



MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS EXPLÍCITO COM AJUSTE LOCAL DO PASSO DE TEMPO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

Alexandre J. M. Antunes / Regina C. P. Leal-Toledo

{aantunes,leal}@ic.uff.br

Instituto de Computação - Universidade Federal Fluminense

Rua Passos da Patria, 156, 24210-346, Niteroi - Rio de Janeiro, Brasil

Elson Magalhães Toledo

emtc@lncc.br

LNCC/UFJF

Rua Getulio Vargas, 333, 25651-075, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

Otton Teixeira da Silveira Filho / Eduardo Marques

otton@ic.uff.br / emarques@puro.uff.br

Instituto de Computação - Universidade Federal Fluminense

Rua Passos da Patria, 156, 24210-346, Niteroi - Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. Métodos de Diferenças Finitas (*MDF*) explícitos são amplamente empregados para simulações numéricas em problemas de sísmica. Nesses casos o meio é heterogêneo e para garantia de solução precisa e estável há necessidade de se utilizar discretizações refinadas para as variáveis espaciais e temporais conduzindo a problemas de grandes dimensões. Algoritmos adaptativos de ajuste da discretização temporal podem ter fundamental importância na redução do custo computacional. Neste trabalho apresenta-se uma análise da precisão e a eficiência computacional do método da Região de Transição Triangular (RTT), que é um algoritmo de adaptatividade temporal aplicado a equação da onda acústica a ser aplicado em domínios heterogêneos. Avalia-se sua precisão e como seu custo computacional varia com as diferentes proporções das sub-regiões de um domínio heterogêneo. Sua aplicabilidade em casos de estruturas geológicas com mapas de velocidades complexos também é apresentada.

Keywords: *diferenças finitas, adaptatividade temporal, onda acústica*

1 INTRODUÇÃO

A simulação da propagação de ondas sísmicas, tanto na Modelagem Sísmica como na Migração Reversa no Tempo, pode permitir a obtenção de informações importantes a respeito das estruturas geológicas que se encontram em sub-superfície. A solução numérica dos modelos matemáticos utilizados para a realização dessas simulações envolve milhões de graus de liberdade a serem determinados a cada instante de tempo e realizar essas simulações de forma eficiente envolve tanto a busca de modelos numéricos suficientemente robustos, que sejam estáveis e precisos, quanto uma computação eficaz, capaz de viabilizar os cálculos a serem realizados.

Métodos de Diferenças Finitas (MDF) explícitos têm sido frequentemente utilizados na solução numérica desses problemas e, neste caso, o refinamento das discretizações espacial e temporal estão relacionados ao menor comprimento de onda que deve ser capturada e limitado pela condição de estabilidade do método utilizado, respectivamente (Kelly et al, 1976; Bulcão, 2004; Bartolo, 2012). A precisão destes métodos depende da ordem de aproximação dos operadores de diferenças finitas e do refinamento da malha. Malhas mais refinadas resultam em aumento de precisão acarretando, entretanto, crescimento substancial no uso de memória e tempo de processamento, podendo tornar o custo computacional destes métodos proibitivos para a modelagem de problemas realistas. No caso de aplicações do MDF em domínios heterogêneos, como ocorre nos problemas de sísmica, os algoritmos convencionais usam, para garantir a estabilidade numérica da solução, a discretização temporal dada pelo menor passo de tempo, definido pela sub-região do domínio com a maior velocidade de propagação da onda. Dessa forma, existem diversos estudos em busca de uma solução precisa e viável computacionalmente para esse problema, entre elas, esquemas de diferenças finitas de malha variável (Wang, 2000, Liu e Sen, 2011), utilização de operadores de alta ordem para aproximar as derivadas espaciais e temporais (Fornberg, 1987; Chen, 2007) e embora a maioria dos algoritmos utilizados para resolução desse problema utilizem métodos explícitos, existem trabalhos que analisam a utilização de métodos implícitos (Liu e Sen, 2009; Chua e Stoffab, 2012).

Nesse contexto, alguns algoritmos que utilizam passos de tempos ajustados localmente têm sido propostos para otimizar o custo computacional com a adoção de incrementos de tempo diferentes para cada sub-região com diferentes características físicas no domínio considerado. Falk et al. (1998) propuseram um algoritmo com o ajuste local do passo de tempo no MDF para a solução da equação da onda elástica no qual os passos de tempo utilizados em todas sub-regiões têm que ser proporcionais a 2^n , sendo n um valor inteiro. Um novo algoritmo foi sugerido por Tessmer (2000), também para ser utilizado com o MDF permite que a relação entre os passos de tempo utilizados seja apenas proporcional a um valor positivo e inteiro n . Ambos algoritmos usam passos de tempo estáveis em cada sub-região do domínio heterogêneo considerado reduzindo o esforço computacional se comparados ao MDF convencional, com discretização temporal constante, e funcionando bem em domínios heterogêneos quando utilizam-se incrementos de tempo limitados por valores inferiores muito aquém do limite de estabilidade de cada região. A precisão dos resultados pode, no entanto, ser afetada, com o aparecimento de um *ruído* no sinal da onda quando os passos de tempo utilizados estão próximos ao limite de estabilidade do método (Antunes, 2012; Antunes et al 2014). Devido a isso, um outro algoritmo de passo de tempo ajustado localmente foi proposto, chamado de Algoritmo da Região de Transição Triangular (RTT)(Antunes et al, 2014). Em todos os testes realizados este algoritmo permaneceu estável, mesmo quando são utilizados passos de tempo bastante próximos

do limite de estabilidade de cada sub-região do domínio heterogêneo. Utilizar incrementos de tempo próximos ao limite de estabilidade do método, além de reduzir o esforço computacional envolvido na solução do problema, também minimiza os erros de dispersão (Alford et al, 1974).

Como nos outros algoritmos de ajuste local do incremento de tempo, o algoritmo RTT também reduz o custo computacional do MDF e a quantidade desta redução está diretamente relacionada com o domínio a ser analisado, quer por intermédio da relação entre os valores das diferentes velocidades de propagação existentes, quer pela dimensão de cada sub-região.

Este trabalho pretende avaliar a precisão e eficiência computacional do algoritmo RTT e para isso apresenta, na Seção 2, a equação a ser resolvida, o método das diferenças finitas, e também fazem-se considerações sobre o erro de dispersão em domínios heterogêneos. Algoritmos com passos de tempo ajustados localmente são apresentados na Seção 3, incluindo o algoritmo RTT, objeto de análise do presente trabalho. A Seção 4 apresenta resultados numéricos para avaliar a precisão e eficiência computacional do esquema RTT. Para avaliar a precisão do algoritmo RTT, os resultados para diferentes discretizações espaciais, são comparados com o MDF convencional, com discretizações temporal e espacial constantes, e com um resultado de referência. A eficiência computacional deste algoritmo é avaliada variando-se as dimensões das diferentes sub-regiões do domínio heterogêneo, para diferentes aproximações de diferenças finitas, comparando-se o custo computacional com o algoritmo MDF convencional. Para finalizar apresentam-se resultados sobre o número de operações envolvidas na solução de um problema com um mapa de velocidades mais complexo. Neste caso, avalia-se também diferentes possibilidades de combinações de discretizações temporais do algoritmo RTT, que são comparadas a outros algoritmos adaptativos. Finalmente a Seção 5 apresenta as conclusões do presente trabalho, fazendo comentários em relação à aplicabilidade do algoritmo RTT.

2 EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA E O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A equação da onda acústica para problemas bidimensionais, (2D), pode ser descrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad (1)$$

onde $u = u(x, y, t)$ é a amplitude da onda em função das variáveis espaciais, direções x e y , t é a variável temporal, c , a velocidade de propagação da onda no meio e $f(x, y, t)$ é o termo de fonte. Além disso fornece-se também condições iniciais, $u(x, y, 0) = g(x, y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = h(x, y)$, $\forall x, y \in \Omega$ e condições de contorno adequadas.

Para avaliar a eficiência do método adaptativo a ser analisado utiliza-se, neste trabalho, o Método de Diferenças Finitas (MDF) explícito, com aproximações de segunda ordem no tempo e de segunda e de quarta ordens para aproximar as derivadas espaciais. A aproximação explícita de diferenças finitas para a equação da onda acústica, utilizando-se aproximações de segunda ordem no tempo e no espaço, $MDF(2-2)$, é dada por:

$$\mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} = 2\mathbf{u}_{i,j}^t + C^2(\mathbf{u}_{i+1,j}^t - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i-1,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+1}^t - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i,j-1}^t) - \mathbf{u}_{i,j}^{t-\Delta t} + \Delta t^2 f(x, y, t) + O(\Delta t^2, h^2). \quad (2)$$

sendo C o número de Courant ($C = \frac{c\Delta t}{\Delta h}$), onde Δt e h definem as discretizações temporais e espaciais, respectivamente, com $\Delta x = \Delta y = h$. Os índices i e j designam os pontos da malha espacial nas direções x e y respectivamente, enquanto t designa o instante de tempo atual. Analogamente, apresenta-se na Eq. 3 a expressão do MDF explícito quando utilizam-se aproximações de diferenças finitas de segunda ordem para a variável temporal e de quarta ordem para as variáveis espaciais, $MDF(2-4)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} = & 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \frac{C^2}{12} \left[-\mathbf{u}_{i+2,j}^t - \mathbf{u}_{i-2,j}^t - \mathbf{u}_{i,j+2}^t - \mathbf{u}_{i,j-2}^t + \right. \\ & + 16(\mathbf{u}_{i+1,j}^t + \mathbf{u}_{i-1,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+1}^t + \mathbf{u}_{i,j-1}^t) + \left. -60\mathbf{u}_{i,j}^t \right] - \\ & -\mathbf{u}_{i,j}^{t-\Delta t} + \Delta t^2 f(x, y, t) + O(\Delta t^2, h^4). \end{aligned} \quad (3)$$

As aproximações de Diferenças Finitas descritas anteriormente são condicionalmente estáveis e seus limites de estabilidade, para domínios uni e bidimensionais, dados em termos de número de Courant (C), são apresentados na Tabela 1 (Lines et al, 1998), para aproximações de segunda ordem no tempo e de segunda e quarta ordem para variáveis espaciais.

Dimensão	2ª ordem	4ª ordem
1D	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2D	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$

Tabela 1: Tabela com os limites de estabilidade - Laurence et al. (1998).

Aplicações destes algoritmos convencionais em domínios heterogêneos, casos de interesse do presente trabalho, têm a discretização espacial definida pelo menor comprimento de onda que se deseja representar e a discretização temporal constante, limitada pela condição de estabilidade da sub-região que conduz ao menor passo de tempo, implicando em um grande custo computacional.

2.1 Sobre o erro de dispersão

No *MDF* as análises do erro de dispersão são realizadas considerando-se um meio homogêneo e discretizações espacial e temporal constantes. Esta seção tem por objetivo explicitar a influência que essa discretização pode ter quando aplicada em domínios heterogêneos. Para isso, utiliza-se a equação da onda acústica unidimensional (1D).

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (4)$$

com condições inicial e de contorno corretamente definidas.

Para *MDF* explícito com aproximações espacial e temporal de segunda ordem (2 – 2) obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_i^{t+\Delta t} = 2\mathbf{u}_i^t + C^2(\mathbf{u}_{i+1}^t - 2\mathbf{u}_i^t + \mathbf{u}_{i-1}^t) - \mathbf{u}_i^{t-\Delta t} + O(\Delta t^2, h^2). \quad (5)$$

e erro de dispersão, conforme apresentado em Cohen (2002), pode ser dado por:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} a \sin \left[c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

Colocando-se esse resultado em termos da velocidade de grupo normalizada, definida como $\frac{v_g}{c} = \frac{1}{c} \frac{d\omega}{dk}$, a Eq. (6) pode ser reescrita como:

$$\frac{v_g}{c} = \cos \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \left[1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \right]^{-1/2} \quad (7)$$

Para exemplificar o comportamento do erro de dispersão quando utilizam-se as mesmas discretizações, temporal e espacial, o número de Courant será alterado variando-se somente a velocidade de propagação da onda. A Fig. 1 apresenta resultados para o erro de dispersão quando $C_1 = 0,8$ e $C_2 = 0,4$ e Δt e $h = \Delta x$ constantes.

Pode-se observar que, como apresentado em Alford (1974), o erro de dispersão no *MDF* é menor quanto maior o número de Courant, neste caso, próximo ao limite de estabilidade do método. Com isso, quando são utilizadas as mesmas discretizações, tanto para Δt quanto para $h = \Delta x$, percebe-se que o erro de dispersão é maior para $C_2 = 0,4$, ou seja, para menores velocidades de propagação. Com disso espera-se que, em domínios heterogêneos, o erro de dispersão de uma região influencie os resultados para todo o domínio. Este resultado sugere uma dispersão menor em algoritmos adaptativos, em comparação com os algoritmos clássicos quando o passo de tempo é ajustado para manter o menor erro de dispersão possível para os diversos subdomínios.

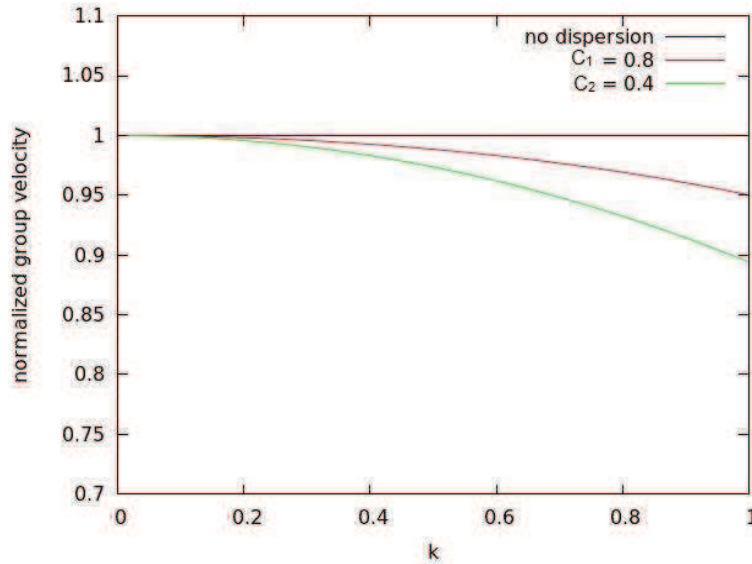


Figura 1: Dispersão em algoritmo clássico

3 ALGORITMOS COM PASSOS DE TEMPO AJUSTADOS LOCALMENTE

A utilização do MDF explícito, com discretização temporal constante, em aplicações com domínios heterogêneos pode conduzir a problemas com grande número de operações e, consequentemente, alto custo computacional mesmo quando se utilizam recursos de computação de alto desempenho. A utilização de algoritmos com passos de tempo ajustados localmente, dependendo da velocidade de propagação da onda acústica nas diferentes sub-regiões que compõem o domínio heterogêneo, pode reduzir de forma significativa o número de operações envolvidas na solução do problema. Nos algoritmos adaptativos (Falk et al, 1998; Tessmer, 2000) o passo de tempo é definido para cada sub-região do domínio com mesmas características - velocidade de propagação-, ou para um conjunto de sub-regiões. No entanto, no contorno dessas sub-regiões, as aproximações de diferenças finitas para as derivadas espaciais necessitam acessar pontos da malha que não teriam valores definidos na sub-região vizinha, devido à utilização de diferentes discretizações temporais. A Fig. 2 apresenta essa situação em um domínio unidimensional, dividido em duas sub-regiões, onde uma delas, *Região 2*, tem a velocidade de propagação quatro vezes maior do que a outra, *Região 1*, ou seja, $V_2 = 4V_1$ e, neste caso, propõe-se utilizar na *Região 2* $\Delta t_2 = \Delta t_{min}$ e na *Região 1*, $\Delta t_1 = 4\Delta t_{min}$. Nesta figura, os pontos da malha são representados por quadrados pretos e brancos, *Região 1* e *2* respectivamente, e o ponto destacado em vermelho mostra um dos valores da *Região 2* a ser calculado. Pode-se observar que a molécula de diferenças finitas, no caso de aproximações de diferenças finitas de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço, precisa acessar informações de cinco pontos no tempo t , e de um ponto em $t - \Delta t$, necessitando de algum esquema definido para fornecer as informações adicionais no subdomínio vizinho, marcado com “ $\times$ ” na Fig. 2.

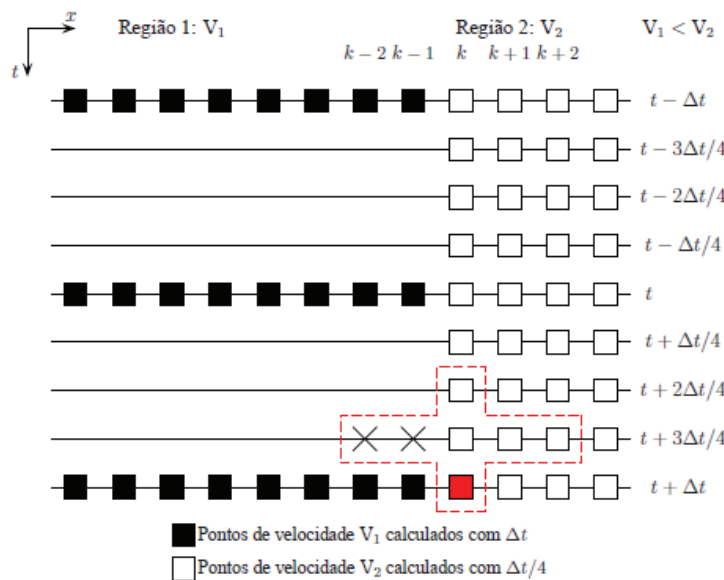


Figura 2: Problema unidimensional com duas sub-regiões, com $V_2 = 4V_1$.

O que diferencia os algoritmos de adaptatividade, ou de ajuste local de tempo, é a forma como os valores dessa região, chamada de *região de transição*, são calculados. Assim, a *região de transição* depende do algoritmo e das aproximações de diferenças finitas utilizadas. Esses

valores intermediários poderiam ser interpolados mas, para preservar a precisão, todos os algoritmos de adaptatividade temporal utilizam aproximações de diferenças finitas de mesma ordem para calcular os valores da região de transição.

Falk et al. (1998) propuseram um algoritmo de adaptatividade temporal onde os incrementos de tempo necessitam ser múltiplos de 2^n , onde n é um número inteiro e positivo, ou seja, pode-se utilizar em um mesmo domínio incrementos de tempo Δt , $\Delta t/2$, $\Delta t/4$, $\Delta t/8$, e assim sucessivamente. Tessmer (2000) sugere uma modificação neste algoritmo, ampliando as possibilidades de escolhas de Δt , que neste caso precisam apenas serem múltiplos de um número inteiro positivo, ou seja, $\Delta t_{subreg_i} = \Delta t_{subreg_j}/n$, onde Δt_{subreg} denota o incremento de tempo definido para cada sub-região do domínio heterogêneo e que deve ser limitado pela condição de estabilidade da sub-região considerada. Ambos algoritmos utilizam diferentes incrementos de tempo na construção da *região de transição*, que dependem da discretização temporal utilizada em cada sub-região vizinha, ou seja, assumem valores entre (Δt_{max}) e (Δt_{min}) .

Testes realizados (Antunes, 2012) mostram que esses algoritmos produzem bons resultados quando as discretizações estão bem abaixo do limite de estabilidade de cada método. Contudo, na fronteira da descontinuidade física, contorno das sub-regiões, aparecem *ruídos* na solução do problema quando são utilizadas discretizações temporais próximas ao limite de estabilidade da sub-região, e esse *ruído* propaga-se ao longo do tempo para todo o domínio (Antunes et al, 2014). Devido a isso propôs-se um algoritmo chamado de *Região de Transição Triangular (RTT)* onde os valores da região de transição são calculados sequencialmente, utilizando o passo de tempo da sub-região vizinha com menor Δt , e que tem sua aplicabilidade e eficiência analisada no presente trabalho.

3.1 Algoritmo da Região de Transição Triangular(RTT)

O algoritmo de adaptatividade temporal, chamado de Região de Transição Triangular (*RTT*) (Antunes, 2012; Antunes et al, 2014), permite a adoção da mesma relação dos incrementos de tempo que o algoritmo do Tessmer (2000), ou seja, os incrementos de tempo apenas necessitam se relacionar por um valor inteiro.

A *região de transição* deste algoritmo é construída de tal forma que todos os pontos que interferem diretamente nos cálculos dos valores da sub-região com menor Δt sejam calculados sequencialmente, utilizando-se a mesma discretização temporal, ou seja, nessa região utiliza-se somente o menor incremento de tempo $\Delta t = \Delta t_{min}$, sem a necessidade de incrementos de tempo intermediários. As Figs. 3 a Fig. 5 apresentam a sequencia de dependências que definem parte da *região de transição* do algoritmo RTT, utilizando o domínio unidimensional descrito na seção anterior. Nestas figuras os pontos da *região de transição* são representados por triângulos, onde os triângulos pretos são calculados com Δt_{min} . Devido a isso a *região de transição* é ampliada, se comparada aos outros esquemas adaptativos, permitindo, entretanto, utilização de incrementos de tempo próximos ao limite de estabilidade de cada sub-região.

Os pontos da *região de transição* calculados em $t + \Delta t/4$ exigem valores em dois instantes de tempos anteriores e que estão fora desta região triangular (Fig. 6). Somente esses valores da *região de transição* são calculados com $\bar{\Delta t} = 3\Delta t/4$, como mostrado na Fig. 7.

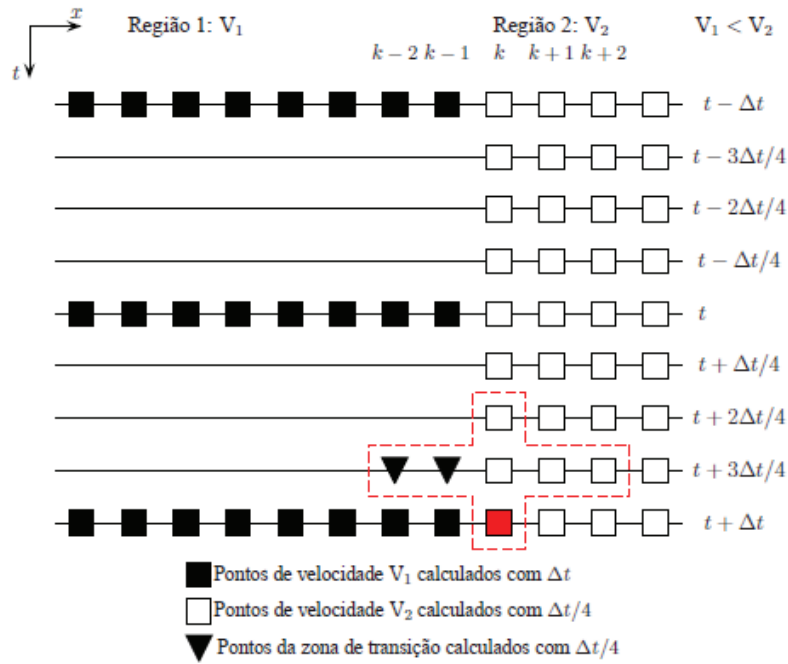


Figura 3: RTT (primeiro nível de aproximação) - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

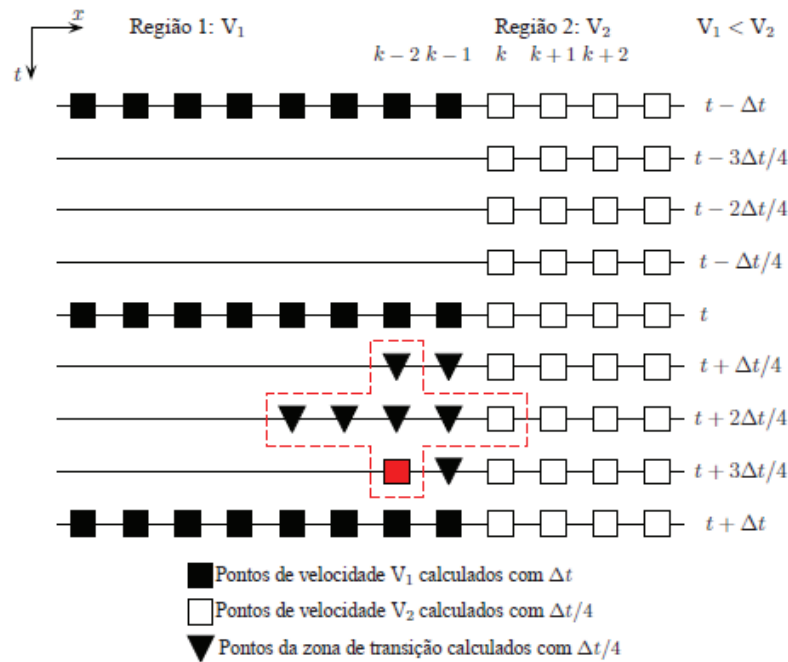


Figura 4: RTT (segundo nível de aproximação) - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

A Fig. 8 apresenta o esquema do algoritmo RTT para os passos de tempo intermediários, entre os tempos t e $t + \Delta t$. Finalmente, para que todos os valores da *Região 2* utilizem valores calculados com a mesma discretização temporal, há também necessidade de que alguns valores dos tempos inteiros da *Região 1*, sejam calculados com $\Delta t = \Delta t_{min} = \Delta t/4$ neste caso, conforme apresentado na Fig. 9. Desta forma o esquema final do algoritmo RTT é dado por (Fig. 10): Este procedimento pode ser facilmente generalizado para qualquer aproximação espacial de

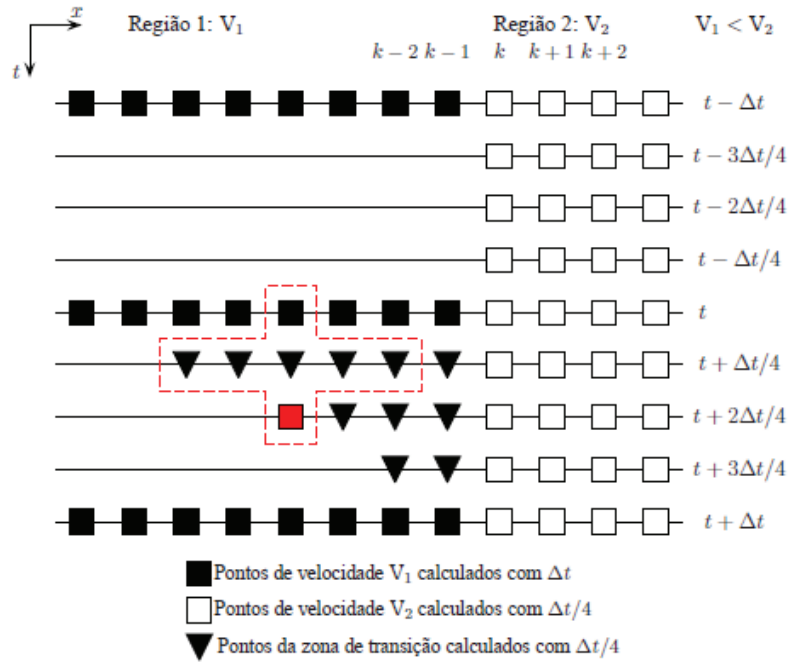


Figura 5: RTT (terceiro nível de aproximação) - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

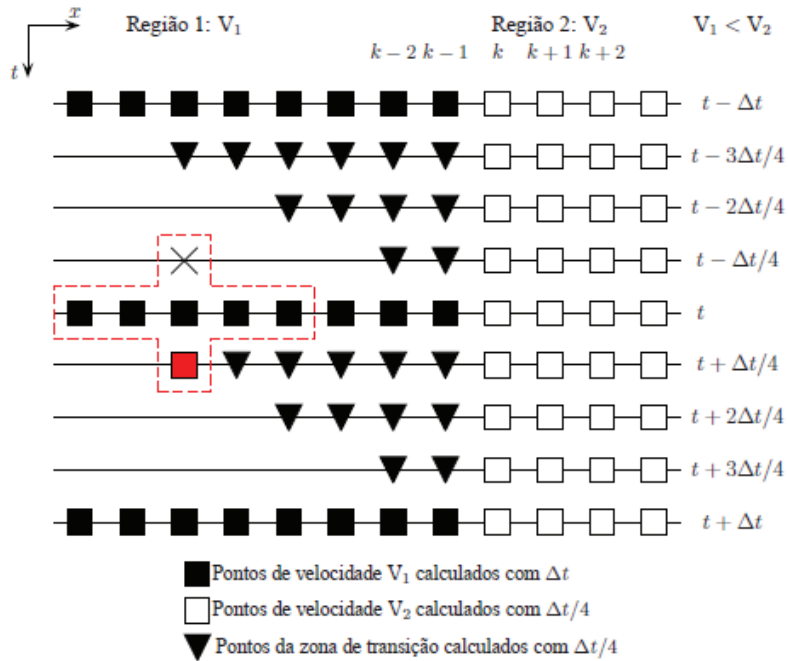


Figura 6: RTT (quarto nível de aproximação - a) - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

diferenças finitas de ordem m e para n sub-divisões do incremento de tempo. Apresenta-se, a seguir, de forma simplificada, um pseudo-algoritmo do RTT, ressaltando os pontos da *Região de Transição* (RT):

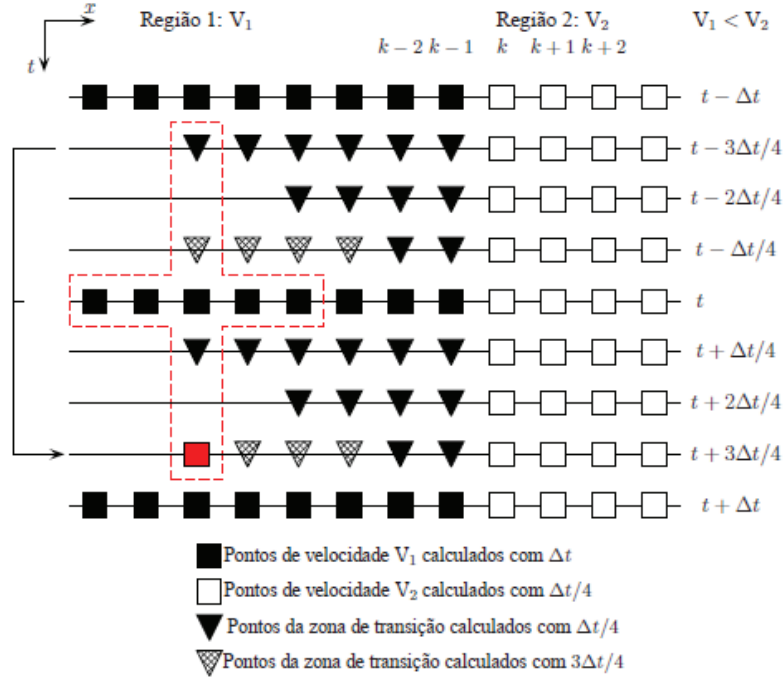


Figura 7: RTT (quarto nível de aproximação - b) - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

Pseudo-algoritmo do esquema RTT, ressaltando pontos da *Região de Transição* (RT)

- ◇ Utilizar *MDF* para calcular todos os pontos do domínio nos tempos iniciais
- ◇ Para $t = t_0, t_{final}$
 - ▷ Utilizar *MDF* para calcular pontos da *Região 1*, com Δt_1 (com excessão de $\frac{m}{2}$ próximos à fronteira, e da *Região 2* com Δt_2 , sendo $\Delta t_1 = n\Delta t_2$;
 - ▷ *RT*: Calcular $\frac{m}{2}$ pontos da *Região 1*, fronteira com a *Região 2*, com Δt_2 ;
 - ▷ Para $t_{interm} = 1, n - 1$
 - Utilizar *MDF* para calcular pontos da *Região 2*, utilizando Δt_2 ;
 - *RT*: Calcular $\frac{m}{2}(n - t_{interm})$ pontos na *Região 1*, fronteira com *Região 2*, utilizando Δt_2 ;
 - *RT*: Quando $t_{interm} = n - 1$ incluir $\frac{m}{2}(n - 2)$ pontos na *Região 1*, utilizando $\Delta t = \frac{n-1}{n}\Delta t_2$.
 - ▷ Fim do Para
- ◇ Fim do Para

onde t_{final} é o número de intervalos de tempo da simulação, definido pelo maior Δt .

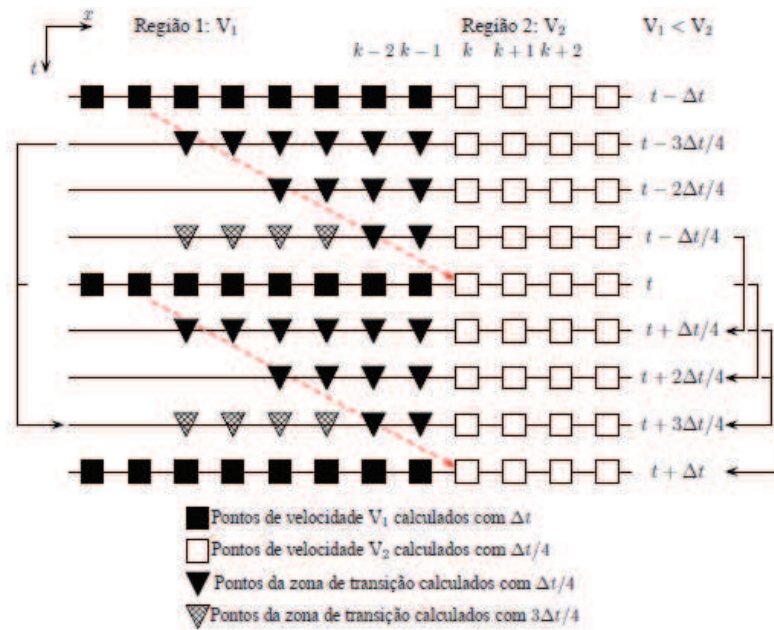


Figura 8: RTT - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

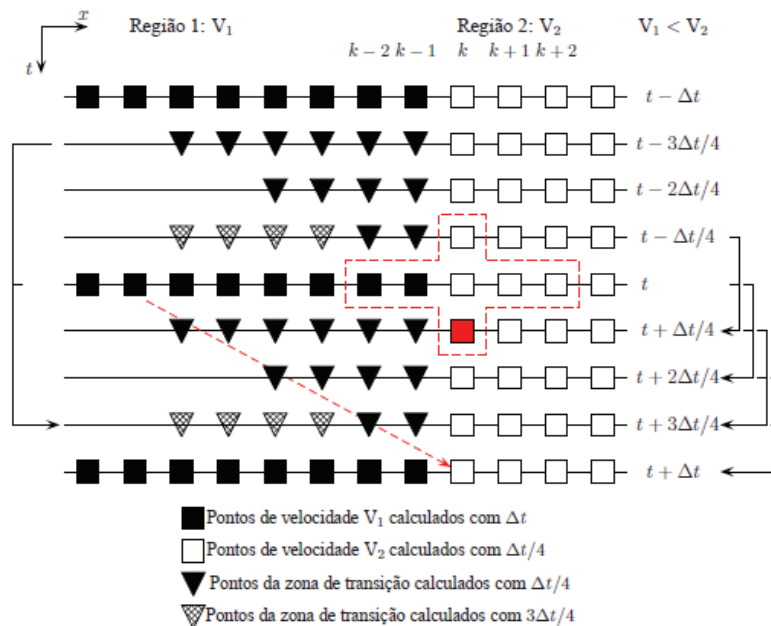


Figura 9: RTT - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

Em todos os testes realizados o algoritmo, construído dessa forma, não apresentou os efeitos indesejáveis dos ruídos próximos à interface onde a velocidade da onda muda de valor, quando utilizam-se discretizações temporais próximas ao limite de estabilidade das diversas sub-regiões e por ser um esquema construído sequencialmente ele pode ser facilmente generalizado para qualquer relação entre diferentes passos de tempo, tanto quanto para outras aproximações de diferenças finitas e para domínios 2D e 3D, bastando para isso, expandir o pseudo-algoritmo apresentado anteriormente, para as outras direções.

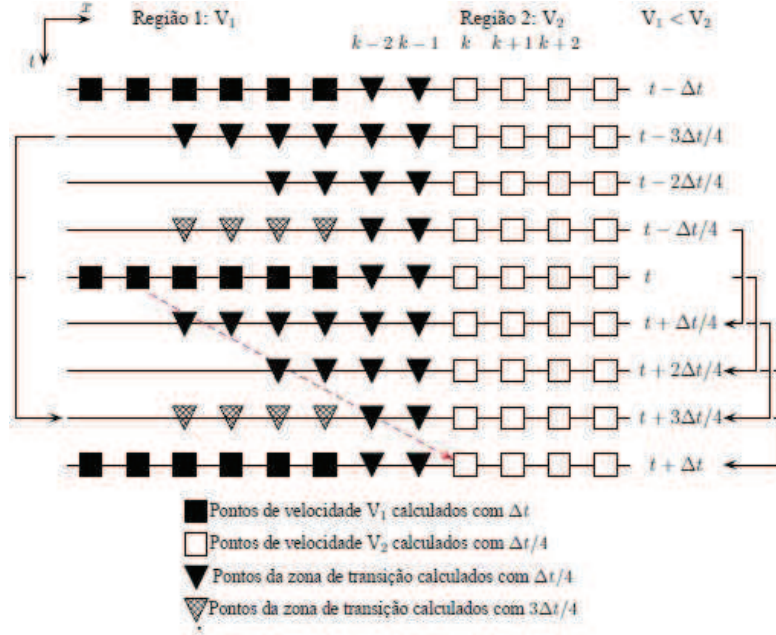


Figura 10: RTT - 1D - MDF 2-4 - 4 subdivisões do passo de tempo.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para avaliar os resultados obtidos pelo algoritmo RTT a Eq. 1 foi resolvida num domínio heterogêneo 2D de 6.000 m $\times$ 6.000 m, subdividido em duas sub-regiões: a *Sub-região 1* tem a menor velocidade de propagação $V_1 = 750$ m/s, enquanto a *Sub-região 2* tem a maior velocidade, $V_2 = 4V_1 = 3.000$ m/s e com condição inicial dada por:

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{12.800\pi} e^{\left(\frac{-(x^2+y^2)}{12.800}\right)} \quad (8)$$

e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \forall x, y$. A condição de contorno considerada foi a de Dirichlet, ie, $u(\Gamma, t) = 0, t > 0$, sendo Γ o contorno do domínio considerado, definido por $x \in [0; 6.000]$ e $y \in [0; 6.000]$.

4.1 Comparando o algoritmo RTT com o algoritmo convencional

Inicialmente comparam-se os resultados obtidos pelo algoritmo RTT, com o algoritmo convencional do *MDF*, com discretizações constantes. Esses resultados são comparados com um resultado de referência obtido através de reduções sucessivas das discretizações, mantendo-se o número de Courant próximo ao limite de estabilidade do método (Antunes, 2012). Para estes resultados a interface com a descontinuidade do valor da velocidade de propagação da onda está em $x = 3.250$ m. Para destacar os efeitos do algoritmo RTT apresentam-se resultados para diferentes discretizações espaciais.

As Figuras 11 a 13 apresentam resultados em $y = 3.000$ m e $t = 0,90$ s para aproximações de Diferenças Finitas de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço (2 – 4) com $h = \Delta x = \Delta y = 10$ m; 20 m e 40 m. Em todos os gráficos utilizou-se, para o *MDF* convencional, $C = 0,61$ tendo por base a *Sub-região* mais desfavorável, ou seja, a *Sub-região 2* que tem a maior velocidade de propagação ($\Delta t = \Delta t_2$) e para o algoritmo RTT o número de Courant foi mantido constante em cada *Sub-região*. Com isso, $\Delta t_{max} = \Delta t_1 = 4\Delta t_2$.

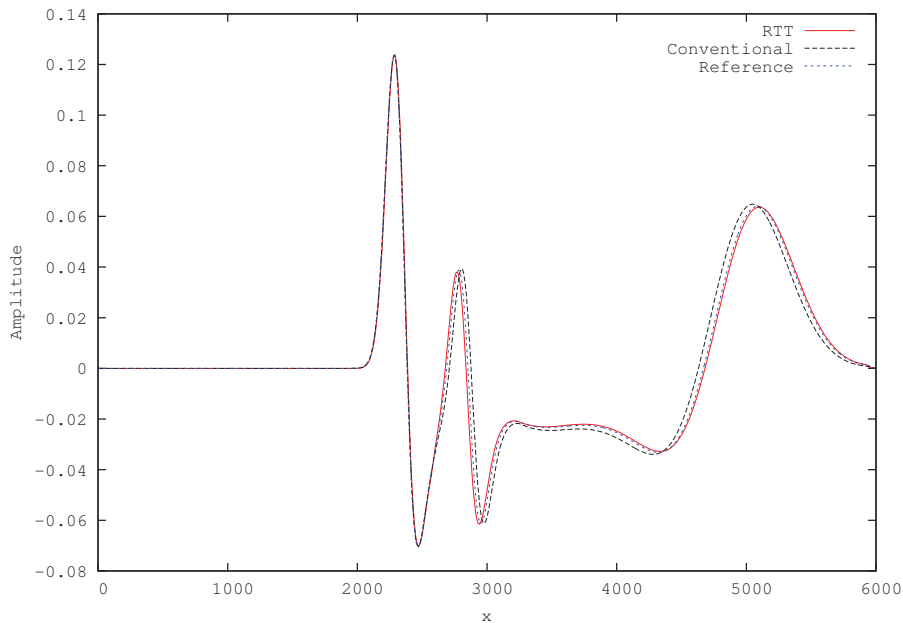


Figura 11: Solução em $y = 3.000$ m e $t = 0,90$ s ($h = 10$ m)

Pode-se observar, para todos os gráficos apresentados, que o algoritmo *RTT* apresenta uma melhor aproximação em relação ao resultado de referência adotado do que os obtidos pelo *MDF* convencional. Para valores de h menores do que os apresentados, não percebe-se diferenças significativas entre os diversos gráficos.

4.2 Custo computacional

A adaptatividade temporal sempre reduz o número de operações de ponto flutuante, se comparado ao algoritmo convencional. No entanto, esta redução é função das propriedades do meio heterogêneo, estando diretamente relacionada com a proporção das dimensões dessas sub-regiões e das respectivas velocidades de propagação da onda acústica nestes meios. Para avaliar a eficiência do algoritmo *RTT* mostram-se resultados de tempos computacionais obtidos para o mesmo domínio $2D$, descrito na Seção 4.1, variando-se a posição da interface da sub-região onde ocorre a mudança da velocidade como apresentado nas Tabelas 2 e 3, para aproximações de diferenças finitas (2-2) e (2-4) respectivamente. As primeiras colunas destas tabelas mostram a posição (y) da interface entre as duas sub-regiões, Ω_1 e Ω_2 . As segundas e terceiras colunas apresentam a porcentagem do domínio ocupada por estas sub-regiões e o tempo de processamento, dado pela razão entre os tempos gastos pelos algoritmos *RTT* e convencional, são apresentados nas colunas 5 e 6. Ambos algoritmos, convencional e *RTT*, utilizaram $h = 10$ m e $h = 20$ m e enquanto o algoritmo *RTT* utiliza dois incrementos de tempo, um para cada sub-região, o algoritmo convencional utiliza somente o menor incremento de tempo utilizado no algoritmo adaptativo.

4.3 Domínios complexos e comparação do número de operações

A seguir avaliam-se diferentes possibilidades de combinações da adaptatividade temporal quando aplicadas a domínios complexos, como é o caso do campo de velocidades de Marmousi,

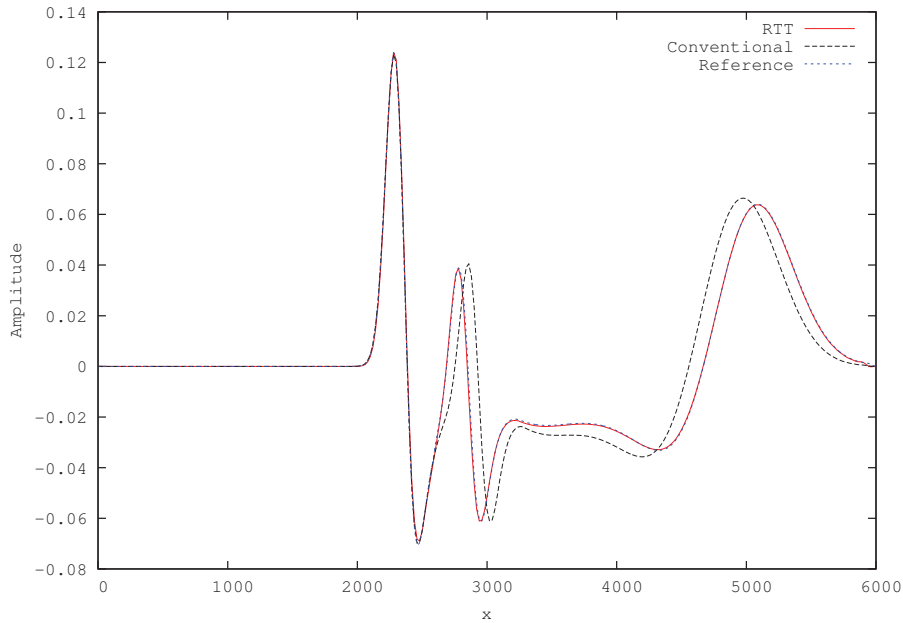


Figura 12: Solução em $y = 3.000$ m e $t = 0,90$ s ($h = 20$ m)

que é um modelo sintético 2D bem conhecido (Fig. 14). Neste exemplo o domínio 2-D tem dimensões (4.602×1.502) m, com a maior velocidade da onda de 4,3 km/h.

Para efeito dessa análise utilizamos a discretização espacial de $\Delta x = \Delta y = 1$ m, totalizando 6.912.204 valores a serem calculados por unidade de tempo, e diferentes combinações de discretizações temporais para o algoritmo RTT: (a) Δt e $\Delta t/2$; (b) Δt , $\Delta t/2$ e $\Delta t/4$.

Para usar a adaptatividade em modelos com campos de velocidades mais complexos, aplicou-se um pré-processamento que agrupou sub-regiões distintas que poderiam utilizar o mesmo passo de tempo, dependendo do esquema de adaptatividade desejada. Ao resultado deste pré-processamento deu-se o nome de mapa de $\Delta t's$. A discretização temporal mais refinada, Δt_{min} , está associada ao maior valor da velocidade de propagação da onda sendo portanto, quem define os outros incrementos de tempo a serem utilizados. Nestes casos considerou-se $\Delta t_{min} = 0,000164$ s.

Para a primeira configuração obteve-se o mapa de $\Delta t's$ apresentado na Fig. 15, utilizando-se $\Delta t_{min} = \Delta t/2$ e $\Delta t_{max} = \Delta t$. O segundo mapa de $\Delta t's$, Fig. 16, apresenta sub-regiões para a utilização de $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ e $\Delta t_{max} = \Delta t$.

Para uma simulação de 1s, correspondente a 6.098 passos de tempo no algoritmo convencional com $\Delta t = \Delta t_{min}$, 42.150.619.992 valores necessitam ser calculados. As Tabelas 4 e 5 apresentam o número de valores a serem calculados para cada uma das configurações de mapa de $\Delta t's$ apresentados nas Figs. 15 e 16, comparando com o MDF convencional e outros esquemas adaptativos (Falk, 1998; Tessmer, 2000). Quando utilizam-se duas subdivisões do incremento de tempo, o que diferencia os algoritmos adaptativos propostos por Falk et al (1998), Tessmer (2000) do RTT é o tratamento dado aos pontos da malha próximos à região de interface do valor de mudança da velocidade, não alterando, contudo, o número de valores calculados (Tabela 4).

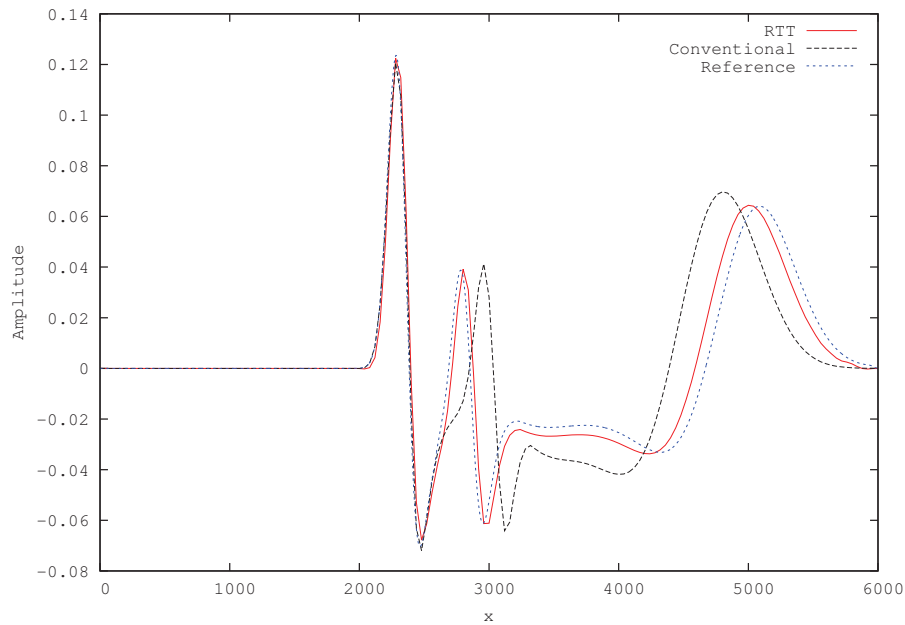


Figura 13: Solução em $y = 3.000 \text{ m}$ e $t = 0,90 \text{ s}$ ($h = 40 \text{ m}$)

$v_{max} (km/h)$	Δt	Número de Intervalos	Número de Valores
4,313	0,000164	6.098	201.459.626
2,156	0,000328	3.049	20.974.580.183
Total de valores do algoritmo RTT			21.176.039.809
Valores RTT/Convenc.			50,24%

Tabela 4: Número de operações - Dois passos de tempo (Δt e $\Delta t/2$).

v_{max} (km/h)	Δt	Número de Intervalos	Número de Valores		
			Falk et al	Tessmer	RTT
4,313	0,000164	6.098	201.936.634	201.459.626	202.413.642
2,156	0,000328	3.049	69.913.570	69.913.570	69.913.570
1,078	0,000656	1.524	10.448.905.188	10.448.905.188	10.448.905.188
Total de valores			10.720.755.392	10.720.278.384	10.719.141.109
Valores Adapt./Convenc.			25,43%	25,43%	25,44%

Tabela 5: Número de operações - Três passos de tempo (Δt , $\Delta t/2$ e $\Delta t/4$).

Tabela 2: Comparação de tempo de processamento MDF (2-2) - Esquema RTT $\times$ MDF Convencional

Interf. Coord. y	Dimensão das sub-regiões (<i>area</i>)		RTT/Conv.(<i>tempo</i>)	
	Ω_1/Ω	Ω_2/Ω	$h = 10$	$h = 20$
1125	15 %	85 %	46.86 %	48.80 %
2250	30 %	70 %	40.64 %	41.59 %
3375	45 %	55 %	34.51 %	36.29 %
4500	60 %	40 %	28.80 %	30.88 %
5625	75 %	25 %	25.00 %	26.58 %
6750	90 %	10 %	17.75 %	20.52 %

Tabela 3: Comparação de tempo de processamento MDF (2-4) - Esquema RTT $\times$ MDF Convencional

Interf. coord. y	Dimensão das sub-regiões (<i>area</i>)		RTT/Conv.(<i>tempo</i>)	
	Ω_1/Ω	Ω_2/Ω	$h = 10$	$h = 20$
1125	15 %	85 %	36.84 %	42.74 %
2250	30 %	70 %	34.78 %	39.24 %
3375	45 %	55 %	32.00 %	35.34 %
4500	60 %	40 %	29.88 %	33.48 %
5625	75 %	25 %	32.84 %	34.58 %
6750	90 %	10 %	25.41 %	32.98 %

5 Conclusões

A equação de onda é frequentemente utilizada para modelar problemas em sísmica, que envolvem meios heterogêneos, e o método das diferenças finitas explícito é amplamente utilizado para encontrar sua solução. Por ser um método condicionalmente estável utiliza-se um incremento de tempo constante em todo o domínio, dado pela situação mais desfavorável, o que implica em um grande esforço computacional.

Quando estão presentes grandes variações nos valores das características físicas do meio, como ocorre com a variação da velocidade de propagação de ondas no modelo de subsuperfície, procedimentos de ajustes locais do passo de tempo são uma boa escolha para a redução deste esforço computacional. A economia de tempo ao se utilizar o algoritmo RTT, pode atingir valores consideráveis, como apresentado no presente trabalho. Além disso, a utilização de métodos com ajuste do incremento de tempo pode diminuir o erro de dispersão em todo domínio, se comparado ao algoritmo convencional.

A aplicação de algoritmos de adaptatividade em domínios complexos requer um pré-pro-

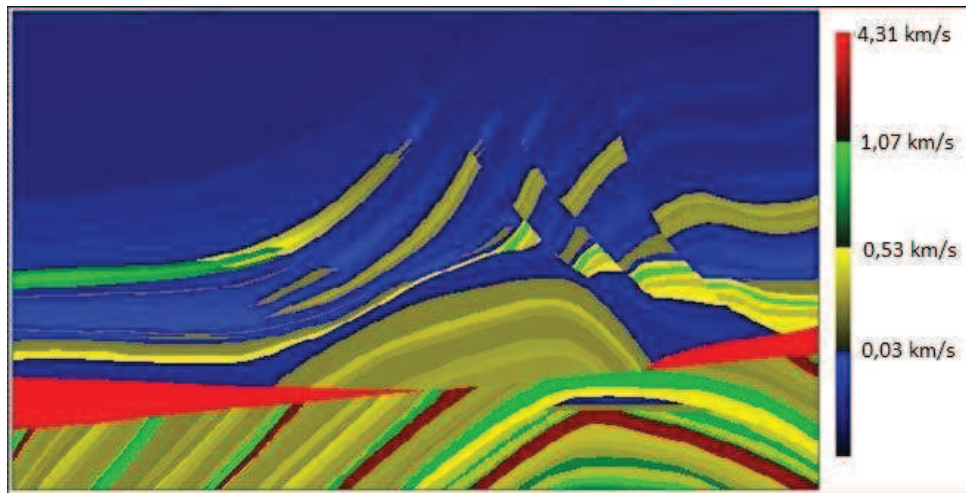


Figura 14: Distribuição da velocidade da Onda - Modelo Marmousi



Figura 15: Mapa de Δt 's (Δt e $\Delta t/2$) - Modelo Marmousi

cessamento que permita agrupar sub-regiões que poderão utilizar o mesmo incremento de tempo. Esse pré-processamento acarreta custos computacionais adicionais. No entanto, em aplicações de sísmica, são realizadas diversas simulações para o mesmo campo de velocidades, e todas utilizam o mesmo *mapa de Δt 's*.

O algoritmo da Região de Transição Triangular (RTT) é facilmente generalizado para diferentes aproximações de diferenças finitas e para diferentes combinações de discretizações temporais, que necessitam apenas serem relacionadas por um valor inteiro em sub-regiões vizinhas. É também facilmente generalizado para domínios tridimensionais. Em todos os testes realizados os resultados mostraram-se precisos, mesmo quando são utilizados incrementos de tempo próximos ao limite de estabilidade de cada sub-região, ou grupo de sub-regiões, apresentando sempre considerável redução do custo computacional.



Figura 16: Mapa de Δt 's (Δt , $\Delta t/2$ e $\Delta t/4$) - Modelo Marmousi

REFERÊNCIAS

Alford, R.M., Kelly, K.R., Boore, D.M., 1974. Accuracy of Finite-Difference Modeling of the Acoustic Wave Equation. *Geophysics*, v. 39, 834-842.

Antunes, A., 2012. *Método de Diferenças Finitas para equação de onda acústica usando passos de tempo ajustados localmente*, Dissertação de Mestrado PGC/IC/UFF.

Antunes, A., Leal-Toledo, R. C, Silveira Filho, O. T., Toledo, E. M., 2014. Finite difference method for solving acoustic wave equation using locally adjustable time-steps, *Procedia Computer Science*, Vol. 29, 627-636.

Bartolo, L., Dors, C., Mansur, W.J., 2012. A New Family of Finite Difference Schemes to Solve the Heterogeneous Acoustic Wave Equation. *Geophysics*, 77, T187-T199.

Bulcão, A., 2004. *Modelagem e Migração Reversa no Tempo empregando operadores elásticos e acústicos*. PhD thesis. COPPE/UFRJ, Brazil.

Chen, J., 2007. High-order time discretization in seismic modeling, *Geophysics*, V. 72, SM115-SM122.

Chua, C. e Stoffab, P. L., 2012. Nonuniform grid implicit spatial finite difference method for acoustic wave modeling in tilted transversely isotropic media, *Journal of Applied Geophysics*, v. 76, 44-49.

Cohen, G. C. 2002. *Higher Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Springer.

Chunlei C., Stoffab, P.L., 2012. Nonuniform grid implicit spatial finite difference method for acoustic wave modeling in tilted transversely isotropic media, *Journal of Applied Geophysics*, v. 76, Pages 44-49.

Falk, J., Tessmer, E., and Gajewski, D., 1998. Efficient finite-difference modelling of seismic waves using locally adjustable time steps, *Geophysical Prospecting*, v. 46, 603-616.

Fornberg, B., 1987. The pseudospectral method - comparisons with finite differences for the

elastic wave equation. *Geophysics*, vol. 52, pp. 483501.

Jin, Q., Shigui, W. Ruofei, C., 2013. Accuracy of the staggered-grid finite-difference method of the acoustic wave equation for marine seismic reflection modeling, *Chinese Journal of Oceanology and Limnology*, Vol. 31, No. 1, P. 169-177.

Lines, L. R., Slawinski, R., Bording, R. P., 1998. A recipe for stability analysis of finite-difference wave equations computations, *CREWES Research Report*, v. 10, 6 p.

Liu, Y. e Sen, M., 2009a. A practical implicit finite-difference method: Examples from seismic modeling, *Journal of Geophysics and Engineering*, vol. 6, pp. 231249.

Liu, Y.; Sen, M., 2011. Finite-difference modelling with adaptive variable-length spatial operator. *Geophysics*, vol. 76, pp. T79T89.

Liu, Y.; Wei, X., 2008. Finite-difference numerical modeling with even-order accuracy in twophase anisotropic media. *Applied Geophysics*, vol. 5, pp. 107114.

Moura Oliveira, S. A., 2003. A fourth-order finite-difference method for the acoustic wave equation on irregular grids, *Geophysics*, 68 no. 2 p. 672-676.

Moczo, P., Kristek, J., Galis, M., Pazak, P., 2010. On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to P-wave to S-wave speed ratio, *Geophys. J. Int.*, Vol. 182, p. 493-510.

Tessmer, E., Seismic finite-difference modeling with spatially varying time steps, 65, *Geophysical Prospecting*, 1290–1293, 2000.

Wang, Y., Liang, W., Nashed, Z., Li, X.; Liang, G., Yang, C., 2014. Seismic modeling by optimizing regularized staggered-grid finite-difference operators using a time-space-domain dispersion-relationship-preserving method, *Geophysics*, Vol. 79, No. 5, T277-T285.

Wen-Quan Liang; Yan-Fei Wang; Chang-Chun Yang, 2014. Comparison of numerical dispersion in acoustic finite-difference algorithms, *Exploration Geophysics - The Journal of the Australian Society of Exploration Geophysicists*, (<http://dx.doi.org/10.1071/EG13072>).