (Paidoussis, 2004):

$$\mathbb{R}[w_N(x, t)] = \sum_{j=1}^N \left\{ \rho A \psi_j \ddot{q}_j + EI \psi_j^{iv} q_j + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(L^2 - x^2) \psi_j'] q_j \right\} \quad (6)$$

O método de Galerkin requer que, no domínio $\mathbb{D} = [0, L]$, a integral da função resíduo, ponderada por $\psi_i(x)$, seja zero:

$$\int_0^L \mathbb{R}[w_N] \psi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

Como as autofunções são ortogonais têm-se, pelas propriedades de ortogonalidade, que:

$$\int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx = L \delta_{ij} \quad (8)$$

sendo δ_{ij} a função delta de Kronecker (0 quando $i \neq j$ e 1 quando $i = j$).

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (7) e utilizando as propriedades de ortogonalidade, têm-se:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \rho A L \delta_{ij} \ddot{q}_j + EI \lambda_j^4 L \delta_{ij} q_j + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \int_0^L (L^2 - x^2) \psi_j' \psi_i' dx q_j \right\} = 0 \quad (9)$$

Portanto, o sistema contínuo reduziu-se a um número discreto de equações diferenciais ordinárias, e pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (10)$$

sendo $\mathbf{M}$ a matriz de massa, $\mathbf{K}_m$ e $\mathbf{K}_c$ as matrizes de rigidez material e centrífuga, respectivamente.

Ávila et al (no prelo) utiliza o método de Galerkin para obtenção das frequências naturais de uma torre eólica com uma massa concentrada representando a nacelle e seus componentes. Os resultados até o terceiro modo apresentados diferem menos de 1% de um modelo com quatro modos para um modelo com 32 modos.

Como o modelo de viga aqui descrito apresenta seção constante e não possui massa em sua extremidade, optou-se pela aproximação com cinco modos ($N = 5$):

$$\begin{bmatrix} \rho AL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho AL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho AL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho AL & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho AL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} \lambda_1^4 L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^4 L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5^4 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \begin{bmatrix} 2.38667 & -1.37171 & -1.58476 & -1.09283 & -0.908151 \\ -1.37171 & 12.9564 & 0.338817 & -5.8237 & -3.77833 \\ -1.58476 & 0.338817 & 35.7190 & 6.54854 & -12.3088 \\ -1.09283 & -5.8237 & 6.54854 & 69.6108 & 17.1306 \\ -0.908151 & -3.77833 & -12.3088 & 17.1306 & 119.102 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (11)$$

4 MODELAGEM MEF VIA ANSYS®

4.1 Modelo Simplificado da Pá

Na modelagem numérica da pá como uma viga utilizou-se o elemento BEAM188, que possui seis graus de liberdade por nó (as rotações e translações nos eixos x, y e z). A estrutura foi discretizada em 400 elementos finitos, pois esta quantidade resultou em uma solução convergida.

Para o cálculo das frequências naturais de uma viga rotativa é necessário realizar primeiramente uma análise estática para obtenção do estado de tensão decorrente da força centrífuga que surge com a rotação. A inserção da rotação em torno de um eixo é feita com o comando OMEGA. Para cada valor de rotação um novo estado de tensão é calculado e gravado com o comando PSTRESS ON. Em sequência, as frequências naturais são obtidas a partir de análises modais.

4.2 Modelo da Pá de Araújo, Moraes, Avila, & Shzu (2014)

As análises realizadas com o modelo de viga simplificada foram aplicadas à pá considerando uma geometria real. Para isto, utilizou-se a modelagem apresentada por Araújo, Moraes, Avila, & Shzu (2014).

Para a modelagem numérica de uma pá eólica real utilizou-se o elemento linear BEAM188 e a discretização da área transversal. Esta abordagem apresenta um baixo custo computacional sem resultar em perda de precisão (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014). Ferreira et al (2013) modelou a mesma pá com elementos sólidos tetraédricos. Os resultados diferem no pior caso em 5% e no melhor caso com menos de 0.1%.

A construção da geometria da pá foi feita com a importação de nove seções transversais contidas em um arquivo CAD, disponibilizados pelo projeto pró-amazônia na Universidade de Brasília (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014). As informações da geometria das seções transversais são importadas para o ANSYS® com o elemento MESH200. A carcaça da pá, cujo formato afunila-se, foi feita utilizando o comando SECTYPE. Em seguida, a geometria foi discretizada em 562 elementos e processaram-se as análises.

5 RESULTADOS

5.1 Modelo Simplificado da Pá

Consideraram-se duas vigas de seção retangular com módulo de elasticidade, E , igual a $210e9 Pa$, densidade, ρ , igual a $7800 kg/m^3$, e coeficiente de Poisson, ν , de 0.3. As dimensões da base e altura da seção transversal adotadas foram de $b = h = 0.001 m$ e comprimento $L = 1 m$ para primeira viga, e $b = 0.05 m$, $h = 0.15 m$ e $L = 10 m$ para a segunda viga.

A Tabela 1 apresenta os resultados das cinco primeiras frequências naturais da viga de 1 m de comprimento para $\Omega = 0 rad/s$, $\Omega = 3 rad/s$ e $\Omega = 7.5 rad/s$, obtidas pelo método de Galerkin e ANSYS®. Estes resultados são comparados com os resultados da literatura (Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982).

Tabela 1 - Frequências naturais da viga de 1 m de comprimento

	Rotação [rad/s]	Galerkin					Ansys	Wright, Smith, Thresher, & Wang (1982)
		1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos		
1ª freq.	0	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382
	3	0.9872	0.9868	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867	0.9863
	7.5	1.5501	1.5411	1.5394	1.5392	1.5391	1.5390	1.5375
2ª freq.	0	---	5.2528	5.2528	5.2528	5.2528	5.2529	5.2528
	3	---	5.3917	5.3917	5.3916	5.3916	5.3916	5.3912
	7.5	---	6.0705	6.0704	6.0688	6.0685	6.0683	6.0661
3ª freq.	0	---	---	14.7081	14.7081	14.7081	14.7085	14.7081
	3	---	---	14.8459	14.8459	14.8458	14.8462	14.8454
	7.5	---	---	15.5493	15.5482	15.5470	15.5471	15.5444
4ª freq.	0	---	---	---	28.8221	28.8221	28.8237	28.8221
	3	---	---	---	28.9594	28.9594	28.9659	28.9639
	7.5	---	---	---	29.6708	29.6691	29.6997	29.6955
5ª freq.	0	---	---	---	---	47.6449	47.6496	47.6450
	3	---	---	---	---	47.7872	47.7948	47.7897
	7.5	---	---	---	---	48.5287	48.5491	48.5419

A Tabela 2 apresenta os valores para a viga de 10 m de comprimento para os mesmos valores de rotação.

Tabela 2 - Frequências naturais da viga de 10 m de comprimento

	Rotação [rad/s]	Galerkin					Ansys	Wright, Smith, Thresher, & Wang (1982)
		1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos		
1 ^a freq.	0	0.4191	0.4191	0.4191	0.4191	0.4191	0.4191	0.4191
	3	0.6691	0.6668	0.6664	0.6663	0.6663	0.6663	0.6657
	7.5	1.3696	1.3451	1.3392	1.3377	1.3373	1.3369	1.3353
2 ^a freq.	0	---	2.6264	2.6264	2.6264	2.6264	2.6261	2.6264
	3	---	2.8945	2.8945	2.8941	2.8941	2.8937	2.8933
	7.5	---	4.0243	4.0241	4.0154	4.0143	4.0127	4.0098
3 ^a freq.	0	---	---	7.3541	7.3541	7.3541	7.3519	7.3541
	3	---	---	7.6259	7.6257	7.6254	7.6232	7.6220
	7.5	---	---	8.9189	8.9120	8.9039	8.8998	8.8979
4 ^a freq.	0	---	---	---	14.4110	14.4110	14.4034	14.4110
	3	---	---	---	41.6839	14.6836	14.6855	14.6921
	7.5	---	---	---	16.0457	16.0343	16.0748	16.0776
5 ^a freq.	0	---	---	---	---	23.8225	23.8026	23.8225
	3	---	---	---	---	24.1060	24.0916	24.1106
	7.5	---	---	---	---	25.5515	25.5483	25.5629

Os diagramas de Campbell (Figura 2 e Figura 3) ilustram o comportamento crescente das frequências naturais conforme a velocidade de rotação aumenta.

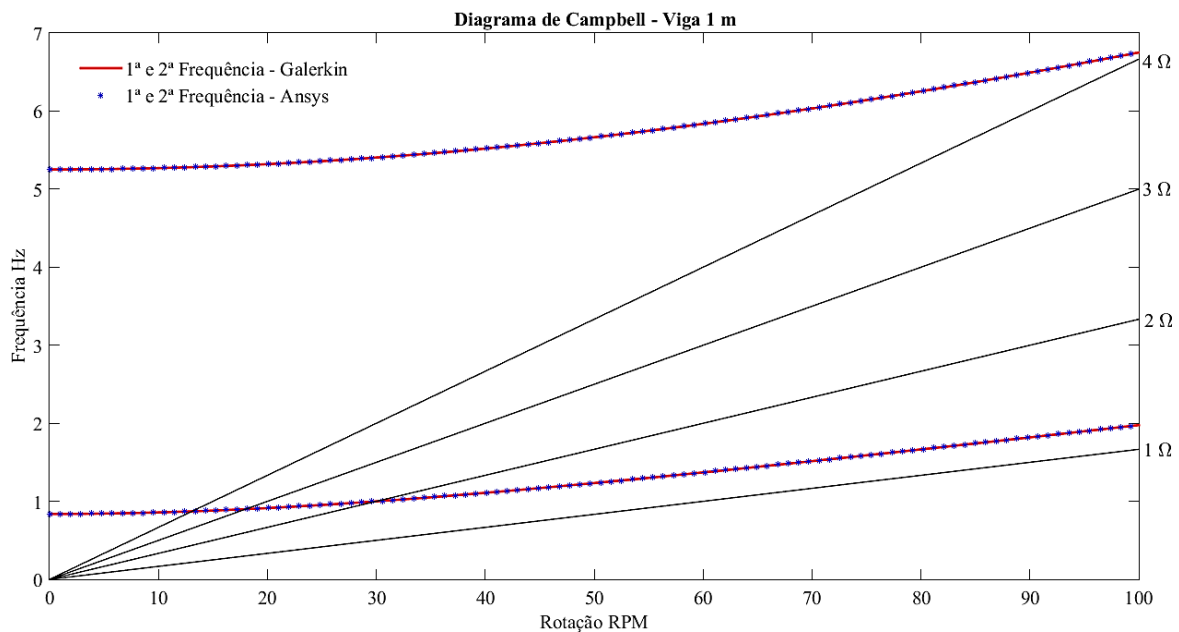


Figura 2 - Diagrama de Campbell para viga de 1m de comprimento

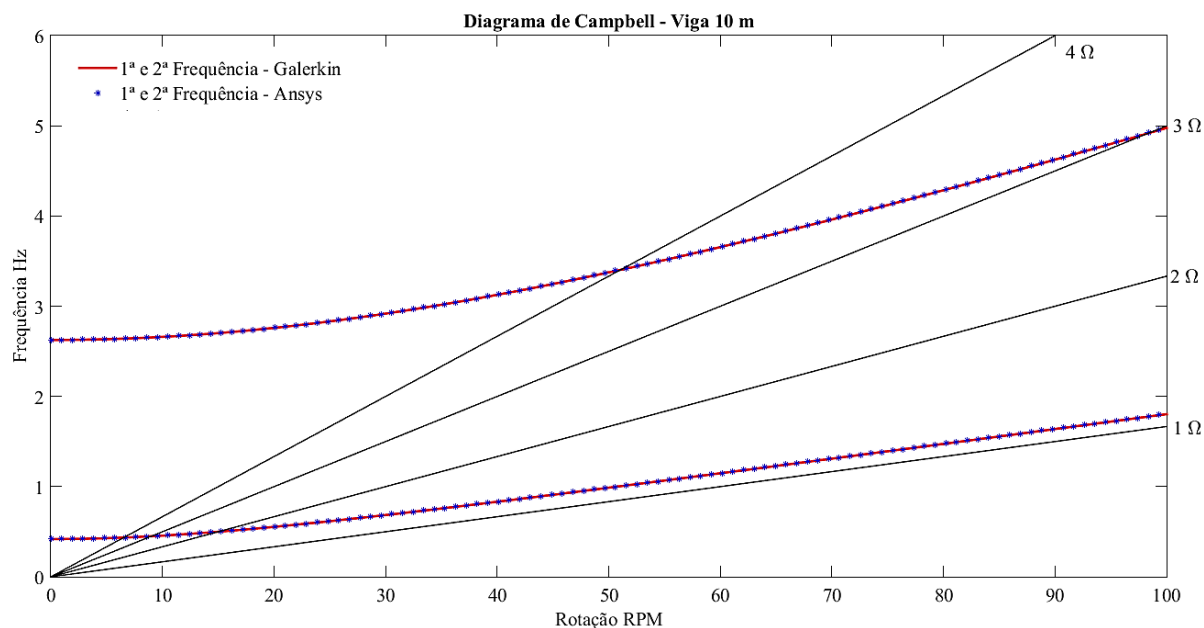


Figura 3 - Diagrama de Campbell para viga de 10m de comprimento

A equação da frequência fundamental adimensional de uma viga rígida fixada a uma mola torcional (Ishida, Inoue, & Nakamura, 2009) é dada pela expressão $p = \sqrt{1 + \Omega^2}$. Observa-se que não há velocidade crítica para a curva $1 \times \Omega$. Ou seja, a evolução da primeira frequência natural nunca cruza a curva $1 \times \Omega$. Já as linhas $2 \times \Omega$, 3Ω , ..., $n\Omega$, $3\Omega/2$, $5\Omega/2$, ..., $(2n - 1)\Omega/2$, sendo n um número natural, podem cruzar a curva da primeira frequência natural caracterizando velocidades críticas (Ishida, Inoue, & Nakamura, 2009).

Para uma turbina de três pás, a curva $3 \times \Omega$ é justificada pelo denominado efeito sombra, que ocorre devido a interferência da torre quando uma das pás passa por ela (Hau, 2006). Este fenômeno ocorre a cada 120° , acontecendo três vezes a cada ciclo completo de rotação da pá, ou seja, com período igual a um terço do período de rotação do rotor.

5.2 Modelo de Araújo, Morais, Avila, & Shzu (2014)

A pá tem formato sólido HTUC de aço inox 304 com módulo de elasticidade transversal $E = 193e9 \text{ Pa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e densidade $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$. Ela possui 4.49 m de comprimento. O modelo obtido no ANSYS® está ilustrado na Fig. 4.

Os resultados de frequências obtidos considerando os efeitos da rotação foram comparados com os apresentados por Araújo, Morais, Avila, & Shzu (2014), que, na ocasião, não consideraram estas cargas.

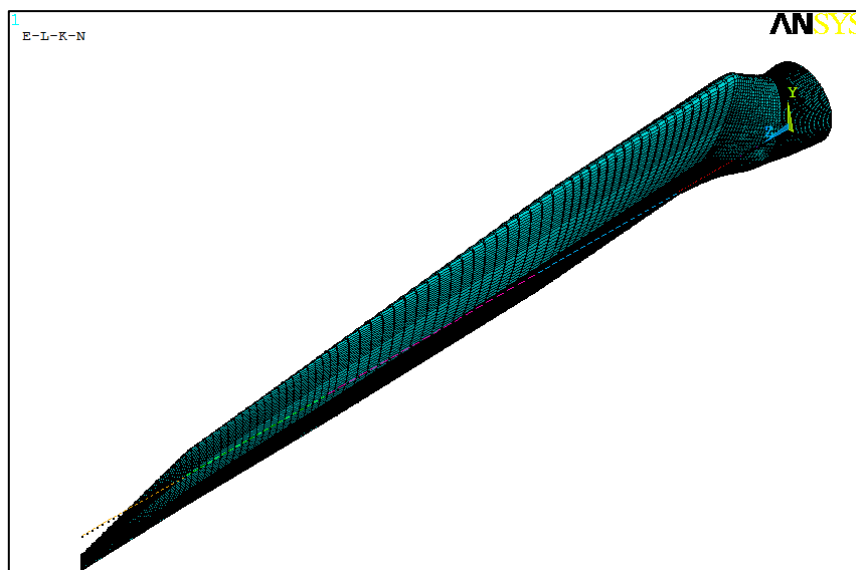


Figura 4 - Modelo da pá obtida no Ansys®. Fonte: (Araújo, Moraes, Avila, & Shzu, 2014)

A Tabela 3 apresenta os resultados de frequências naturais obtidas para o modelo da pá de Araújo, Moraes, Avila, & Shzu (2014) para $\Omega = 0 \text{ rad/s}$, $\Omega = 3 \text{ rad/s}$ e $\Omega = 7.5 \text{ rad/s}$

Tabela 3 - Frequências naturais da pá de Araújo, Moraes, Avila, & Shzu (2014)

	Rotação [rad/s]	Ansys [Hz]	Araújo, Moraes, Avila, & Shzu (2014) [Hz]
1ª freq.	0	12.432	12.432
	3	12.464	---
	7.5	12.525	---
2ª freq.	0	36.785	36.785
	3	36.853	---
	7.5	36.906	---
3ª freq.	0	50.539	50.539
	3	50.622	---
	7.5	50.637	---

6 CONCLUSÃO

Este trabalho estuda o comportamento dinâmico de pás rotativas submetidas a forças centrífugas. Desenvolveram-se soluções analítico-aproximadas pelo método de Galerkin utilizando uma aproximação com cinco modos. Os resultados são comparados com a literatura e com resultados numéricos obtidos pelo programa comercial ANSYS®.

Para isto, determina-se a evolução das frequências naturais de dois modelos de viga engastadas com seção retangular constante para uma faixa de velocidade de rotação. Resultados analítico-aproximados por Galerkin e numérico no ANSYS® são comparados aos resultados de Wright, Smith, Thresher & Wang (1982). As frequências naturais aumentam com a velocidade de rotação do rotor. Portanto, não há velocidade crítica na primeira

frequência natural para a curva de excitação 1Ω , conforme prevê o trabalho de Ishida, Inoue e Nakamura (2009).

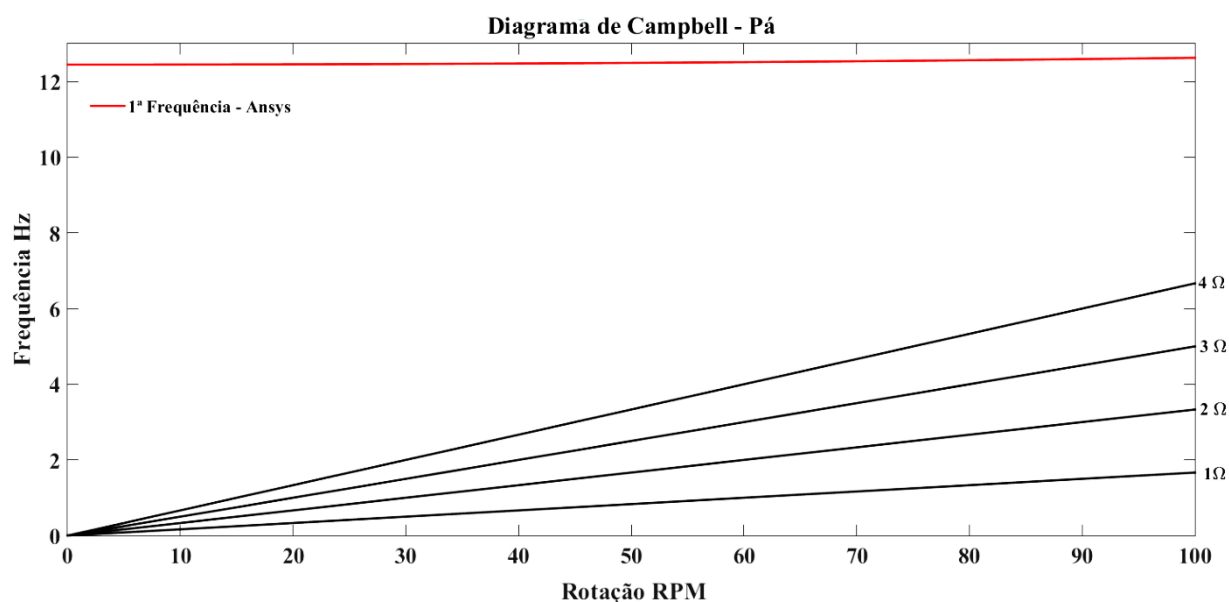


Figura 5 - Diagrama de Campbell para pá

Estuda-se a evolução das frequências naturais de uma pá eólica real, uma vez validada a metodologia de aplicação. Analisa-se o comportamento das frequências para uma faixa de velocidade de rotação usual em turbinas eólicas. Os resultados obtidos pelo ANSYS® são comparados aos obtidos por Araújo, Morais, Avila & Shzu (2014). A variação da frequência com a velocidade de rotação do rotor possui comportamento crescente, porém essa variação é pequena. Não se observa velocidade crítica no gráfico de Campbell na faixa de rotação analisada para a pá. Não obstante esta aplicação não apresentar uma variação significativa, evidencia-se a ação das forças centrífugas para rotores eólicos de grande envergadura.

Em trabalhos futuros, a ação conjunta da força centrífuga e do peso próprio da estrutura é necessária. A determinação numérica do comportamento dinâmico de oscilador paramétrico (ou oscilador de Hill-Mathieu) necessita o uso de ferramentas especializadas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao programa Pro-Amazônia: biodiversidade e sustentabilidade - Edital 047/2012 pelo apoio, a CAPES pelo financiamento de bolsas de pesquisa (Bolsa de mestrado), e ao CNPq & MCTI pelo suporte financeiro (Processo 406895/2013-9) referente ao edital MCTI/CNPq N° 74/2013 “Capacitação laboratorial e formação de recursos humanos em Energia Eólica (Linha 1)”.

REFERÊNCIAS

- Araújo, D., Moraes, M. V., Avila, S. M., & Shzu, M. A. (23-26 de Novembro de 2014). Análise Modal de uma Pá de Turbina Eólica Modelada como Elemento de Viga utilizando a Plataforma Ansys. *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Fortaleza, Ceará, Brasil: ABMEC.
- Avila, S. M., Shzu, M. A., Pereira, W. M., Santos, L. S., Moraes, M. V., & Prado, Z. J. (no prelo). Numerical Modeling of the Dynamics Behavior of a Wind Turbine Tower. *Journal of Advances in Vibration Engineering*.
- Ferreira, G. B., Costa, D. I., Moraes, M. V., Neto, F. L., & Miranda, M. (2013). Projeto Estrutural e Fabricação do País, In: Brasil Júnior, Antônio César Pinho (Coord.). *Aproveitamento de Energia Hidrocinética em Águas Vertidas e Turbinadas: Segundo Relatório Parcial*, 165-201. Eletronorte.
- Finlayson, B. A. (1972). *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. (R. Bellman, Ed.) New York: Academic Press.
- Hau, E. (2006). *Wind Turbines. Fundamentals, Technologies, Application, Economics* (2ª ed.). Berlim: Springer.
- Hoa, S. V. (Julho de 1979). Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass. *Journal of Sound and Vibration*, pp. 369-381.
- Hodges, D. H., & Rutkowski, M. J. (Novembro de 1981). Free-Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable-Order Finite-Element Method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 19, pp. 1459-1466.
- Ishida, Y., Inoue, T., & Nakamura, K. (13 de July de 2009). Vibration of a Wind Turbine Blade (Theoretical Analysis and Experiment Using a Single Rigid Blade Model). *Journal of Environment and Engineering*, pp. 443-454.
- Oliveira, F. A., Shzu, M. A., Araújo, D. C., & Moraes, M. V. (2014). *Influência de Cargas Axiais nos Valores de Frequências Naturais em um Modelo de Viga Engastada-Livre e em uma Pá de uma Turbina Eólica*. VI Encontro de Ciência e Tecnologia - FGA/UnB, Universidade de Brasília, Brasília.
- Paidoussis, M. (2004). *Fluid Structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow* (Vol. 1). Londres: Elsevier Academic Press.
- Ramakrishnan, V., & Feeny, B. F. (28-31 de August de 2011). In-Plane Nonlinear Dynamics of Wind Turbine Blades. Washington, DC, USA.
- Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W., & Wang, J. L. (Março de 1982). Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 49, pp. 197-202.