



ESTUDO SOBRE TRAJETÓRIAS DE TENSÕES E APLICAÇÃO DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Bruno Bandeira Brandão

Rodrigo Bird Burgos

bruno.uerj@hotmail.com

rburgos@ig.com.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Rua São Francisco Xavier, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo. *Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre o método de bielas e tirantes e resultados obtidos pela solução analítica para vigas de concreto armado. A análise é feita em regime linear elástico para ambos os materiais, ou seja, considerando o concreto no Estádio I (não fissurado). A viga estudada possui armadura de tração e seção do tipo “T”, com carregamento distribuído devido ao peso próprio e cargas concentradas aplicadas a distâncias iguais dos apoios extremos. Para a criação do modelo de bielas e tirantes, primeiramente foram calculadas as tensões principais e suas direções em seções ao longo de todo o comprimento da viga estudada através do Círculo de Mohr. Em seguida, foram determinadas as trajetórias de tensões (curvas ortogonais cuja tangente em qualquer ponto tem a direção das tensões principais), possibilitando a orientação dos elementos que desempenham o papel de bielas ou tirantes. Ao final do trabalho, é feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos analiticamente e o modelo estudado em termos de resultantes de compressão e tração nas bielas e tirantes, respectivamente.*

Palavras-chave: *Trajetória de tensões, Modelo de bielas e tirantes, Vigas, Concreto armado.*

1 INTRODUÇÃO

A avaliação do estado de tensões em um elemento estrutural constitui um item de fundamental importância para o engenheiro estrutural. A partir do conhecimento dos valores máximos de tensões é possível garantir um dimensionamento seguro e econômico para a peça estrutural (Oliveira et al., 2002).

A análise da trajetória de tensões tem por objetivo identificar os caminhos percorridos pelas forças que fluem numa estrutura a partir do seu ponto de aplicação até o ponto onde ocorre a reação.

Analisando o efeito combinado das tensões normais e cisalhantes é possível identificar as trajetórias das tensões principais, um conjunto de curvas ortogonais que modelam o comportamento estrutural. Estes resultados, quando bem avaliados, traduzem perfeitamente o comportamento da peça sob a ação das cargas atuantes.

O presente trabalho teve como base um estudo que analisou, entre outros elementos, faixas de lajes nervuradas (Teixeira, 2012). Embora no trabalho em questão tenham sido estudados também painéis de laje, serão utilizados aqui apenas os dados dos elementos que, devido às suas características geométricas, foram ensaiados como vigas.

Para esses elementos foram calculadas as tensões normais ao longo da altura da viga. O valor dessas tensões foi obtido através do uso de expressões clássicas da resistência dos materiais, tais como as apresentadas em Hibbeler (2010).

A partir das tensões encontradas ao longo de cada seção, foi determinada a trajetória das tensões. Com essa trajetória foi definido o ângulo de inclinação dos elementos a serem considerados como bielas ou tirantes.

A ideia de modelar-se um elemento de concreto armado a partir de uma treliça surgiu inicialmente com Ritter e Mörsch (Mörsch, 1948). Embora o modelo tenha sofrido pequenas alterações, os conceitos básicos da teoria ainda continuam válidos.

O CEB (1990) preconiza o uso de bielas e tirantes como solução para projetos de dentes Gerber e apoios de vigas. O ACI-318 (2006) também propõe a utilização do método de bielas e tirantes para dentes e para vigas, indicando as tensões máximas a serem utilizadas nos elementos comprimidos (bielas) e tracionados (tirantes). A NBR-6118 (ABNT, 2014) prevê a utilização do método de bielas e tirantes para dentes Gerber, seguindo a tendência das normas internacionais já mencionadas.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho tem como objetivo calcular e traçar as trajetórias das tensões principais em uma viga com seção transversal do tipo “T”. A partir das trajetórias, será então gerado um modelo de bielas e tirantes da viga estudada.

Nos cálculos realizados neste estudo são admitidas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- os materiais são homogêneos e obedecem à Lei de Hooke;
- a viga em estudo está submetida a um estado plano de tensões;

– considerou-se como válido o princípio de Saint-Venant, admitindo-se $\sigma_y = 0$, mesmo nas proximidades do ponto de aplicação das cargas.

Tais considerações são utilizadas com a finalidade de calcular as tensões atuantes utilizando os conceitos básicos da Resistência dos Materiais (Hibbeler, 2010). Assim em uma viga de seção constante, sujeita à flexão simples não pura, as tensões normais (σ) e tangenciais (τ) variam ao longo da altura da seção e podem ser calculadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &= -\frac{M(x)y}{I}, \\ \tau(x, y) &= \frac{V(x)Q(y)}{b_w(y)I},\end{aligned}\tag{1}$$

onde:

$M(x)$ – momento fletor a uma distância x da extremidade esquerda;

y – distância do CG (centro de gravidade) da seção ao ponto considerado;

$V(x)$ – força cortante a uma distância x da extremidade esquerda;

$Q(y)$ – momento estático da área da seção homogênea situada acima da fibra de ordenada y em relação à linha neutra;

$b_w(y)$ – largura da seção na ordenada y ;

I – momento de inércia da seção, em relação a seu CG.

A viga será considerada como isostática (biapoiada) e será discretizada em seções transversais obtendo-se, para cada uma, as tensões normais e cisalhantes.

2.1 Modelo de viga estudado

A viga estudada apresenta uma seção em formato de “T”, possuindo 17 cm de altura e 26 cm de largura da mesa. A seção transversal em questão é inspirada na utilizada por Teixeira et al. (2013), cujas dimensões são apresentadas na Fig. 1.

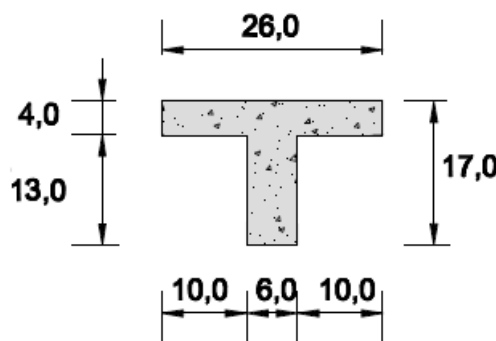


Figura 1. Detalhe da seção da viga

A viga possui um comprimento total de 2,12 m, sendo carregada em dois pontos equidistantes das extremidades. O peso próprio da viga é considerado como um carregamento distribuído ao longo do comprimento. Os detalhes da vista lateral da viga são apresentados na Fig. 2.

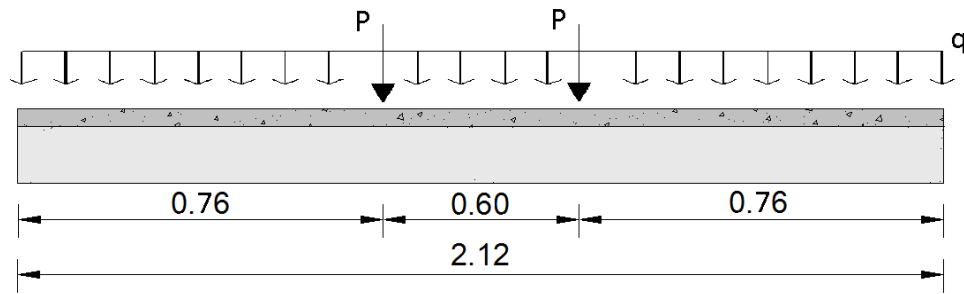


Figura 2. Detalhe da vista lateral da viga e de seu carregamento

3 TRAJETÓRIAS DE TENSÕES

Antes de tratar da determinação das tensões e suas trajetórias, é importante mencionar que a metodologia de cálculo empregada considerou os materiais ainda em sua fase elástica. Isto significa que foi considerado o Estádio I (concreto não fissurado).

As tensões normais foram calculadas considerando-se a hipótese de Euler-Bernoulli de que as seções permanecem planas após a aplicação do carregamento.

3.1 Determinação das Propriedades Geométricas da Seção

Todas as propriedades geométricas foram determinadas utilizando as expressões clássicas, tais como as propostas por Timoshenko & Gere (1983).

A primeira etapa da modelagem da viga em estudo no software MATLAB (Chapman, 2003) foi o cálculo da área A da seção transversal. A área foi determinada através da expressão a seguir, avaliada numericamente:

$$A = \int_A dA. \quad (2)$$

O procedimento seguinte foi o cálculo da posição do centroide, considerando a seção no Estádio I. A coordenada do centroide foi obtida através da expressão a seguir, que leva em conta a contribuição de cada material:

$$\bar{y} = \frac{E_c \int_{A_c} y dA + E_s \int_{A_s} y dA}{E_c \int_{A_c} dA + E_s \int_{A_s} dA}, \quad (3)$$

onde:

E_c – módulo de elasticidade do concreto segundo a expressão $9600\sqrt[3]{f_{ck} + 8}$ (CEB, 1990), com f_{ck} de 25 MPa;

E_s – módulo de elasticidade do aço;

A_c – área de concreto;

A_s – área de aço.

Em seguida, foram calculados o momento de inércia centroidal (I) e o momento de estático da seção (Q) para cada valor de altura y . Estas propriedades foram definidas com a utilização das seguintes expressões:

$$Q = \int_A y dA,$$

$$I = \int_A y^2 dA. \quad (4)$$

Uma vez definidas a área e as propriedades geométricas da seção, foi possível a determinação do carregamento devido ao peso próprio e das tensões atuantes, a serem discutidas nos itens subsequentes.

3.2 Aplicação do Peso Próprio e das Cargas Concentradas

O carregamento devido ao peso próprio foi calculado de acordo com a variação da área da seção ao longo do comprimento total da viga. No modelo implementado no MATLAB foi considerado o valor da densidade do concreto ($25 \times 10^{-6} \text{ N/mm}^3$) aplicado a cada milímetro da seção.

A partir do peso próprio foi definida a função $q(x)$, para a construção dos diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga. As cargas concentradas foram aplicadas com intervalos de 500 N (0,5 kN). As Figs. 3 e 4 apresentam os diagramas de esforço cortante e momento fletor, respectivamente, para cargas concentradas P de 500 N (ver Fig. 2 para o esquema de carregamento).

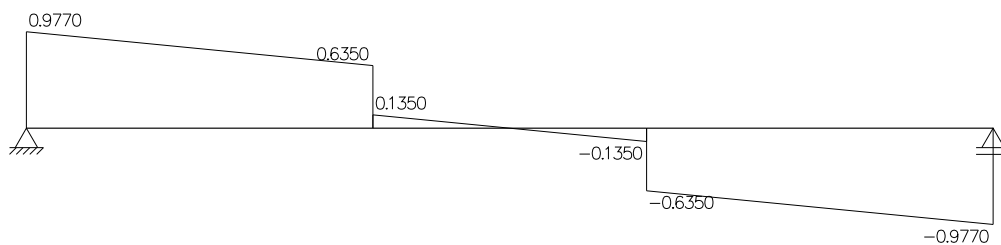


Figura 3. Diagrama de esforço cortante (kN) para cargas P de 0,5 kN e peso próprio q de 0,45 kN/m

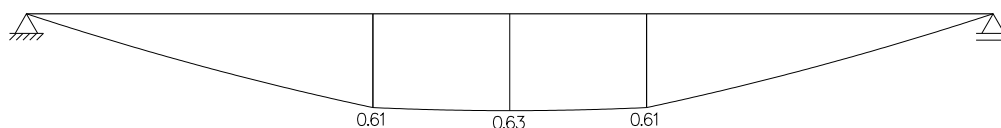


Figura 4. Diagrama de momento fletor (kNm) para cargas P de 0,5 kN e peso próprio q de 0,45 kN/m

A partir dos diagramas foram calculadas as tensões normais e cisalhantes em cada ponto da seção transversal através da Eq. (1). A partir dos valores de tensões normais e cisalhantes foi estabelecido, com o auxílio do software MATLAB, um campo de distribuição de tensões $\sigma_x(x,y)$ e $\tau_{xy}(x,y)$. As Figs. 5 e 6 apresentam a distribuição de tensões em MPa para cargas concentradas P de 500 N acrescidas do peso próprio da viga.

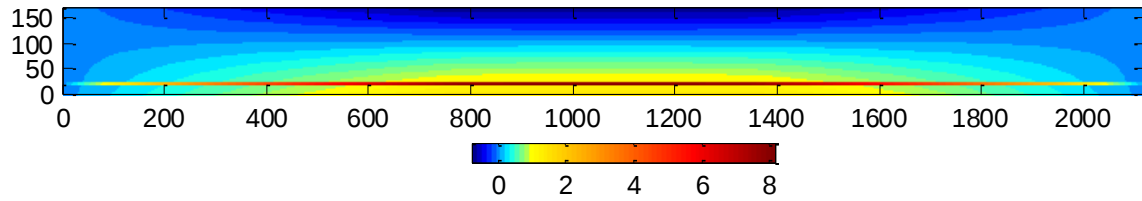


Figura 5. Distribuição das tensões normais σ_x ao longo da viga em MPa

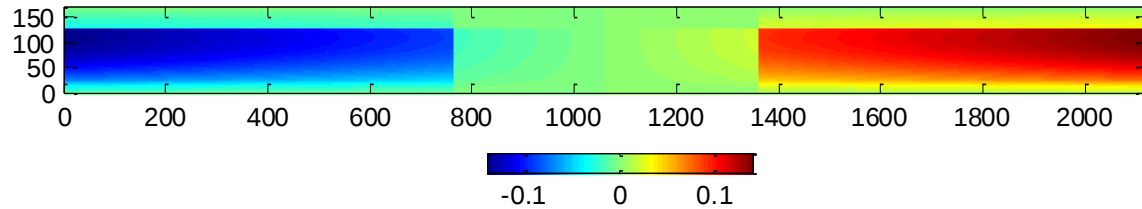


Figura 6. Distribuição das tensões cisalhantes τ_{xy} ao longo da viga em MPa

Utilizando o círculo de Mohr e considerando que não há tensão normal na direção y , chegou-se à distribuição das tensões principais e seus respectivos ângulos de orientação (Chou & Pagano, 1992).

$$\begin{aligned}\sigma_1(x, y) &= \frac{\sigma(x, y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma(x, y)}{2}\right)^2 + \tau(x, y)^2}, \\ \sigma_2(x, y) &= \frac{\sigma(x, y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma(x, y)}{2}\right)^2 + \tau(x, y)^2}, \\ \theta_1(x, y) &= \tan^{-1}\left(\frac{2\tau(x, y)}{\sigma(x, y)}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

A distribuição das tensões principais σ_1 e σ_2 é apresentada nas figuras a seguir (Figs. 7 e 8). Os valores são expressos em MPa.

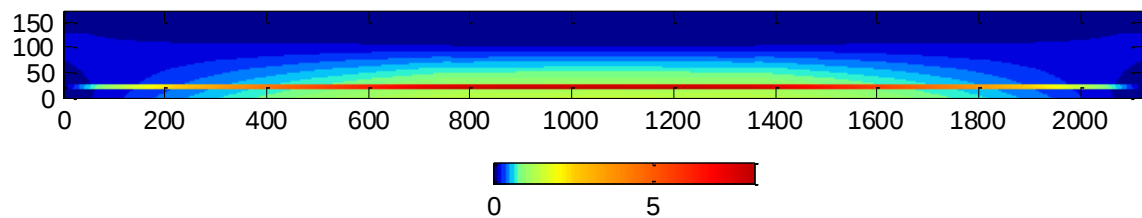


Figura 7. Distribuição das tensões principais σ_1 ao longo da viga em MPa

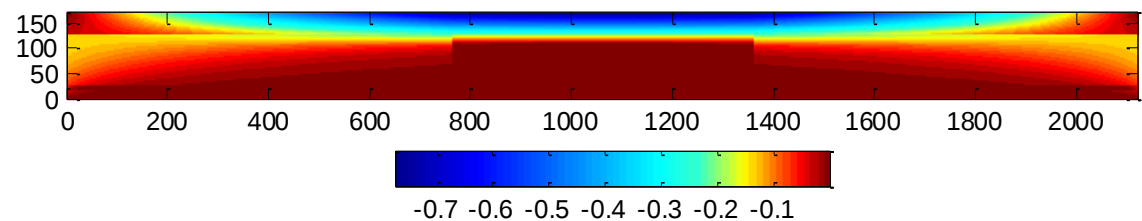


Figura 8. Distribuição das tensões principais σ_2 ao longo da viga em MPa

A partir das distribuições de σ_1 e σ_2 e seus respectivos ângulos foi possível construir uma trajetória de tensões que posteriormente serviu de base para a elaboração de um modelo de bielas e tirantes. Essa trajetória de tensões é mostrada na Fig. 9 para metade da viga devido à simetria. As linhas em azul e vermelho representam tensões de compressão e tração, respectivamente.

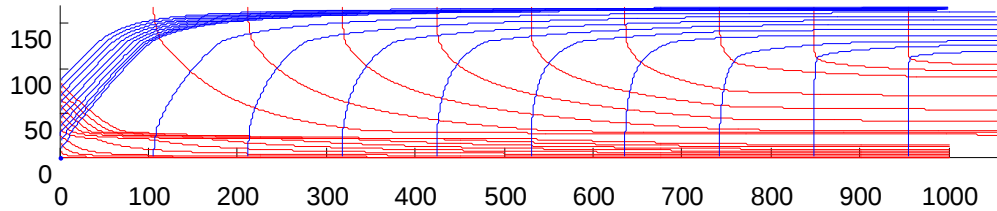


Figura 9. Trajetórias das tensões principais ao longo da viga (compressão em azul, tração em vermelho)

4 MODELO DE BIELAS E TIRANTES

Para a utilização do modelo de bielas e tirantes nas vigas em estudo, a seção foi decomposta em duas áreas (o concreto sob compressão e o aço sob tração), localizando-se nelas o centroide e a posição da força resultante das tensões, conforme a Fig. 10.

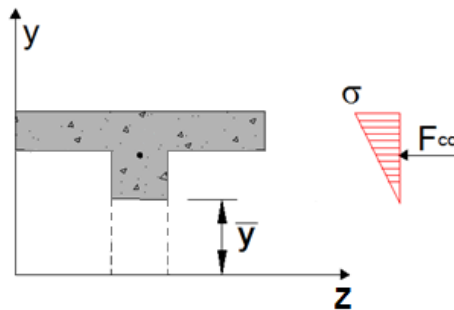


Figura 10. Zona comprimida e resultante de compressão

Considerando uma distribuição linear da tensão de compressão no concreto, o ponto de aplicação c da resultante de compressão pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$c = \frac{I_1}{Q_1}. \quad (6)$$

onde:

c – ponto de aplicação da resultante de compressão no concreto medido a partir do centroide da seção;

I_1 – momento de inércia da área comprimida em relação ao centroide da seção;

Q_1 – momento estático da área comprimida em relação ao centroide da seção.

A distância encontrada entre o centro de gravidade da armadura e o ponto de aplicação da resultante de compressão no concreto foi de 13 cm. Essa foi, portanto, a altura adotada para a treliça do modelo de bielas e tirantes, cuja configuração seguiu de acordo com a trajetória assumida pelas tensões do modelo analítico.

O carregamento devido ao peso próprio foi aplicado de forma equivalente nos nós da treliça, e a carga concentrada (P) foi considerada no exato ponto de aplicação. A treliça obtida

é apresentada na figura a seguir (Fig. 11). Na figura é mostrada a situação obtida para cargas concentradas P de 500 N cada.

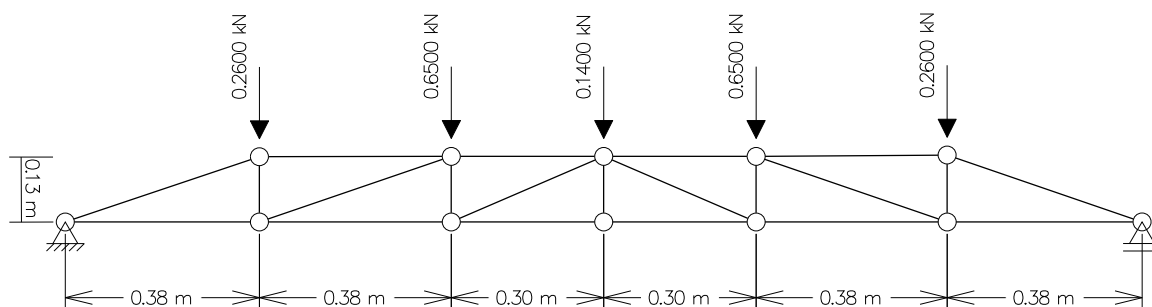


Figura 11. Modelo de bielas e tirantes

5 RESULTADOS

A Fig. 12 apresenta os valores obtidos para a resultante de compressão no concreto (R_{cc}) em função das cargas concentradas P aplicadas. Nessa comparação, verificou-se uma adequação entre o modelo de bielas e tirantes e o analítico, com as duas formulações variando linearmente.

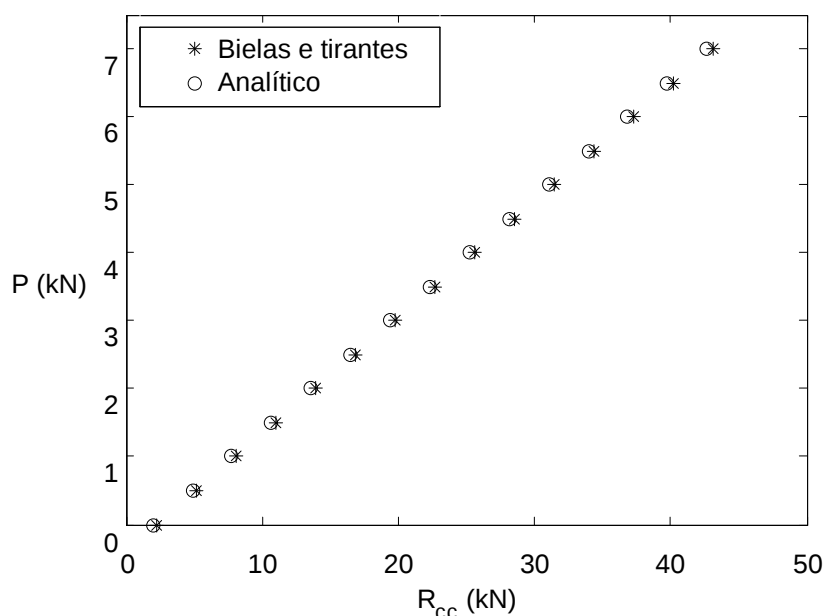


Figura 12. Resultante de compressão no concreto (R_{cc}) para os modelos de cálculo estudados

A Fig. 13 apresenta os valores da resultante de tração no concreto (R_{ct}) em função das cargas concentradas P . Nota-se que para valores de carga crescentes o resultado analítico começa a se distanciar do obtido por bielas e tirantes.

No caso do concreto ainda em fase linear, a força no banco inferior conta com as contribuições do concreto e do aço e a força em cada material tem de ser estimada, razão pela qual acredita-se que houve a discrepância nos resultados.

O comparativo entre as tensões obtidas pelo método das bielas e tirantes e os modelos analíticos foi feito nos pontos onde ocorreram as maiores tensões, ou seja, no meio do vão entre as cargas concentradas.

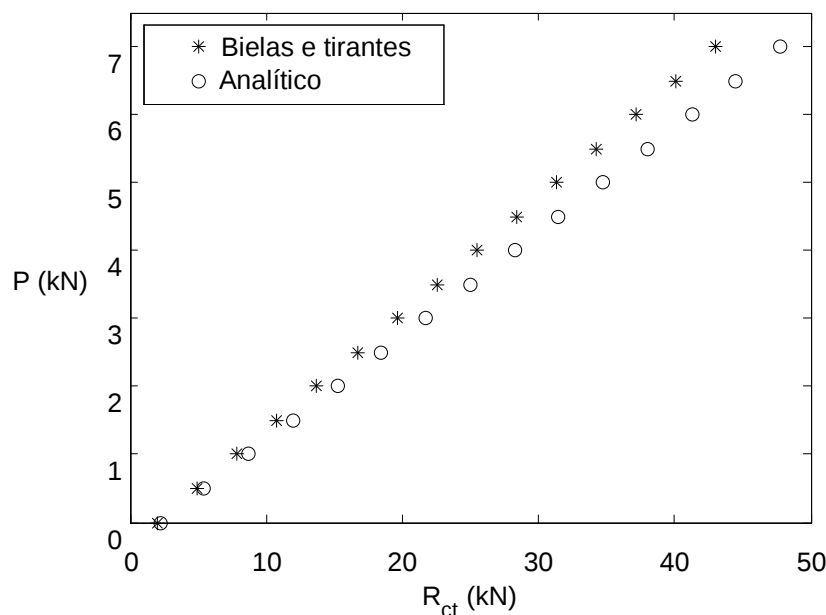


Figura 13. Resultante de tração no concreto (R_{ct}) para os modelos de cálculo estudados

6 CONCLUSÕES

Os modelos analíticos mostraram uma boa representação do comportamento das tensões nas vigas, considerando o concreto ainda no Estádio I (não fissurado). As trajetórias de tensões obtidas ficaram de acordo com o que se estudou na literatura.

O modelo de bielas e tirantes apresentou resultados distantes dos encontrados analiticamente para o caso da resultante de tração. Considerando que a viga ainda se encontrava na fase elástica dos materiais, este comportamento era esperado. Para corrigir tal problema, uma possível solução seria construir um modelo de bielas e tirantes com dois banzos inferiores independentes para reproduzir os dois materiais (concreto e aço).

O modelo de bielas e tirantes adequa-se melhor ao concreto em estágio já fissurado, já que neste caso há apenas uma resultante de tração, mas deve-se levar em conta a mudança do centroide da seção nesse caso. Além disso, a modelagem analítica torna-se mais complexa, principalmente considerando-se que o concreto também deixa de apresentar um comportamento linear à compressão.

Em trabalhos posteriores, proceder-se-á à modelagem do concreto armado já na fase pós-fissuração, procurando também comparar os resultados numéricos com os obtidos em ensaios experimentais.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq e à FAPERJ pelo apoio financeiro e à UERJ pela estrutura oferecida.

REFERÊNCIAS

ACI 318-08, 2008. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*.

Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014. *NBR-6118 Norma Brasileira para projeto de Estruturas de Concreto Armado*. Rio de Janeiro.

Chapman, S. J., 2003. *Programação em MATLAB para engenheiros*. Pioneira Thomson Learning, São Paulo.

Chou, P. C. & Pagano, N. J., 1992. *Elasticity: Tensor, Dyadic and Engineering Approaches*. Ed. Dover Publications, New York.

Comité Euro-International Du Béton, 1993. *CEB-FIP Model Code 1990*. Thomas Telford, London.

Hibbeler, R. C., 2010. *Resistência dos Materiais*, Pearson Prentice Hall, São Paulo.

Mörsch, E., 1948. *Teoría y Practica del Hormigón Armado*, Trad. Espanhola, Gustavo Gili, Barcelona.

Oliveira, J. M., Rios, F. P., Sahb, K. F. P., Silva, A. A., Franco, E. S. S., Bueno, F. S., Grande, J. E. & Oliveira, J. C. A., 2002. Estudo sobre a trajetória de tensões principais em vigas isostáticas, *I Jornada Científica da Engenharia da UCG*, Goiás.

Teixeira, P. J. B., 2012. *Verificação Experimental da Largura Colaborante em Mesas de Lajes Nervuradas*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Teixeira, P. J. B, Burgos, R. B., Tavares, M. E. N., Souza, R. H. F. & Silva, J. L., 2013. Estudo Comparativo Entre Resultados Experimentais e Modelos Analíticos Utilizando o Método de Bielas e Tirantes Aplicados a Vigas de Concreto Armado. *Anais do 55º Congresso Brasileiro De Concreto*.

Timoshenko, S. P. & Gere, J. E., 1983, *Mecânica dos Sólidos*. Vol. I. Ed. Ltc, Rio de Janeiro.