



ESTUDO DE UMA METODOLOGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE MECÂNICA ESTRUTURAL UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS E AUTÔMATOS CELULARES

Rodrigo Vieira Cavalcanti

Tiago Peixoto da Silva Lobo

Adeildo Soares Ramos Júnior

Eduardo Nobre Lages

rodrigo-wo@hotmail.com

tiago.lobo@gmail.com

adramos@lccv.ufal.br

enl@lccv.ufal.br

Laboratório de Computação Científica e Visualização - LCCV, Centro de Tecnologia - CTEC, Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Av. Lourival de Melo Mota S/N, Tabuleiro do Martins, 57072-970, Maceió, Alagoas, Brasil

Resumo. Problemas da mecânica estrutural e dos sólidos, como análise de formação de domos salinos na exploração petrolífera e otimizações de estruturas de treliças, apresentam comportamentos globais complexos e muitas vezes sem solução analítica. Métodos numéricos, a exemplo do método dos elementos finitos (MEF), se mostram alternativas para estudo desses sistemas. O autômato celular (AC) é um modelo que se baseia na ideia que o comportamento macroscópico de um sistema pode ser reproduzido por conjuntos menores com simples regras locais. Uma vez que essa abordagem parte de uma microescala para uma macroescala, esta técnica permite o estudo de efeitos microscópicos em objetos macroscópicos de maneira natural, como fraturas em elementos estruturais. Este trabalho estuda convergência e performance de uma técnica híbrida de autômato celular com MEF a partir do desenvolvendo de um módulo computacional capaz de simular problemas de mecânica estrutural e dos sólidos. Em que quatro estratégias de atualizações foram estudadas, avaliando-se a convergência e comparando-se a performance delas para alguns exemplos testes, como de uma viga engastada em uma extremidade e sob tração na outra, com diferentes graus de discretização. Por fim, as estratégias em pauta foram verificadas a partir dos resultados levantados com a resolução clássica do MEF.

Palavras-chave: MEF, autômato celular, mecânica dos sólidos e estrutural.

1 INTRODUÇÃO

Alguns sistemas da mecânica estrutural e dos sólidos apresentam comportamento global bastante complexo ainda que seus componentes fundamentais sejam simples (Wolfran, 1984), como a análise de formação de domos salinos na exploração petrolífera, fraturas em elementos estruturais e otimizações de estruturas de treliças. Métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF), são amplamente usados para simular estes problemas, encontrando soluções aproximadas para eles. O processo de solução consiste na discretização espacial das equações diferenciais governantes, nos levando a um sistema global de equações lineares. Esse sistema é comumente resolvido através de métodos diretos de solução.

O Autômato celular () é um modelo baseado na ideia de que o comportamento macroscópico de um sistema pode ser reproduzido por um conjunto de simples regras locais em um nível microscópico. O estudo dos autómatos celulares atraiu um grande interesse nos últimos anos devido a sua capacidade de gerar um amplo espectro de padrões comportamentais complexos a partir de conjuntos relativamente simples de regras (Gremoini et al, 2008). Esta técnica nos permite resolver problemas que possuem uma complexidade alta (quando resolvido apenas com MEF) de forma natural, como fraturas em elementos estruturais.

Dadas tais características, este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um módulo computacional utilizando uma técnica híbrida de autômato celular e MEF, para estudar a convergência e a performance do método. Em específico, estudamos alguns exemplos testes com diferentes graus de discretização e ordenação, como uma viga engastada em extremidade e sob tração na outra. Analisamos convergência e performance de quatro tipos diferentes de estratégias de atualização do autômato celular.

2 METODOLOGIA

Assumimos como unidade básica do problema barras elásticas lineares. Estas são compostas de dois tipos básicos de entidades: nós e elementos. Esses elementos de barras são considerados suficientemente finos e apresentam resistência à torção, de modo que efeitos de dobragem e cisalhamento são desprezíveis. Por consequência, reduziu-se o problema ao estudo das forças axiais, fazendo com que o comportamento de um elemento de barra seja similar ao de molas elásticas lineares (Jacob et al, 2009).

A formulação do MEF baseia-se nas ideias expostas por Jacob et al (2009) e por Ramos et al (2000). Uma vez que os elementos de barras apresentam comportamentos similares aos das molas, é possível descrever a relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais através da equação de equilíbrio:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

onde $\mathbf{f}$ é o vetor global de forças nodais do sistema, $\mathbf{u}$ é o vetor global de deslocamentos nodais do sistema e $\mathbf{K}$ é a matriz global de rigidez da estrutura. As forças nodais são relacionadas com os deslocamentos nodais por meio da matriz de rigidez, que depende do módulo de Young (módulo de elasticidade), área de secção transversal e comprimento do elemento.

O autômato celular é composto por um conjunto de células com determinados estados, que interagem entre si em função de uma coleção de condições pré-definidas (Gremoini et al, 2008). Esses estados são alterados conforme um conjunto de regras de transição, que dependem da vizinhança e da própria célula (Melotti, 2009). Sendo assim, a fim de integrar o MEF e AC, definiu-se como uma célula o conjunto de todos os elementos finitos de barra ligados a um

nó n_i que tenha ao menos um grau de liberdade livre; onde todos os demais nós $n_{j \neq i}$ pertencentes a esta célula são considerados engastados durante a resolução da célula. Os possíveis valores de deslocamentos para o nó livre da célula são o conjunto de possíveis estados do autômato celular. Cada célula é resolvida individualmente utilizando-se MEF, de modo que a regra de transição do autômato é a Eq. (1) de equilíbrio.

O módulo computacional desenvolvido gera as células a partir de uma malha de elementos de barra; cada célula é então resolvida individualmente e uma estratégia de atualização é empregada para que os novos valores dos campos sejam corrigidos (Fig. 1-a), passo que se repete até o sistema entrar em equilíbrio. Foram então desenvolvidas quatro regras de atualização de informações: força com MEF, força atualizada com MEF, deslocamento com MEF e deslocamento atualizado com MEF. Em todas as regras de transição cada célula é resolvida individualmente com MEF empregando as relações da Eq. (1), e a cada passo a informação da evolução da célula é passada para as outras de acordo com uma regra de atualização pré-definida (Feng et al, 2006).

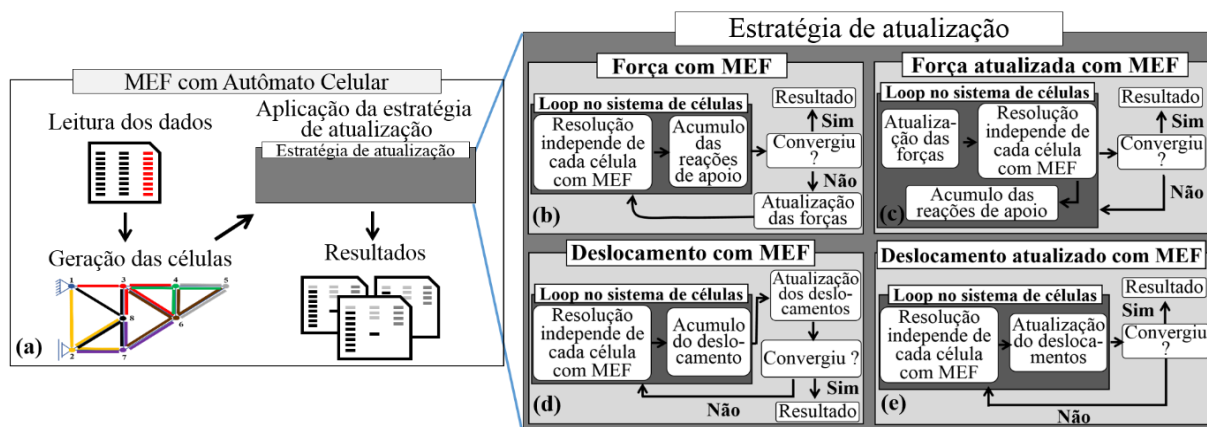


Figura 1. (a) MEF com autômato celular. Estratégias de atualização: (b) Força com MEF, (c) Força atualizada com MEF, (d) Deslocamento com MEF e (e) Deslocamento atualizado com MEF.

Na estratégia de força com MEF, a informação repassada entre as células é a força. A cada passo as células são resolvidas individualmente com MEF, acumulando-se as reações de apoio, que são então combinadas com as forças externas no próximo passo, ocorrendo a atualização das forças do sistema ao final de cada passo (Fig. 1-b). A força atualizada com MEF é análoga à estratégia anterior, em que usa-se a transferência de forças através das células para encontrar o deslocamento sofrido por cada nó. Contudo as reações de apoio são combinadas e repassadas como forças externas no próprio passo à medida que é resolvida cada célula, ou seja, elas são atualizadas ao final da resolução de cada célula e não ao final do passo (Fig. 1-c).

No deslocamento com MEF, diferentemente das estratégias anteriores, a informação transferida entre as células é o deslocamento. Em cada passo as células são resolvidas de forma independente com MEF e os deslocamentos dos nós de referência das células são transferidos como recalques de apoio no próximo passo. A atualização dos deslocamentos do sistema ocorre ao final de cada passo (Fig. 1-d). No deslocamento atualizado com MEF, em cada passo, todas as células são resolvidas gradativamente, análogo a estratégia anterior, porém os deslocamentos dos nós de referência das células são transferidos como recalques de apoio no próprio passo. Ou seja, a atualização de deslocamentos ocorre ao final da resolução individual de cada célula (Fig. 1-e).

No critério de parada usado, considerando-se u_t o deslocamento no passo atual e u_{t-1} o deslocamento no passo anterior, o programa converge quando ocorre para cada nó referência:

$$|u_t - u_{t-1}| < |p * u_{t-1}| \quad (2)$$

onde p é o parâmetro que mensura a mudança requerida do deslocamento.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Implementou-se o módulo computacional em MATLAB com as quatro estratégias de atualização do sistema usando autômato celular com MEF. Foram testados diversos problemas com diferentes configurações, obtendo-se respostas coerentes com a resolução clássica do MEF e com os resultados analíticos.

Utilizou-se o exemplo de uma barra engastada em uma extremidade e sob tração na outra (Fig. 2-a) com diferentes graus de discretização ($n = 3, 5, 15, 20, 30, 40, 50, 75, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700$ nós) e ordenação. Usou-se também o exemplo de uma barra articulada nas duas extremidades e sujeito à uma força no seu segmento médio (Fig. 2-b) com diferentes graus de discretização ($n = 5, 9, 15, 25, 35, 45, 55, 75, 105, 155, 205, 305, 405, 505, 605$ nós) e ordenação. Para tanto, empregou-se $p = 10^{-6}$ no critério de parada da Eq. (2). Verificou-se comportamento semelhante para os dois exemplos.

Analisando a convergência para os problemas, percebeu-se que para altos graus de discretização o programa não alcançava a resposta correta. A Fig. 2-c apresenta a evolução da diferença total dos deslocamentos entre passos consecutivos com a quantidade de passos, mostrando que mesmo que o programa não tenha alcançado a resposta para a condição de parada estabelecida, nota-se que a solução está convergindo. O problema tente a um valor, porém a condição de parada adotada ($p = 10^{-6}$) não foi o suficiente para que isso ocorresse. Ou seja, se mantivermos p constante e aumentarmos a quantidade de nós, o problema necessita de uma quantidade maior de passos para convergir.

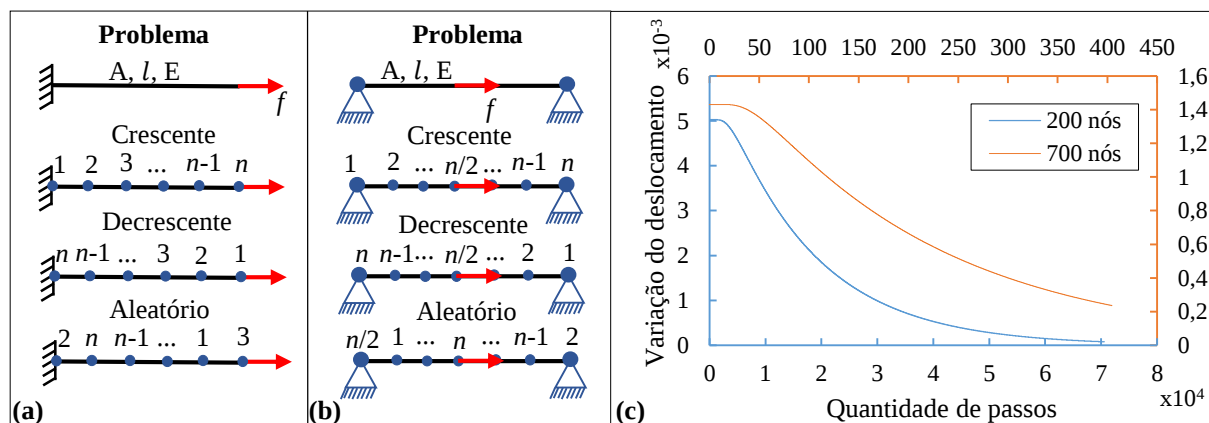


Figura 2. (a) e (b) são exemplos os testados, onde: A é a área de seção transversal, l é o comprimento da barra, E é o módulo de elasticidade, f é a força aplicada e n é o número de nós. (c) Relação entre a variação total dos deslocamentos e a quantidade de passos para um caso que converge (200 nós) e para outro caso que não converge (700 nós).

A Fig. 3 mostra a velocidade de convergência do modelo para diferentes ordenações. Observa-se que as estratégias de solução de deslocamento atualizado com MEF e força atualizada com MEF se comportaram de maneira parecida e apresentaram melhor velocidade de convergência. Além disso observa-se para os exemplos testados, que a ordem das células não influenciou na velocidade de convergência.

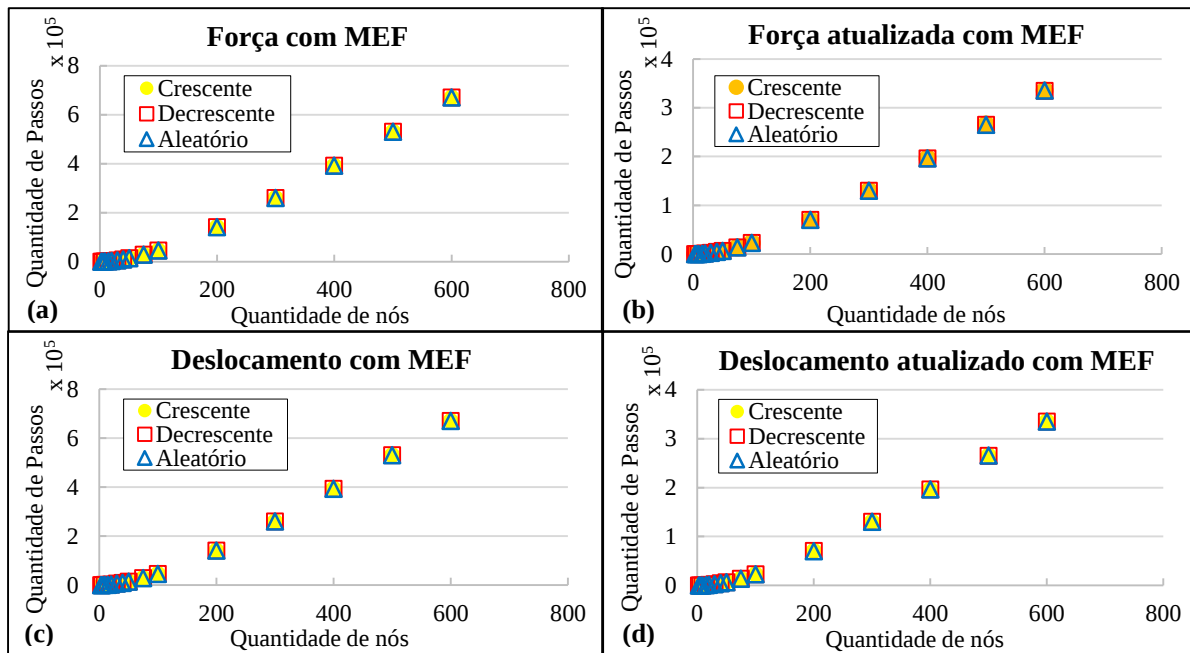


Figura 3. Quantidade de passos para diferentes ordenações dos nós utilizando (a) Força com MEF, (b) Força atualizado com MEF, (c) Deslocamento com MEF e (d) Deslocamento atualizado com MEF.

4 CONCLUSÕES

Das quatro estratégias de atualizações testadas, o deslocamento atualizado com MEF e força atualizada com MEF apresentaram menor tempo de execução e um menor número de passos para atingir os mesmos resultados das demais estratégias. Notou-se também que a ordem dos nós não influenciou na quantidade de passos. Contudo, observou-se uma limitação quanto aos resultados para grandes quantidades de nós, uma vez que o método iterativo testado converge em um tempo muito maior que o método de solução direta do MEF clássico. Uma pesquisa de pré-condicionadores é necessário para investigar se há uma maneira de otimizar a convergência do modelo híbrido.

REFERÊNCIAS

- Feng, X. T. et. Al, 2006. Simulation of the rock microfracturing process under uniaxial compression using an elasto-plastic cellular automaton. *International. Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. vol. 43, n 7, p. 1091-1108.
- Gremonini, L., Vicentini, E., 2008. *Autômatos celulares: Revisão bibliográfica e exemplos de implementações*. Revista Eletrônica Lato Sensu – Unicentro, Ed. 6.
- Jacob, F., Belytschko, T., 2009. *Um Primeiro Curso em Elementos Finitos*. Editora LTC.
- Melotti, G., 2009. *Aplicação de autômatos celulares em sistemas complexos: um estudo de caso em espalhamento de epidemias*. Dissertação de mestrado em engenharia elétrica, Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Ramos Jr, A. S.; Vieira, L. C. L., 2000. *Formulação Matemática e Implementação Computacional no MATLAB de Modelos Físicos Discretos*. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE 2000. CD dos Anais do COBENGE 2000.
- Wolfran, S., 1984. Cellular automata as models of complexity. *Nature*, vol. 311, n. 5895, p 419-424.