



AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DE PLACAS DE AÇO E CONCRETO

Iara S. Ribeiro

Paulo A. S. Rocha

Ígor J. M. Lemes

Kátia I. Silva

iarasribeiro@yahoo.com.br

paulorocha@em.ufop.br

igorjml@hotmail.com

kisilva@em.ufop.br

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Morro do Cruzeiro, 35400-000, Minas Gerais, Ouro Preto, Brasil

Resumo. *O presente trabalho tem como objetivo realizar a análise de placas finas sujeitas à flexão a partir de uma formulação matemática destinada à avaliação do comportamento elástico de elementos planos bidimensionais. Neste contexto, analisa-se uma placa metálica com as quatro bordas apoiadas sujeitas a duas cargas de compressão aplicadas de forma distribuída na direção paralela à placa cuja finalidade é determinar a tensão crítica de placa. Avalia-se também uma laje de concreto armado com as quatro bordas apoiadas sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. No segundo exemplo o objetivo é determinar a flecha máxima neste elemento estrutural. Por fim, estuda-se o comportamento da laje de concreto a partir da aplicação simultânea dos carregamentos verticais e horizontais. O método das diferenças finitas é utilizado para solucionar os exemplos supracitados, comparando-os com respostas teóricas encontradas na teoria de placas, bem como com expressões indicadas por considerações normativas vigentes no Brasil e, ao final, com respostas obtidas com o programa computacional SAP 2000.*

Palavras-chave: *Placas finas à flexão, método das diferenças finitas, laje de concreto armado*

1 INTRODUÇÃO

Define-se como placa um elemento estrutural que apresenta duas dimensões, ou seja, comprimento e largura bem maiores que a terceira (espessura) e que está sujeito principalmente a carregamentos transversais à sua superfície. Assim sendo, o estudo de placas pode ser apresentado como um problema bidimensional.

Atribui-se a Kirchhoff (1850) a primeira pesquisa sobre a flexão de placas. Este trabalho ficou conhecido como teoria clássica de placas após o pesquisador representar através de uma equação diferencial de quarta ordem, o comportamento de placas delgadas submetidas a carregamentos transversais.

Fernandes (1998) cita Hencky e Kromm como autores que desenvolveram teorias envolvendo os deslocamentos da superfície média da placa e as rotações nesse plano.

Carvalho (1994) e Pereira (2015) simularam o comportamento de elementos bidimensionais pelo método de analogia de grelhas, que por sua vez fundamenta-se na substituição da placa (laje) por uma malha equivalente de vigas (grelha equivalente).

As placas podem ser compostas por um único material, ou por materiais diferentes (materiais compósitos).

Mendonça (2005) define material compósito como sendo o conjunto de dois ou mais materiais diferentes, combinados em escala macroscópica, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta, o que os diferencia das ligas metálicas que contam com a união dos materiais em escala microscópica.

Com relação aos elementos de placa, um dos principais problemas apontados estava na dificuldade de se representar o seu comportamento a partir de modelagens numéricas.

Segundo Azevedo (2003) uma maneira de ultrapassar algumas dessas limitações era a substituição das derivadas exatas por derivadas aproximadas. Dessa aplicação resulta o método das diferenças finitas que antes do advento dos computadores tinha o inconveniente de requerer a resolução de grandes equações lineares. Atualmente, sabe-se que os métodos analíticos são utilizados apenas para a resolução de problemas mais simples e são adotados com o objetivo de validar os resultados numéricos. E estes, por sua vez, são mecanismos eficientes para a resolução de problemas de grande ordem.

Coda e Paccola (2006) comentam que Reissner em 1944 e posteriormente Mindlin em 1951 também desenvolveram teorias sobre a flexão de placas, chegando, a equações diferenciais de sexta ordem, que consideravam as deformações por cisalhamento, o que permite a análise de placas moderadamente espessas.

Com a popularização do uso do computador, surgiram vários métodos para auxiliar na resolução dos problemas envolvendo placas, sendo aqui relacionados, de forma sucinta, apenas os mais utilizados, a saber: o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas.

O método das diferenças finitas (MDF) é um dos métodos matemáticos mais antigos e vem sendo utilizado até os dias atuais de forma bastante satisfatória para a resolução dos mais variados problemas, sendo assim uma importante ferramenta para a obtenção de respostas em que não há solução analítica (Chaves, 1997).

Este método consiste em transformar equações diferenciais em equações algébricas, através da aproximação das derivadas por meio de diferenças finitas.

Cabe ressaltar que a discretização e modelagem presentes no método das diferenças finitas introduz algumas aproximações e, conseqüentemente, erros. Tendo como referência a estrutura real, os erros de simulação podem ser reduzidos melhorando-se o modelo. Já os

erros de discretização tendem a ser reduzidos com o aumento da quantidade de elementos (Lima, 2009).

No método das diferenças finitas são consideradas aproximações por intermédio de operadores diferenciais e além disso o método apresenta boa eficiência computacional e é de fácil implementação em boa parte dos casos (Rocha et al., 2012). Neste trabalho, serão utilizados para a obtenção das respostas numéricas, grids bidimensionais (2D). Maiores detalhes sobre o estudo de placas finas podem ser encontrados no trabalho desenvolvido por Bleich (1952), em *Brush e Almroth (1975)*, Timoshenko e Krieger (1959), Timoshenko e Krieger (1970), Bulson e Allen (1982) e em Szilard (2004).

O presente trabalho tem como principal proposta o estudo da teoria de placas a partir da descrição de uma formulação matemática destinada à avaliação do comportamento elástico de elementos planos bidimensionais sujeitos a cargas paralelas, perpendiculares à placa ou aplicadas de forma simultânea na mesma.

É importante ressaltar que as placas serão consideradas como finas quando a sua espessura for inferior a 10% da menor dimensão da mesma e caso este valor seja excedido, a placa será tratada como um elemento espesso. Quando este limite for ultrapassado devem-se considerar também os efeitos das deformações provenientes do cisalhamento, que são responsáveis pelo empenamento da seção transversal da placa.

A descrição do comportamento à flexão de placas habitualmente utilizadas em edificações residenciais e comerciais, ou seja, elementos que apresentam espessuras inferiores a 0.20 m e com vão da ordem de 6 m está inserido na formulação de placas finas sujeitas a pequenos deslocamentos (Dinis, 2004).

2 PLACAS FINAS À FLEXÃO

As expressões teóricas para os momentos fletores atuantes em um elemento de placa são:

$$M_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right) \frac{bt^3}{12}. \quad (1)$$

em que E e ν são respectivamente o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, b é a largura da placa, t é a espessura, $\frac{1}{R_x}$ e $\frac{1}{R_y}$ são as curvaturas ou rotações relativas da placa e R_x e R_y os raios de curvatura nos eixos x e y .

O momento fletor em torno do eixo x por unidade de comprimento é:

$$M_x^* = \frac{M_x}{b} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right). \quad (2)$$

Como:

$$M_x^* = D \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right) \quad (3)$$

em que D é a rigidez flexional da placa, conclui-se que:

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

De forma análoga, vem:

$$M_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x} \right) \frac{a t^3}{12} \quad (5)$$

Por sua vez, o momento fletor em torno do eixo y por unidade de comprimento (a) é:

$$M_y^* = \frac{M_y}{a} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x} \right). \quad (6)$$

O parâmetro D é equivalente à rigidez à flexão EI de uma viga por unidade de comprimento. Os momentos atuantes em uma direção provocam curvatura na direção perpendicular. Então, se a deflexão da placa é w , para a Teoria de vigas, tem-se que:

$$\frac{1}{R_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ e } \frac{1}{R_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (7a, b)$$

As Eq. (2) e (6) podem ser escritas também como:

$$M_x^* = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \text{ e } M_y^* = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (8a, b)$$

A tensão de cisalhamento, τ_{xy} , e o momento volvente, M_{xy} , são definidos como:

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{ e } M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9a, b)$$

Para os momentos em torno dos eixos x e y , chega-se ainda às seguintes equações:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \text{ e } \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (10a, b)$$

sendo Q_x e Q_y os esforços cortantes em relação aos eixos x e y .

Após algumas manipulações, chega-se a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (11)$$

na qual q é a carga distribuída aplicada de forma perpendicular à placa.

Caso sejam introduzidas as forças normais na placa, vem:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{1}{D} \quad (12)$$

em que N_x , N_y e N_{xy} são os esforços normais nas direções x , y e xy , respectivamente. Considerando-se somente compressão na direção x , conclui-se que:

$$N_x = -\frac{P_x}{b}, \quad N_{xy} = N_y = 0 \text{ e } q = 0. \quad (13)$$

Assim, a Eq. (12) pode ser escrita como:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{P_x}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

na qual P_x é a carga axial na direção x .

De forma compacta, tem-se ainda:

$$D \nabla_w^4 = -\frac{P_x}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Introduzindo-se as condições de contorno para uma placa com as quatro bordas apoiadas, chega-se à expressão da carga crítica de placa e da tensão normal, representadas por:

$$P_x = \frac{\pi^2 D k_c}{b} \text{ e } \sigma_x = \frac{P_x}{bt} \quad (16a, b)$$

sendo k_c o coeficiente de flambagem.

Daí, substituindo-se as Eq. (4) e (16a) em (16b), chega-se à equação correspondente à tensão crítica de placa, dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_c \pi^2 E}{12(1-\nu^2) \left(\frac{b}{t} \right)^2}. \quad (17)$$

Para a placa com as quatro bordas apoiadas, tem-se que:

$$k_c = \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 2. \quad (18)$$

em que o parâmetro ϕ que representa a relação entre as dimensões da placa.

Derivando-se a Eq. (18) em relação a ϕ e igualando-se a zero, chega-se ao ponto de mínimo da relação $k_c(\phi)$.

$$\frac{dk_c}{d\phi} = 0 \Rightarrow \phi = 1 \Rightarrow k_c = 4. \quad (19)$$

Por fim, conclui-se que:

$$\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2) \left(\frac{b}{t}\right)^2}. \quad (20)$$

A Eq. (20) representa a tensão de placa de Timoshenko, σ_{cr} , e é adotada pela ABNT NBR 8800 (2008).

3 MODELAGENS NUMÉRICAS

Na presente seção, são apresentados os procedimentos utilizados neste trabalho para a modelagem de placas através do Método das Diferenças Finitas (MDF) e com o auxílio do *software* SAP2000.

3.1 MODELAGEM VIA MDF

A modelagem das placas via método das diferenças finitas foi realizada através do *software* computacional MAPLE V 4.0 tomando por base a formulação clássica descrita em *Brush e Almroth (1975)* e que se apresenta de forma sucinta desde a Eq. (21) até a Eq. (27), mostradas ao longo dos quatro exemplos estudados.

3.2 MODELAGEM VIA SAP2000

Para a realização da modelagem computacional no *software* SAP2000 foram utilizados elementos de placa do tipo *shell thin*. Para fins de compatibilização com a modelagem via MDF, as cargas solicitantes foram aplicadas nos nós dos elementos de placa e foram introduzidas condições de contorno equivalentes às estabelecidas na modelagem via MDF.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentam-se os resultados da análise numérica, determinados a partir do método das diferenças finitas (MDF). Como exemplos será analisada uma placa metálica sujeita a esforços normais de compressão aplicados de forma paralela à mesma e em seguida uma laje de concreto armado sujeita a uma carga distribuída aplicada de forma perpendicular à placa. Com o intuito de validar a eficiência do método, os resultados serão comparados com resultados teóricos e com outros processos numéricos como por exemplo o método dos elementos finitos. Por fim, será modelada numericamente a mesma laje sujeita simultaneamente às cargas aplicadas de forma paralela e perpendicular à laje. Para este exemplo os resultados serão confrontados com respostas determinadas a partir do programa SAP2000. Por diferenças finitas, chega-se a:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{m,n} \cong \frac{1}{\lambda^4} (w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}). \quad (21a)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{m,n} \cong \frac{1}{\lambda^4} (w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}). \quad (21b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{m,n} \cong \frac{1}{\lambda^2} (w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}). \quad (21b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{m,n} \cong \frac{1}{\lambda^2} (w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}). \quad (21c)$$

em que λ é o espaçamento entre os pontos pivotais do grid nas duas direções. E por fim:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{m,n} \cong \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{m,n} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{m,n-1} - 2\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{m,n} + \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{m,n+1} \right]. \quad (21d)$$

A equação será escrita ainda como:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{m,n} \cong \frac{1}{\lambda^4} \left[4w_{m,n} - 2(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) + (w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1}) \right]. \quad (21e)$$

Por fim, a equação geral será:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^4} [w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}] + \\ & \frac{2}{\lambda^4} [4w_{m,n} - 2(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) + (w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1})] = 0 \\ & \frac{1}{\lambda^4} [w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}] \\ & \frac{N_x}{D\lambda^2} [w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}] \end{aligned} \quad (22)$$

4.1 Placa metálica quadrada com quatro bordas apoiadas

Neste exemplo apresenta-se uma placa fina metálica quadrada com as quatro bordas apoiadas sujeita a esforços normais uniformemente distribuídos aplicados na direção de x , conforme mostra a Fig. 1. O objetivo da análise é determinar numericamente a tensão crítica de flambagem da placa. Os dados de entrada são $b = a = 250 \text{ mm}$ e $t = 8 \text{ mm}$, $E = 205 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.30$.

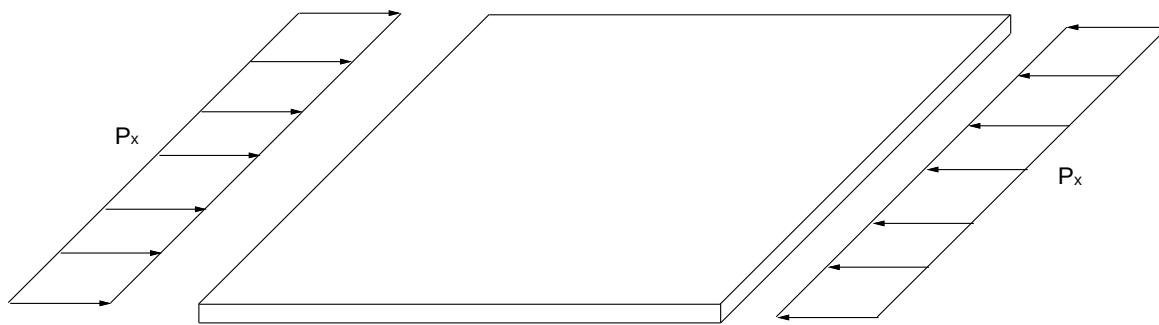


Figura 1. Placa metálica

Para este exemplo a equação da placa é representada como:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{P_x}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (23)$$

Ou ainda

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{12 P_x (1 - \nu^2)}{E t^3 b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (24)$$

Substituindo-se os parâmetros na Eq. (24), vem:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4,16 \times 10^{-4} P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (25)$$

Na Fig. 2 apresenta-se o grid bidimensional utilizado para a modelagem do problema.

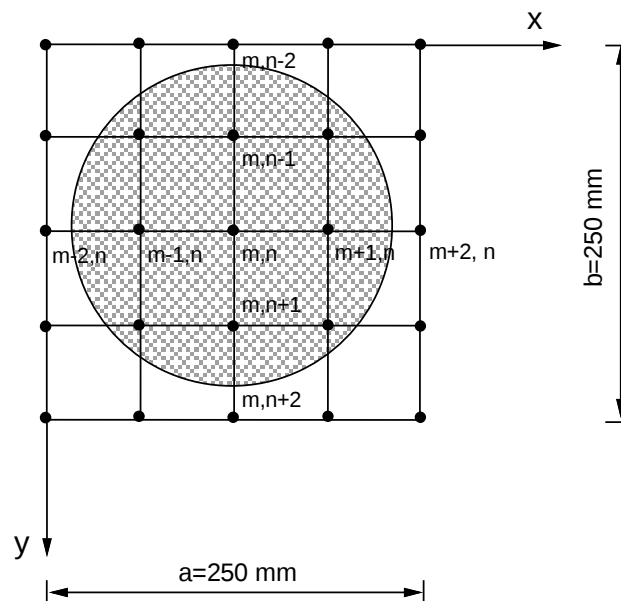


Figura 2. Grid bidimensional para a placa metálica

Para a placa biapoiada tem-se que $\lambda = \Delta x = \Delta y = 62.5 \text{ mm}$. As condições de contorno do problema são: A deflexão $w = 0$ e a curvatura $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ para $x = 0$ e $x = a$, a deflexão $w = 0$, a curvatura $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ para $y = 0$ e $y = b$ e a rotação $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ para $x = \frac{a}{2}$ e $y = \frac{b}{2}$. Como:

$$w_{m,n+2} = 0 \Rightarrow w_{m,n+1} = -w_{m,n+3}$$

$$w_{m,n-2} = 0 \Rightarrow w_{m,n-1} = -w_{m,n-3}$$

$$w_{m+2,n} = 0 \Rightarrow w_{m+1,n} = -w_{m+3,n}$$

$$w_{m-2,n} = 0 \Rightarrow w_{m-1,n} = -w_{m-3,n}$$

Estas relações são obtidas com as equações das curvaturas em cada um dos pontos pivotais do *grid*. Neste exemplo, a placa foi discretizada com 25 pontos pivotais. Daí, a partir da introdução das condições de contorno do problema, as matrizes serão (9x9). Após as manipulações matemáticas realizadas, chega-se a um problema de autovalor generalizado, cuja solução fornecerá o valor da carga P_x e posteriormente o valor da tensão crítica de placa. Em seguida, obtêm-se os autovetores onde é possível determinar a deflexão máxima placa.

Para fins de comparação, este exemplo também foi modelado no software SAP2000. Para tanto, foi utilizado um elemento de placa fina cuja malha adotada possui 16 elementos com 25 pontos nodais.

Na Tabela 1 apresentam-se os resultados da tensão crítica determinados a partir de duas metodologias.

Tabela 1. Tensão crítica da Placa Metálica

Metodologia	σ_{cr} (N/m ²)	MDF/Teoria	MDF/SAP2000
Teoria de Placas	7.58×10^8		
Método das Diferenças Finitas (MDF)	7.72×10^8	1.018	1.008
SAP2000	7.66×10^8		

Variando-se o parâmetro ϕ que representa a relação entre as dimensões da placa e como este parâmetro é função de k_c , chega-se à seguinte relação correspondente ao 1º modo de flambagem de uma placa com quatro bordas apoiadas, conforme mostra graficamente a Tab. 2 e a Fig. 3.

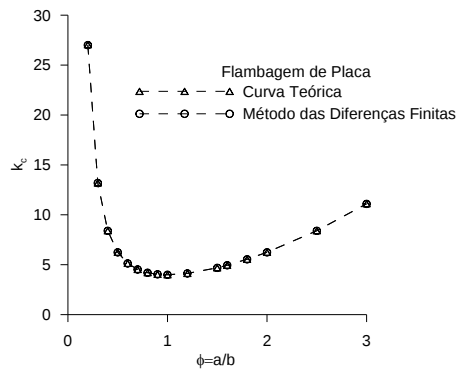


Figura 3. Curva Teórica: Flambagem de Placa fina

Tabela 2. Coeficiente de flambagem

ϕ	k_c Teoria de Placas	k_c (MDF)	MDF/Teoria
0.2	27.04	27.00	0.998
0.3	13.201	13.184	0.998
0.4	8.41	8.399	0.998
0.5	6.25	6.24	0.998
0.6	5.1377	5.1313	0.998
0.7	4.5308	4.5251	0.998
0.8	4.2025	4.1972	0.998
0.9	4.044	4.039	0.998
1.0	4	3.995	0.998
1.2	4.1344	4.1292	0.998
1.5	4.6944	4.6885	0.998
1.6	4.950625	4.9444	0.998
1.8	5.5486	5.5417	0.998
2	6.25	6.24	0.998
2.5	8.41	8.399	0.998
3	11.11	11.096	0.998

4.2 Laje de concreto armado com as quatro bordas apoiadas

Neste exemplo pede-se para determinar numericamente com auxílio do método das diferenças finitas a flecha máxima de uma laje maciça de concreto armado com as quatro bordas apoiadas. Considere as seguintes dimensões para a laje ($5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 0.1\text{ m}$), concreto com $f_{ck} = 25\text{ MPa}$, $\nu = 0.25$, aço CA50 e o módulo de elasticidade do concreto $E_c = 0.85 \times 5600 \sqrt{f_{ck}}$. Neste exemplo considera-se uma carga permanente de 2.92 kN/m^2 , uma carga acidental de 2 kN/m^2 (carga para salas de escritório segundo a ABNT NBR 6120 (1980)). Combinando-se os carregamentos chega-se a uma carga de projeto igual a $q_d = 6.89\text{ kN/m}^2$. Na Fig. 4 apresenta-se o esquema da laje com a carga aplicada.

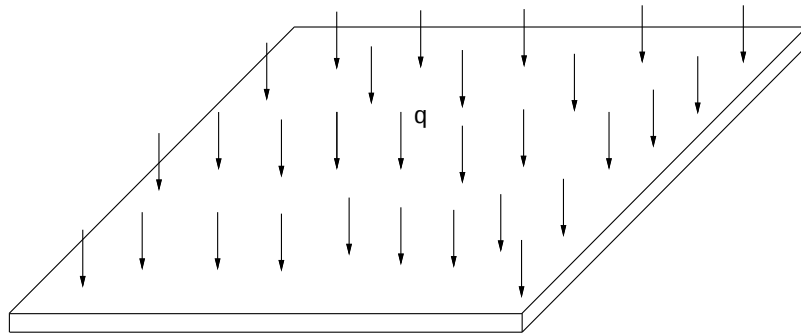


Figura 4. Laje de concreto armado

Para este exemplo, a equação da placa é representada como:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0. \quad (26)$$

Como a laje é quadrada e apresenta as quatro bordas apoiadas, tem-se que $\lambda = 1$ e $\alpha = 4.67$, $l_x = l_y = 5\text{ m}$, $E_c = 23.8\text{ GPa}$ e $h = 10\text{ cm}$. Lembrando que a deflexão segundo a ABNT NBR 6118 (2007) é calculada como:

$$a = \frac{q_d l_x^2 \alpha}{E h^3 100} \quad (27)$$

em que a carga q_d é o carregamento uniformemente distribuído aplicado na laje de concreto armado. Neste exemplo, a laje foi discretizada com 49 pontos pivotais. Daí, a partir da introdução das condições de contorno do problema as matrizes serão (16×16) , conforme mostra a Eq. (27). Resolvendo-se o sistema de equações obtêm-se os valores dos deslocamentos em todos os pontos internos da laje de concreto.

O exemplo também foi simulado no software SAP2000 para fins de validação. Para tanto, foi utilizado um elemento de placa fina o qual foi modelado utilizando-se as malhas equivalentes a 25 e 49 pontos nodais.

Na Tabela 3 apresentam-se os resultados da deflexão máxima na laje de concreto armado.

Tabela 3. Deflexão máxima da laje de concreto (mm)

Grid	MDF	ABNT NBR 6118 (2014)	MDF/NBR 6118 (2014)	SAP2000	MDF /SAP2000
25 pontos pivotaes	7.650	8.449	0.905	8.230	0.930
49 pontos pivotaes	8.243	8.449	0.976	8.257	0.998

4.3 Laje isolada de concreto armado

Neste exemplo apresenta-se a resolução de uma laje isolada, analisada por Carvalho (1994) e por Pereira (2015). Para isso, utilizou-se o método da analogia de grelha, que se fundamenta na substituição da placa (laje) por uma malha equivalente de vigas formando a grelha equivalente. A laje quadrada possui 4 m de lado e espessura igual a 8 cm, apresenta quatro bordas apoiadas e está submetida a um carregamento uniformemente distribuído igual a 5 kN/m^2 . O módulo de elasticidade longitudinal é $E_c = 28.559 \text{ GPa}$ e o coeficiente de Poisson é igual a zero.

Na Tabela 4 apresentam-se os resultados correspondentes à flecha máxima determinadas com base na expressão da flecha imediata definida pela ABNT NBR 6118 (2007), a partir da analogia de grelha, a partir do método das diferenças finitas e com o auxílio do método dos elementos finitos a partir do programa SAP2000.

Tabela 4. Flecha máxima da laje de concreto (mm)

Grid	MDF	SAP2000	Pereira (2015)	Carvalho (1994)	ABNT NBR 6118 (2007)
49 pontos pivotaes	4.25	4.266	4.326	4.363	4.1

A seguir mostram-se os resultados referentes ao momento fletor máximo no meio da laje de concreto armado. Para o cálculo do esforço considera-se um coeficiente de Poisson igual a $\nu = 0.3$. Na Tabela 5, mostram-se os resultados dos momentos fletores no meio da laje isolada de concreto.

Tabela 5. Momento Fletor Máximo (kNm)

ν	MDF	SAP2000	Pereira (2015)	Carvalho (1994)
0.3	4.1	4.0	3.62	3.62

4.4 Laje de concreto armado com quatro bordas apoiadas sujeita a dois carregamentos

Este exemplo é análogo ao exemplo 4.2, porém consideram-se duas cargas sendo uma delas aplicada de forma paralela à laje, cujo valor é $P_x = 13.04 \text{ kN/m}$ e a segunda é uma carga de projeto igual a $q_d = 6.89 \text{ kN/m}^2$, que atua de maneira perpendicular ao painel. Na Fig. 5 apresenta-se o esquema da laje de concreto com os carregamentos aplicados.

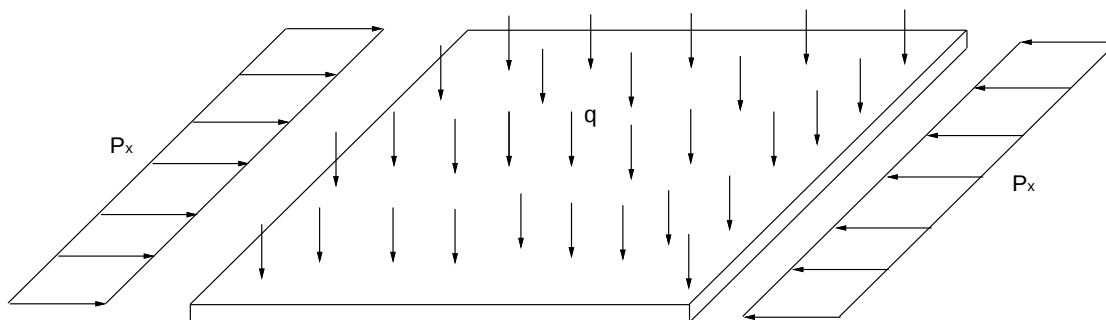


Figura 5. Laje de concreto armado com efeito de diafragma

Para este exemplo, a equação diferencial da placa é representada como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{1}{D}. \quad (28)$$

Na Tabela 6 apresentam-se os resultados da deflexão máxima na laje de concreto armado.

Tabela 6. Deflexão máxima da laje de concreto (mm)

Grid	MDF	SAP2000	MDF/SAP2000
49 pontos pivotaes	7.85	7.98	0.984

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado o estudo da teoria de placas a partir da descrição de uma formulação matemática baseada no método das diferenças finitas (MDF) e destinada à avaliação do comportamento elástico de elementos planos bidimensionais sujeitos a cargas paralelas, perpendiculares à placa ou aplicadas de forma simultânea na mesma.

Através do método das diferenças finitas foram analisados alguns exemplos: o primeiro deles consiste em uma placa fina metálica sujeita a esforços normais de compressão aplicados de forma paralela à mesma. Nos demais exemplos foi analisada uma laje de concreto armado. Um dos exemplos aborda a situação em que a laje está sujeita apenas a uma carga distribuída aplicada de forma perpendicular ao seu plano e na outra aplicação, a laje se encontra submetida simultaneamente a cargas aplicadas de forma paralela e perpendiculares à laje.

Os resultados deste trabalho foram validados mediante a comparação com resultados teóricos, normativos e com respostas determinadas a partir do programa SAP2000 (baseado no método dos elementos finitos).

Com relação ao segundo e terceiro exemplos é importante ressaltar que à medida que se realizou um maior refinamento do grid, os resultados numéricos referentes ao MDF (método das diferenças finitas) se aproximaram mais da resposta da ABNT NBR 6118 (2007) e também dos resultados obtidos através do SAP2000. Lembrando que nas duas situações, utilizaram-se 49 pontos pivotais.

No terceiro exemplo verificou-se uma boa concordância entre as respostas determinadas com base no MDF e no programa SAP2000, porém certa discrepância com os resultados correspondentes à flecha máxima e ao momento fletor máximo no meio da laje obtidos por Pereira (2015) e por Carvalho (1994). Isso se deve ao fato de ambos terem utilizado nas modelagens o processo de analogia de grelha.

Por fim, conclui-se a partir dos exemplos analisados que os resultados numéricos obtidos via MDF (método das diferenças finitas) apresentaram boa concordância com as respostas teóricas e com o resultado da deflexão da laje no regime linear elástico e que corresponde à flecha imediata preconizada pela ABNT NBR 6118 (2007).

Com relação às comparações realizadas com o software SAP2000, que é um importante pacote computacional comercial, verificou-se uma aproximação superior a 98% o que comprova mais uma vez a eficiência do método das diferenças finitas (MDF) para a resolução destes problemas de engenharia estrutural.

REFERÊNCIAS

- ABNT NBR 6118. Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- ABNT NBR 6120. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), Rio de Janeiro, Brasil, 1980.
- ABNT NBR 8800. Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), Rio de Janeiro, Brasil, 2008.
- Azevedo, A.F.M., 2003. *Método dos elementos finitos*. 1ª Edição, Lisboa.
- Bleich, F., 1952. *Buckling strength of metal structures*. New York: McGraw-Hill, pp 508.
- Brush, D.O.; Almroth B.O., 1975. *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. McGraw-Hill, Japan.
- Bulson, P.S.; Allen, H.G., 1982. *Background to Buckling*. McGraw Hill, USA.
- Carvalho, R.C., 1994. *Análise Não Linear de Pavimentos de Edifícios de concreto através da Analogia de Grelha*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos/SP.
- Chaves, E.W.V. 1997. *Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno*. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos/SP.
- Coda, H.B.; Paccola, R.B., 2006. *Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da Combinação entre o MEC e o MEF*. São Paulo.
- COMPUTERS & STRUCTURES INC. SAP2000 Structural Analysis Program: Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, Berkeley, California, USA, 2000.

- Dinis, L.M.J., 2004, *Placas e Cascas*. Material didático, Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, Portugal.
- Fernandes, G.R., 1998. *Método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas*. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.
- Lima, J. C. A., 2009. *Modelagem computacional de placas de matriz cimentícia reforçadas com fibras de sisal*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana/BA.
- Mendonça, P. T. R., 2005. Materiais Compostos e estruturas sanduíche: projeto e análise. Livro, Barueri.
- Pereira, R.A.T., 2015. *Análise de Estruturas Reticuladas Espaciais com Barras de Seções Variáveis*. Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG.
- Rocha, P.A.S.; Rocha, L.T. and Maciel, A.L.F., 2012. Uso do Método das diferenças finitas para a resolução de problemas de engenharia estrutural. *XV Encontro de Modelagem Computacional e III Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais*, Uberlândia/MG, Brasil.
- Szilard, R., 2004. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. John Wiley & Sons.
- Timoshenko, S. P.; Krieger, W.S., 1959. *Theory of plates and shells*. 2ª Ed, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- Timoshenko, S.P.; Krieger, W.S., 1970. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, Second Edition.