



VANTAGENS DO MODELO HÍBRIDO DE ELEMENTOS FINITOS EM RELAÇÃO AO MODELO MISTO

Márcio Augusto Roma Buzar

buzar@unb.br

PPG-FAU, Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília. Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília/DF, CEP 70910-900.

Marcos Henrique Ritter de Gregorio

marcosritter@gmail.com

Curso de Engenharia Civil – FACET – Faculdade de Tecnologia e Ciências Sociais Aplicadas – UniCEUB – Centro Universitário de Brasília. SEPN 707/907 Campus Asa Norte, Bloco 7, Brasília/DF. CEP 70790-075. www.uniceub.br

Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa

leonardo@inojosa.com.br

PPG-FAU, Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília. Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília/DF, CEP 70910-900.

Resumo. Neste trabalho, são comparados os modelos híbridos de elementos finitos e os modelos mistos. No modelo misto, as variáveis de deslocamentos e tensões são geradas dentro do domínio do elemento finito de quatro nós enquanto no modelo híbrido, uma variável é gerada dentro do domínio do elemento e a outra, no contorno do elemento. Mostra-se, portanto, a construção de cada modelo e busca-se aplicar a análise plástica limite por meio da programação matemática considerando o critério de Von Mises e Tresca, assumindo-se a hipótese básica de plasticidade associada. Utiliza-se uma representação poliédrica da superfície de escoamento, estudando-se a convergência dos resultados em relação ao número de planos adotados na referida representação.

Exemplos numéricos são mostrados considerando diferentes malhas de elementos finitos híbridos e mistos e os resultados obtidos são comparados com os existentes na literatura.

Palavras-chave: *Elementos Finitos Híbridos e Mistos, Análise Plástica Limite.*

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, comparam-se as formulações dos modelos de elementos finitos híbridos e mistos, considerando um elemento bilinear de quatro nós. Evidenciam-se as principais diferenças nas formulações para a obtenção dos campos de deslocamentos e tensões, obtendo-se as equações de equilíbrio e compatibilidade. Apresentam-se as vantagens e desvantagens de cada modelo e, como exemplo, busca-se a carga de colapso e o mecanismo de colapso plástico em alguns problemas de estado plano de tensões. Utilizam-se os teoremas estático e cinemático da análise plástica limite bem como as linearizações das superfícies de plastificação de Tresca e de von Mises.

2 OS MODELOS MISTO E HÍBRIDO

2.1 Condições estacionárias de princípios variacionais empregados nas formulações de elementos finitos

A adoção de elementos finitos híbridos e mistos, no presente trabalho, foi motivada pelo fato das duas formulações satisfazerem, separadamente, as condições de equilíbrio, compatibilidade e material, permitindo executar a análise plástica limite via programação matemática de forma direta. Ademais, o elemento finito híbrido quadrilátero de quatro nós deve ser, provavelmente, o elemento finito mais preciso em uma ampla gama de problemas de tensão e deformação plana (Zienkiewicz & Taylor, 1995). Uma das vantagens da formulação híbrida de elementos finitos é a possibilidade de utilizar malhas distorcidas e côncavas, viabilizando a modelagem de problemas com geometria irregular.

Mostra-se, resumidamente, os conceitos dos princípios variacionais empregados para a elasticidade linear, destacando-se as principais diferenças entre os modelos híbridos e mistos, tendo por finalidade observar que quando estes modelos são aplicados a problemas discretos, utilizando-se técnicas como elementos finitos, chega-se a resultados mais precisos tanto para os deslocamentos quanto para os esforços (Pian, 1964 e 1995).

Os princípios variacionais da mecânica dos sólidos são comumente utilizados em modelos de elementos finitos e deve-se atentar para o fato de que os princípios variacionais híbridos e mistos buscam pontos estacionários de cada variável primária, os quais não são necessariamente mínimos e máximos. De fato, o funcional pode atingir o mínimo com respeito a um conjunto de variáveis e o máximo com respeito ao outro conjunto de variáveis (Felippa, 2000).

A seguir, descreve-se um esquema de representação dos campos para os princípios variacionais. A representação apresentada está descrita no trabalho do professor Felippa (2000).

$$\text{PRINCÍPIOS VARIACIONAIS} \left[\begin{array}{l} \text{Campo Unitário} \\ \text{Campos Múltiplos} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Misto} \\ \text{Híbrido} \end{array} \right]$$

Quando um funcional é definido usando somente uma variável primária, este funcional é denominado de campo unitário. Os princípios associados aos funcionais de campo unitário são comuns no modelo tradicional do método dos elementos finitos de deslocamentos, que emprega em geral o campo dos deslocamentos como variável primária. O funcional pode também ser

definido em termos do campo de tensões, como variável primária, gerando então um modelo de elementos finitos de tensões. Os funcionais chamados de campo múltiplo têm vários campos como variáveis primárias, isto é, mais de um campo está sujeito a variações independentes.

Na literatura há confusões de nomenclatura sobre campos múltiplos entre campos híbridos e mistos. Campos múltiplos nos modelos do método dos elementos finitos às vezes são chamados de híbridos. Para clarear a situação, o termo misto deve ser reservado para o caso em que os campos primários são campos internos e o termo híbrido deve ser usado quando o funcional inclui um ou mais campos de superfície, além de campos internos estabelecidos (Felippa, 2000).

Três campos internos da elasticidade linear são candidatos para campos primários:

- (i) Deslocamentos (u_i)
- (ii) Deformações (ε_{ij})
- (iii) Tensões (σ_{ij})

A determinação dos campos primários da elasticidade pode ser feita a partir das sete combinações listadas na tabela 1. Os funcionais correspondentes são denominados de funcionais fundamentais da elasticidade: quatro deles têm nomes identificados com modelos de elementos finitos, o quinto funcional não é muito utilizado, o terceiro e o sexto não têm aplicações na engenharia (Felippa, 2000).

Tabela 1. Funcionais fundamentais para a elasticidade linear (campos unitários e mistos) (Felippa, 2000).

TIPO	CAMPO PRIMÁRIO	NOME
CAMPO UNITÁRIO	DESLOCAMENTOS	ENERGIA POTENCIAL TOTAL
	TENSÕES	ENERGIA POTENCIAL TOTAL COMPLEMENTAR
	DEFORMAÇÕES	
DOIS CAMPOS MISTOS	DESLOCAMENTOS E TENSÕES	HELLINGER-REISSNER (HR)
	DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES	De VEUBEKE (dV)
	DEFORMAÇÕES E TENSÕES	
TRÊS CAMPOS MISTOS	DESLOCAMENTOS, TENSÕES E DEFORMAÇÕES	HU-WASHIZU

Na tabela 1, apresentam-se somente os tipos de funcionais de campo unitário ou misto, cujas variáveis primárias são definidas no domínio do elemento. Funcionais híbridos têm um ou mais campos primários que são definidos só na interface ou contorno do elemento. Princípios variacionais híbridos representam uma importante extensão dos princípios clássicos da mecânica. Esta extensão constitui uma tentativa de fortalecer os modelos de elementos finitos. A tabela 2 seguinte descreve dois dos principais modelos híbridos de elementos finitos.

Tabela 2. Exemplos de funcionais híbridos para elementos finitos (Buzar, 2004).

Princípio Híbrido	Campo primário no domínio do elemento	Campo primário no contorno do elemento	Nome
Híbrido de tensão	Tensões	Deslocamentos	Pian Pian-Sumihara
Misto-Híbrido	Tensões e deslocamentos	Deslocamentos	Pian-Tong (diversos)

Elementos finitos baseados em funcionais híbridos, chamados de elementos híbridos, foram apresentados pela primeira vez nos anos 60 (Pian, 1995). O primeiro elemento híbrido desenvolvido não pôde tratar de problemas não lineares e dinâmicos. Entretanto, tais limitações foram gradualmente superadas com o entendimento e evolução dos conceitos básicos. Atualmente, os princípios híbridos representam uma importante área de pesquisa na construção de elementos finitos de alta performance, especialmente para problemas de placas e cascas (Felippa, 2000).

De forma geral nos princípios híbridos consideram-se dois campos distintos de variáveis primárias, sendo o campo de deslocamentos no contorno e o de tensões no interior do elemento. Esta idéia tem levado a um melhor entendimento de um grande número de aplicações técnicas em diversas áreas da engenharia.

Os primeiros trabalhos foram desenvolvidos em dois contextos completamente independentes:

- (ii) Na área de mecânica dos sólidos, Prager (1967) propôs um tratamento variacional de condições de descontinuidade nos corpos elásticos adicionando potenciais de interface. Esta extensão foi realizada para manusear tanto descontinuidades físicas tais como tensões, descolamentos ou diferentes materiais de interface, quanto descontinuidades de campos internos como, por exemplo, as variações bruscas nos valores das tensões em uma trinca.
- (iii) Na área de elementos finitos, Pian (1964) construiu um elemento finito supondo um campo contínuo de tensões no interior do elemento e um campo de deslocamentos na superfície. Este tipo de elemento é agora

conhecido como sendo um elemento híbrido de tensões, representando uma subclasse no conjunto dos elementos híbridos.

Nas décadas de 70 e 80 os princípios variacionais híbridos foram aplicados a modelos de elementos finitos, apresentando pouca evolução. Na década de 90, o assunto foi novamente pesquisado devido ao grande interesse nos modelos de decomposição para diversas aplicações como computação paralela massiva, sistema de identificação, detecção de dano, otimização, acoplagem de malhas e análise em multiescala. Todas essas aplicações têm em comum a subdivisão da geometria do modelo em subestruturas e subdomínios separados por interface. Funcionais híbridos fornecem uma forma geral e elegante de modelar essas interfaces (Buzar, 2004).

2.2 Modelos aperfeiçoados de elementos finitos

O objetivo inicial de se construir os modelos híbridos para o método dos elementos finitos foi a de resolver as seguintes dificuldades notadas em elementos finitos elaborados usando os modelos de deslocamentos:

- (i) Relaxar a continuidade requerida: obter funções de forma para elementos conformes no modelo de deslocamento de placas e cascas de Kirchhoff é difícil porque o mesmo requer continuidade C^1 .
- (ii) Melhorar a solução de deslocamentos: com a evolução de elementos conformes para placas e cascas, notou-se que as malhas grosseiras ou irregulares não produzem bons resultados. O aparecimento de sobre rigidez no elemento requer um tratamento especial, levando a um esforço computacional maior.
- (iii) Melhorar a solução de tensões: a sobre rigidez observada nos elementos elaborados usando o modelo de deslocamentos também compromete a precisão dos resultados relativos aos esforços.

Os três objetivos descritos acima, no sentido de melhorar a performance dos elementos finitos de deslocamentos, motivaram a utilização dos elementos híbridos na análise linear elástica. A extensão para dinâmica e análise não linear não pôde ser feita inicialmente por uma carência de conhecimento em relação aos deslocamentos no interior do elemento, os quais são necessários para a obtenção da matriz de massa e a matriz geométrica do elemento. Estas matrizes são obtidas mais facilmente adotando-se um campo de deslocamentos no interior do elemento, o que pode levar a formulação de um elemento híbrido-misto.

Pode-se perguntar por que então não usar o princípio variacional misto ao invés de híbrido. Princípios mistos são simples de entender e parecem dar resultados com boa precisão. Só que no caso de geometrias irregulares em problemas tridimensionais, os métodos mistos não tem conseguido o sucesso dos métodos híbridos. Em recentes trabalhos, calculam-se as componentes internas por intermédio de funcionais mistos como o de Hellinger-Reissner, e utilizam-se funcionais híbridos para superfície (Felippa, 2000).

2.3 Elementos de tensão híbrido linear

Na figura 1, mostra-se a construção de um elemento finito híbrido linear quadrilátero de tensão plana. O elemento tem espessura h , as propriedades do material são constantes e a relação constitutiva $\varepsilon = C\sigma$ é expressa na forma flexibilidade, onde $C = D^{-1}$. Para simplificar

a construção do elemento deve-se assumir que o campo das forças de corpo b seja nulo. O elemento empregado nesse trabalho para formular o modelo híbrido de elementos finitos é o elemento quadrilátero de tensão plana baseado no elemento desenvolvido por Pian (1964). O elemento é esquematizado na figura 1.

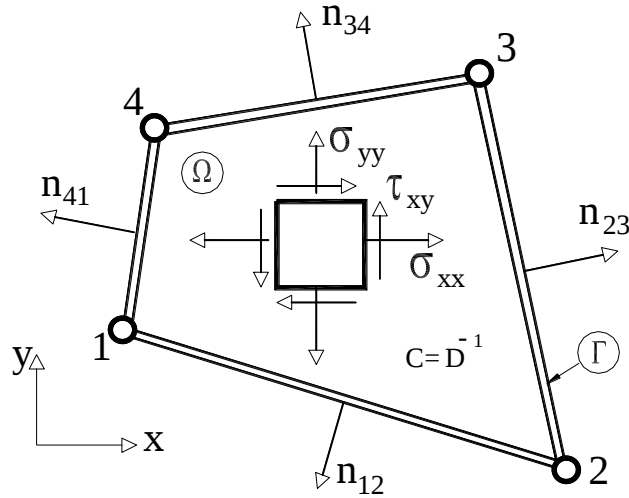


Figura 1. Elemento quadrilátero bilinear e de contorno linear de tensão plana (Felippa, 2000).

Na figura 1, mostra-se esquematicamente o elemento interno com a definição das tensões para o elemento bilinear de tensão plana considerando altura constante. Pode-se observar também o elemento de contorno definido na superfície do elemento. Note-se que, para facilitar a visualização, o elemento interior é mostrado esquematicamente separado dos elementos de contorno.

O desenvolvimento de funcionais híbridos para a formulação dos modelos de elementos finitos híbridos foram apresentados em detalhe, por exemplo, em Pian, 1964 e 1995. O funcional utilizado na montagem do elemento híbrido é obtido pela soma de outros dois funcionais, ou seja, o funcional no interior (domínio) e o potencial de interface (contorno). A expressão (1) representa o funcional utilizado em elementos híbridos de tensão (Felippa, 2000) (Buzar, 2001; 2002 e 2004).

$$\pi_C^u(\sigma_{ij}, u_i) = -U_C + W_d = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV + \int_S u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{St} u_i \hat{t}_i dSt \quad (1)$$

Onde $\pi_C^u(\sigma_{ij}, u_i)$ é o funcional de campo múltiplo híbrido (σ e u); U_C é a energia complementar em termos das tensões; W_d é o trabalho potencial; σ é o tensor de tensões; D é o tensor da relação constitutiva; u é o vetor de deslocamentos; V é o volume; S é a superfície; St é a parte da superfície onde existem carregamentos e $\hat{t}$ é o vetor de forças de superfície prescritas.

O funcional apresentado na expressão (1) empregado na construção do elemento finito híbrido, considerado neste trabalho, utiliza para a interpolação das tensões a relação

$$\sigma = \Psi \alpha \quad (2)$$

sendo Ψ a matriz que interpola as tensões, e α são os parâmetros de tensões.

O funcional da expressão (1) pode ser escrito para todo o domínio e contorno do problema discretizado como

$$\pi_C^u = \alpha^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (3)$$

onde $\mathbf{G}$ é dado por

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma(e)} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Phi} d\Gamma \quad (4)$$

sendo $\dot{\mathbf{u}}$ as taxas de deslocamentos no problema discretizado, $\mathbf{P}$ o vetor de cargas nodais e $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz das funções de forma para o elemento linear de contorno descrito na superfície do elemento finito híbrido quadrilátero de tensões planas.

Fazendo π_C^d estacionário em relação aos deslocamentos, tem-se

$$\frac{\partial \pi_C^u}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{G} \alpha - \mathbf{P}^T = 0 \quad (5)$$

ou

$$\mathbf{G} \alpha = \mathbf{P}^T \quad (6)$$

A expressão (6) é uma relação de equilíbrio entre as cargas nodais $\mathbf{P}$ e os parâmetros de tensão α , sendo $\mathbf{G}$ uma matriz de equilíbrio em termos dos parâmetros de tensão, integrada no contorno do elemento finito híbrido.

Uma das vantagens do elemento finito híbrido é a possibilidade do uso de malhas com elementos finitos de lados côncavos, tendo ângulos maiores que 180 graus entre os lados do mesmo elemento finito. Esta distorção só é possível pelo fato da matriz de equilíbrio ser independente do cálculo das tensões no domínio do elemento, pois o equilíbrio se dá no contorno do elemento, produzindo uma matriz de rotação e não uma matriz de transformação de coordenadas como ocorre com o elemento finito misto. Este fato simplifica a obtenção do comprimento real dos lados do elemento distorcido por meio do uso de cossenos diretores, o que viabiliza a utilização dos elementos finitos com malhas distorcidas e côncavas para a modelagem de problemas com a geometria irregular. Elementos finitos com malhas côncavas são mostrados, adiante, no item exemplo de aplicações numéricas.

2.4 Elementos finitos mistos

O elemento finito híbrido emprega uma formulação na qual considera que as variáveis primárias são as tensões no domínio e os deslocamentos na superfície do elemento enquanto que no caso do elemento finito misto, as variáveis primárias são as tensões e deslocamentos definidos somente no domínio do problema. Ambas as formulações possibilitam obter de forma direta e separadamente as equações de equilíbrio, compatibilidade e de material, permitindo a construção dos modelos de programação matemática para o critério estático e cinemático da análise plástica limite de forma direta. Em seguida, desenvolvem-se as equações de equilíbrio e de compatibilidade para o elemento finito misto através da utilização do princípio dos trabalhos virtuais.

O desenvolvimento do elemento finito misto parte do elemento bilinear de classe C_0 empregado no modelo de deslocamento e pode ser melhor visualizado conforme a figura 2. Pode-se representar os deslocamentos de qualquer ponto através do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}$ (u_i, v_i) dos nós dos elementos e de suas funções de forma ϕ_i . Para facilitar adota-se um sistema de coordenadas ξ, η para definir a geometria do elemento. Essas coordenadas, denominadas de naturais, estão normalizadas de maneira que os elementos tenham os lados $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ como se mostra na referida figura, sendo x_c e y_c as coordenadas do centro do elemento.

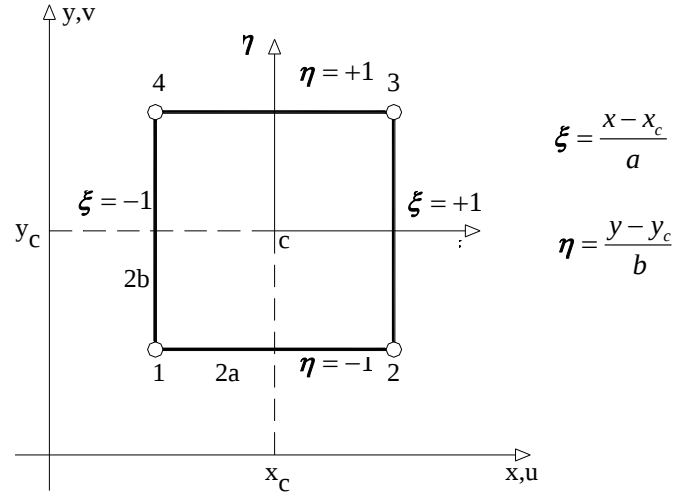


Figura 2. Elemento finito bilinear de quatro nós (Buzar, 2004).

Considerando-se um corpo submetido a um estado de deformação plana e tendo em vista que o presente trabalho trata-se de análise limite, a cinemática do problema será descrita em termos de velocidades. Assim, o campo de velocidades pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Adotando-se uma interpolação para o campo de velocidades pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{u}} = \Phi_u \dot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (8)$$

onde $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidades; Φ_u é a matriz de funções de interpolação; e $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ é o vetor de velocidades nodais para um elemento.

Considerando-se que o vetor de taxas de deformações em função das velocidades nodais seja,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{nne} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \dot{\mathbf{u}}_i \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \dot{\mathbf{v}}_i \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \dot{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{nne} \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \quad (9)$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz de deformação generalizada do elemento.

e definindo-se o campo de tensões independentes da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

e adotando-se uma interpolação linear para o campo de tensões

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi_{\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (11)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões em um ponto qualquer no domínio do elemento; Φ_{σ} é a matriz de funções de interpolação; e $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ é o vetor de tensões nodais para um elemento.

Considerando-se um elemento de deformação plana no qual atuam cargas distribuídas $\mathbf{p}$ nos lados do elemento e $\bar{\mathbf{p}}$ nos nós do elemento, pode-se escrever o princípio dos trabalhos virtuais como

$$\iint_A \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \iint_A \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} dA + \delta \dot{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}} \quad (12)$$

substituindo-se (8), (9) e (11) em (12), obtém-se

$$\iint_A \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \Phi_{\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} dA = \iint_A \delta \dot{\mathbf{u}}^T \Phi_u^T \mathbf{p} dA + \delta \dot{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}} \quad (13)$$

ou

$$\left(\iint_A \mathbf{B}^T \Phi_{\sigma} dA \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \iint_A \Phi_u^T \mathbf{p} dA + \bar{\mathbf{p}} \quad (14)$$

Definindo-se

$$\bar{\mathbf{L}} = \iint_A \mathbf{B}^T \Phi_{\sigma} dA \quad (15)$$

e

$$\mathbf{P} = \iint_A \Phi_u^T \mathbf{p} dA + \bar{\mathbf{p}} \quad (16)$$

a Eq. (14) se torna

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} \quad (17)$$

A matriz $\mathbf{L}$ na relação de equilíbrio (17) é denominada matriz de equilíbrio, relacionando as tensões nodais $\boldsymbol{\sigma}$ com as cargas nodais $\mathbf{P}$ aplicadas, em um elemento de deformação plana. Levando-se em conta a dualidade estático-cinemática, pode-se escrever a relação entre taxa de deformação nodal generalizada $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e velocidade nodal $\dot{\mathbf{u}}$ como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (18)$$

As expressões (17) e (18) representam a condição de equilíbrio e a condição de compatibilidade, respectivamente, para um elemento finito misto.

3 RELAÇÕES FUNDAMENTAIS DE PLASTICIDADE

A seguir descrevem-se as relações fundamentais de plasticidade representadas por condições de resistência e leis de fluxo Plástico.

3.1 Condições de resistência

Adota-se neste trabalho para as condições de resistência os critérios de plastificação de Tresca e de von Mises bem como as suas respectivas linearizações.

3.1.1 Critério de plastificação de Tresca

De acordo com este critério, a plastificação pode ocorrer quando for atingido o valor extremo da tensão de cisalhamento. Qualquer estado de tensão localizado dentro da superfície de escoamento é considerado como um estado de tensão elástico.

A representação matemática da superfície de escoamento de Tresca, escrita em função das tensões nominais, é

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (19)$$

No presente trabalho, a expressão (19) é linearizada da mesma forma utilizada para linearizar a superfície de Mohr-Coulomb, conforme descrito em Buzar (2004), tomando-se o ângulo de atrito como $\phi = 0^\circ$ e a coesão como a tensão de escoamento do material $c = \sigma_o$.

3.1.2 Critério de plastificação de von Mises

Este critério assume que o escoamento começa quando a energia de distorção atinge um valor igual à energia de distorção de escoamento em um ensaio de tração simples. O critério foi sugerido por von Mises em 1913 e é também conhecido como teorema da energia distorcional.

A superfície de escoamento de von Mises, escrita em função das tensões nominais, é

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (20)$$

Para a linearização da superfície de von Mises considera-se inicialmente um oitavo do elipsóide, utilizando-se 1, 2, 4 ou 9 planos. Usando estes planos como base e através de uma matriz de sinais, geram-se sistemas de 8, 16, 32 e 72 planos, respectivamente, para o elipsóide completo, conforme detalhado em Buzar (2004).

É possível então definir as condições de resistência (19) e (20), nos pontos de controle de desenvolvimento da plasticidade do sistema estrutural, utilizando-se uma representação poliédrica da superfície de ruptura de forma linearizada, como

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \sigma^* \quad (21)$$

onde $\mathbf{n}$ é a matriz de normalidade e σ^* é o vetor das capacidades plásticas.

As condições de plastificação expressas em (21) são funções do vetor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$. Como no presente trabalho, adota-se uma formulação de elementos finitos híbridos, para que seja possível a montagem do problema de programação linear equivalente ao critério estático e cinemático, da análise plástica limite, é necessário substituir (2) em (21), chegando-se a

$$\mathbf{n}^T \Psi \boldsymbol{\alpha} \leq \sigma^* \quad (22)$$

3.2 Leis de fluxo plástico

Devido à consideração de plasticidade associada e levando-se em conta a relação (22), as leis de fluxo plástico em termos de taxas de deformação (Maier, 1968), podem ser escritas

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (23)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* \geq \mathbf{0} \quad (24)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*$ é o vetor das taxas dos multiplicadores plásticos nos pontos de controle da plasticidade e o sobrescrito p refere-se à parcela plástica do vetor das taxas de deformação generalizada.

Alternativamente, pode-se escrever as leis de fluxo plástico, para o elemento finito híbrido, em uma forma linearizada como

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \Psi^T \mathbf{n} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* \quad (25)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \geq \mathbf{0} \quad (26)$$

4 ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE

Com a linearização do critério de escoamento, a análise plástica limite pode ser efetuada pela solução de problemas duais de programação linear (PL's), associados aos teoremas estático e cinemático da plasticidade. Alternativamente, ela pode ser realizada através de um problema de complementaridade linear (PCL), o que representa as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), necessárias e suficientes para a obtenção das soluções ótimas dos PL's duais (Smith, 1990). No presente trabalho, a análise plástica limite é realizada por meio tanto do PL associado ao teorema estático quanto do associado ao teorema cinemático, conforme apresentado por Sahlit (1992) e Mello & Sahlit (1993).

4.1 Teoremas estático e cinemático da análise plástica limite

Os teoremas estático e cinemático para os modelos híbrido e misto foram obtidos em trabalhos anteriores dos autores Buzar (2002 e 2003), e são sumarizados na tabela 3.

Tabela 3. Problemas de programação matemática linear (PLs) associados aos teoremas estático e cinemático para os modelos híbridos e mistos de elementos finitos (Buzar, 2004).

PLs	OBJETIVO	MODELO HÍBRIDO	MODELO MISTO
CINEMÁTICO	Minimizar	$\boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \mathbf{P}_f^T \dot{\mathbf{u}}$	$\boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \mathbf{P}_f^T \dot{\mathbf{u}}$
	Sujeito a	$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v^T \\ \Psi^T \mathbf{n} & -\mathbf{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v^T \\ \mathbf{n} & -\mathbf{L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
		$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \geq \mathbf{0}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \geq \mathbf{0}$
	Maximizar		
ESTÁTICO	Sujeito a	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{n}^T \Psi \\ \mathbf{P}_v & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{P}_f \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{n}^T \\ \mathbf{P}_v & -\mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{P}_f \end{bmatrix}$
		$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \geq \mathbf{0}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \geq \mathbf{0}$

Na tabela 3, mostram-se os problemas de programação matemática associados aos critérios estático e cinemático para os modelos de elementos finitos híbridos e mistos. Pode-se observar que as diferenças nos Pls decorrem da teoria dos elementos finitos. A formulação do elemento finito misto leva a uma matriz de equilíbrio L , definida na Eq. (15), a partir de integração no domínio. No caso do elemento finito híbrido a formulação leva a uma matriz de equilíbrio G , definida na Eq. 4, que é uma integral sobre o contorno do elemento finito. Além disto podemos observar que o elemento finito misto envolve as incógnitas de tensões nominais σ_x , σ_y e σ_{xy} . Já o elemento finito híbrido trabalha com cinco parâmetros de tensões α_1 , α_2 , α_3 , α_4 e α_5 . Na tabela 4 mostram-se as equações de equilíbrio para os modelos híbrido e misto.

Tabela 4. Equações de equilíbrio para os modelos híbridos e mistos (Buzar, 2004).

Modelo numérico	Matriz de equilíbrio	Incógnita	Carga	Equação de equilíbrio
Finito misto	$\mathbf{L} = \iint_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \Psi dA$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{p}$	$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p} = 0$
Finito híbrido	$\mathbf{G} = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \Psi^T \Phi d\Gamma$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f} = 0$

A seguir, considera-se um exemplo numérico obtido aplicando modelos de elementos finitos híbridos e mistos para problemas de programação matemática linear empregando-se tanto o critério estático quanto o critério cinemático.

5 EXEMPLO DE APLICAÇÕES NUMÉRICAS

No presente trabalho, os problemas de programação linear associados aos teoremas estático e cinemático, obtidos por meio da representação poliédrica em hiperplanos das superfícies de ruptura de Tresca e de von Mises são resolvidos utilizando-se o software comercial LINDO (Linear Interactive Discrete Optimizer), (Schrage, 1991), versão 5.3 ou alternativamente, o software MINOS. O código computacional para elementos finitos híbridos foi elaborado utilizando-se o software Visual Fortran (Compaq Visual Fortran, 1999). Vale ressaltar que os resultados obtidos com a utilização do teorema estático são semelhantes aos resultados obtidos com aplicação do teorema cinemático.

5.1 Chapa com furo circular no centro discretizada com malha distorcida e côncava

Neste exemplo, pretende-se obter o fator de carga de colapso e o mecanismo de colapso plástico de uma chapa com furo central o que permite o emprego de elementos finitos híbridos distorcidos para discretização da chapa. Neste exemplo, pode-se enfatizar que o elemento finito possui a cavidade côncava, não podendo ser resolvido pelo elemento misto de quatro nós na forma tradicional.

O problema é analisado por meio tanto do critério de plastificação de Tresca quanto do de von Mises a chapa é submetida à carga distribuída de tração de 1KN/m, conforme figura 3. Considera-se que a tensão de escoamento seja $\sigma_o = 1$ KPa e que o peso próprio seja desprezível. A solução analítica para o problema em questão é fornecida em Kaliszky (1989) sendo igual a 0,60. No desenvolvimento da análise são utilizadas três malhas de elementos finitos híbridos com geometria distorcida e côncava conforme figura 4.

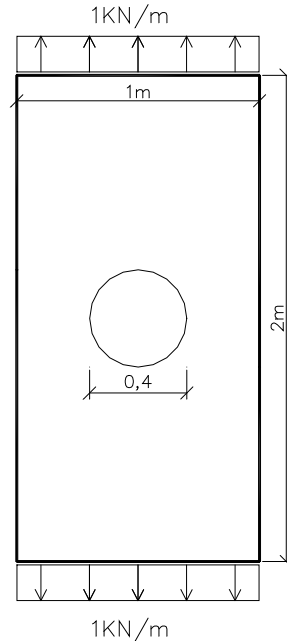


Figura 3. Geometria e carregamento da chapa com furo central (Buzar, 2004).

Na figura 4, apresentam-se as três malhas utilizadas para a discretização do problema.

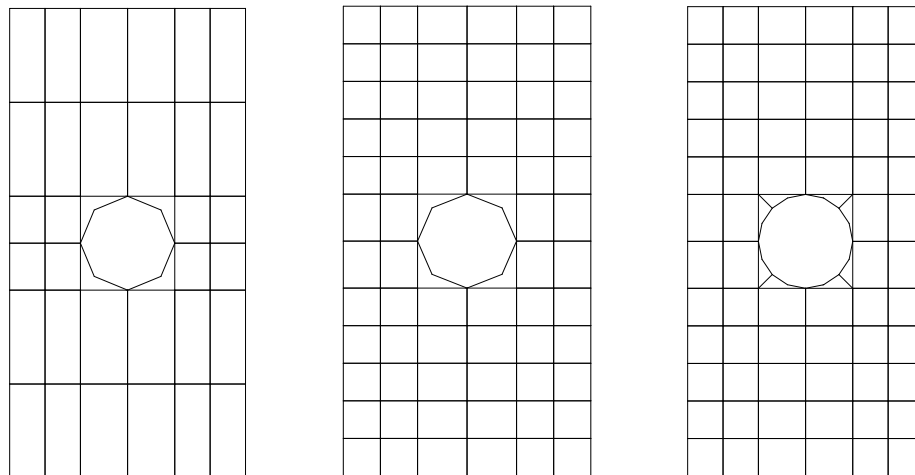


Figura 4. Discretizações adotadas para o elemento finito híbrido de quatro nós (Q4 Híbrido): malha Q4/1 com 52 nós e 36 elementos, (b) malha Q4/2 com 94 nós e 72 elementos, (c) malha Q4/3 com 102 nós e 76 elementos (Buzar, 2004).

Na figura 5, pode-se observar melhor a facilidade introduzida pelo elemento finito híbrido, que permite a modelagem de geometrias curvas discretizadas com o emprego de poucos elementos finitos com lados côncavos.

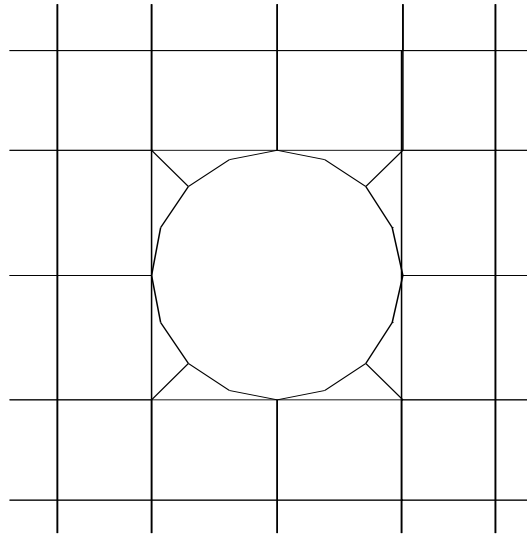


Figura 5. Detalhe da discretização adotada para o elemento finito híbrido de lados côncavos (Buzar, 2004).

Na tabela 5 mostram-se os resultados obtidos com o programa de elementos finitos híbridos para as três malhas utilizando-se os critérios de Tresca e de von Mises. Os resultados obtidos são muito próximos aos valores de referência. É importante salientar a melhoria nos resultados encontrados para a malha Q4/3 que tem somente 4 elementos a mais em relação à malha Q4/2. Isto só é possível pelo fato do elemento finito híbrido poder representar melhor a geometria do problema conforme figura 4.

Tabela 5 - Fator de carga de colapso para o critério de plastificação de Tresca e von Mises em função da malha em elementos finitos e do número de planos de linearização da superfície (Buzar, 2004).

Malha	NN	NE	8 Planos		16 Planos		32 Planos		72 Planos	
			Tresca	Mises	Tresca	Mises	Tresca	Mises	Tresca	Mises
Q4/1	52	36	0,6753	0,4876	0,7092	0,5746	0,7161	0,6589	0,7176	0,6695
Q4/2	94	72	0,6206	0,4875	0,6569	0,5735	0,6649	0,6400	0,6663	0,6500
Q4/3	102	76	0,5944	0,4676	0,6272	0,5459	0,6240	0,6154	0,6355	0,6276

Vale ressaltar que os resultados indicados na tabela 5 para as malhas da figura 4, foram obtidos somente com o emprego do elemento finito híbrido. Como as malhas da figura 4 apresentam concavidade em alguns elementos, a adoção do elemento finito misto neste caso produziria singularidade.

Na figura 6 mostram-se os mecanismos de colapso da chapa, para as três malhas consideradas na solução do problema, obtido tanto pelo PL estático quanto pelo PL cinemático conforme tabela 5.

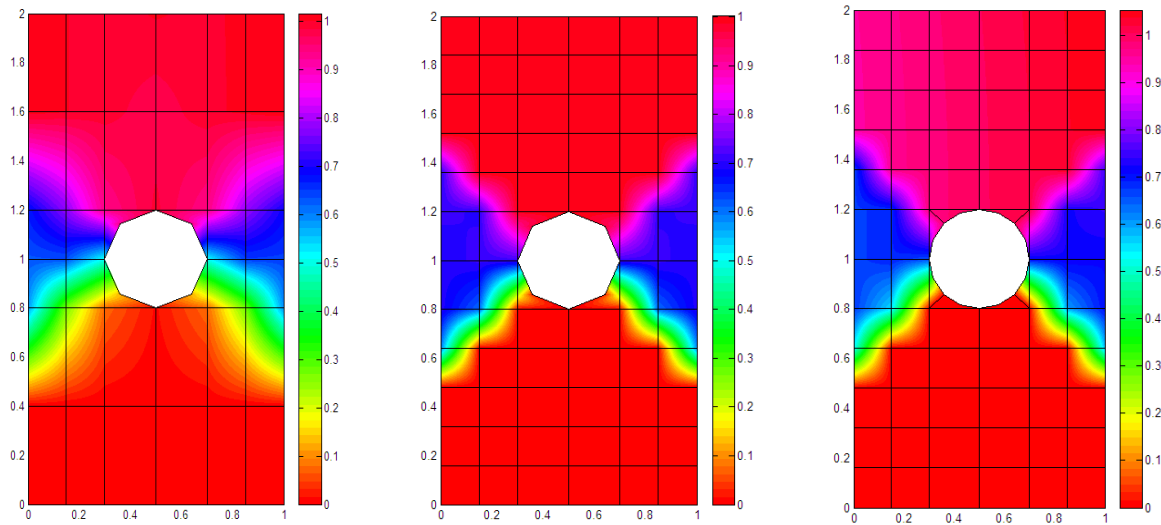


Figura 6. Mecanismo de colapso ilustrado com a biblioteca gráfica OpenGL para a chapa com furo central discretizadas com as malhas: (a) Q4/1, (b) Q4/2, (c) Q4/3 (Buzar, 2004).

6 CONCLUSÕES

Empregam-se neste trabalho os modelos de elementos finitos híbridos e mistos para problemas de programação matemática linear adotando-se os teoremas estático e cinemático da análise plástica limite. Ambas as formulações matemáticas e a implementação numérica dos teoremas estático e cinemático fornecem o fator de carga de colapso bem como o mecanismo de colapso plástico. Adota-se para o elemento finito híbrido uma formulação que considera as variáveis primárias de tensões no domínio e de deslocamentos no contorno do elemento finito (Felippa, 2000). Para o elemento finito misto as variáveis primárias de tensões e deslocamentos são consideradas somente no domínio do elemento.

Na análise do problema de chapa sob tração mostra-se que há convergência dos resultados para o caso de linearização da superfície de Tresca com menos planos que a superfície de von Mises. No exemplo de chapa com furo central pode-se observar uma das vantagens do elemento finito híbrido, que é a possibilidade do uso de malhas com elementos finitos de lados côncavos para a modelagem de problemas com a geometria irregular.

Observou-se, no mecanismo de colapso plástico da chapa, obtido com o programa de elementos finitos híbridos, que a linha de ruptura tende a se definir mais nitidamente na medida em que se aumenta a densidade de elementos na malha. Mesmo a malha com poucos elementos já indica, com razoável precisão, a região onde ocorre a ruptura da chapa.

REFERENCES

Buzar M. A R., Partridge P. W., Sahlit C. L. “Elementos Finitos Híbridos Aplicado à Análise Plástica Limite de Problemas de Estado Plano de Tensões com a Utilização dos Critérios de Tresca e de von Mises”. First South-American Congress on Computational Mechanicsl. Argentina. 2002.

Buzar M. A. R., Sahlit C. L., Partridge P. W. “Determinação da Carga de Colapso Plástico em Problemas de Estado Plano de Tensões”. XXIV CILAMCE, Ouro Preto. 2003.

Buzar, M. A. R., Modelos híbridos de elementos finitos e de contorno aplicados a análise plástica limite em engenharia. Tese (Doutorado). Universidade de Brasília, 2004.

Buzar M. A R., Partridge P. W., Sahlit C. L. “Aplicação De Elementos Finitos Híbridos de Tensão À Análise Plástica Limite de Problemas de Estado Plano de Tensão”. XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. Brasília. 2001.

Compaq Visual Fortran. “Programmer’s Guide: Compaq Visual Fortran Professional” Edition 6.1.0. Digital Equipment Corporation. 1999.

Felippa, C. A. “Advanced Finite Element Methods” (ASEN 5367) – Department of Aerospace Engineering Structures, University of Colorado at Boulder, Colorado. 2000.

Horne M. R. “Plastic Theoty of Structures”. Pergamon Press. Oxford. 1979.

Kalishky S. “Plasticity Theory and Engineering Applications”. Akadémiai Budapest. 1a. Ed. Budapest. 1989.

Maier, G. A. “Quadratic Programming Approach for Certain Classes of Nonlinear Structural Problems”, *Meccanica*, 3:121-130. 1968.

Mello, E. L. & Sahlit, C. L. “Análise Elastoplástica das Estruturas”, Apostilas do Curso de Mestrado em Engenharia Civil, UnB, Brasília. 1993.

Munro I. J. Smith D. L. “Linear Programming Duality in Plastic Analysis and Synthesis”. International Symposium on Computer-Aided Structural Design. 1972.

Neal B. G. The “Plastic Methods of Structural Analysis”. Chapman and Hall. London. 1977.

Pian, T. H. H. “Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions”. *AIAAJ.*, 2, pp 1333-1336. 1964.

Pian, T. H. H. “State-of-the-Art Development of Hibrid/Mixed Finite Element Method”. *Finite Element in Analysis and Design*, 21, 5-20. 1995.

Sahlit, C. L *Mathematical Programming Methods for Dynamically Loaded Rigid-Plastic Framed Structures*, PhD. Thesis, Departament of Civil Engineering, Imperial College, University of London, London. 1992.

Santos Da Silva, L., Farias, M. M. & Sahlit, C. L. “Plastic Limit Analysis in Geotechnics using the Finite Element Method plus Linear and Non Linear Mathematical Programming”, Proceedings of the Seventh International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (VII NUMOG), Graz., 215-220. 1999.

Santos Da Silva, L., Sahlit, C. L. & Farias M. M. “Aplicação da Análise Plástica Limite aos Métodos Probabilísticos em Geotecnia”. Anais do XX Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia (XX CILAMCE), São Paulo. 1999.

Schrage L. “LINDO User’s Manual – Release 5.0”. The Scientific Press. San Francisco. 1991.

Smith, D. L. “Plastic Limit Analysis, Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity”, ed. D. Lloyd Smith (ed.), Springer-Verlag, Vienna, chapter 5, 61-82. 1990.

Zienkiewicz, O. C. & Taylor R. L. “El Método de los Elementos Finitos I e II”, 4 Ed., McGraw-Hill, Madrid. 1995.