



OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÕES DE TENSÃO LOCAL USANDO UMA EQUAÇÃO DE REAÇÃO-DIFUSÃO BASEADA EM LEVEL SETS

Hélio Emmendoerfer Junior

Eduardo Alberto Fancello

helio.e.j@posgrad.ufsc.br

fancello@grante.ufsc.br

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Departamento de Engenharia Mecânica

Campus Universitário - Trindade, 88040-900, Florianópolis, SC, Brasil

Abstract. *Este trabalho apresenta um procedimento para resolver problemas de otimização topológica com restrições de tensão local. As restrições são (uniformemente) distribuídas ao longo do domínio e impostas ao problema de minimização de massa usando uma abordagem Lagrangiano aumentado. Durante a modificação da topologia, baseada em level set, a função para restringir tensão utiliza uma contínua ativação/desativação das restrições à medida que a fronteira avança. O problema é regularizado adicionando-se à função objetivo um termo correspondente a uma penalização (quadrática) do perímetro. Como consequência, a regularização associada à proposta de decréscimo do funcional objetivo dá origem a uma equação de reação-difusão que é usada para a evolução das fronteiras. O processo de otimização permite a nucleação de furos, característica fundamental para um método de otimização topológica. O exemplo da estrutura em formato L, referência para problemas com restrições de tensão, é usado para demonstrar a capacidade do algoritmo em eliminar concentrações de tensão.*

Keywords: *Otimização topológica, Level sets, Restrição de tensão, Lagrangiano aumentado, Reação-difusão*

1 INTRODUÇÃO

Embora a função objetivo mais utilizada em otimização topológica estrutural tenha sido a energia de deformação (problemas de *compliance*), os projetos obtidos segundo este formalismo não satisfazem, em geral, critérios de falha mecânica, precisando de modificações posteriores para se ajustar a estes requisitos. Com o intuito de eliminar este retrabalho, os problemas de otimização topológica envolvendo restrições de tensão tem atraído a atenção de pesquisadores apesar das dificuldades matemáticas e numéricas envolvidas no problema. Após o trabalho pioneiro de Duysinx e Bendsøe (1998) tratando restrições de tensão em estruturas de meio contínuo, vários estudos foram publicados sobre este assunto, sendo a grande maioria deles na última década. Uma das principais dificuldades associadas ao problema é o grande número de restrições impostas pela natureza local da restrição de tensão. Visando abordar esta questão, Pereira et al. (2004) manipulou as restrições locais usando uma técnica Lagrangiano aumentado combinando os conceitos de material intermediário artificial (SIMP). Mais tarde, esta abordagem foi estendida para casos com múltiplos carregamentos (Fancello e Pereira, 2003) e condições de contato (Fancello, 2006). Algumas estratégias adotadas por alguns trabalhos (Guilherme e Fonseca, 2007; París et al., 2009) consistem em usar formas integrais das restrições de tensão, baseadas na norma- p ou função Kreisselmeier-Steinhauser (KS), conhecidas como restrições globais. Embora esta escolha diminua o custo computacional, há perda do controle local e os resultados podem não identificar as concentrações de tensão. Como uma tentativa de superar esta dificuldade, certos estudos dividem o domínio em subregiões e usam uma norma global para agrupar as restrições de cada subregião (París et al., 2010; Le et al., 2010; Moon e Yoon, 2013; Luo et al., 2013; Holmberg et al., 2013; Luo et al., 2014). Uma abordagem não clássica para o problema com restrições local de tensão é encontrada em Amstutz e Novotny (2010), onde a informação da derivada topológica da função objetivo que incorpora uma penalização das restrições, fornece resultados numéricos muito satisfatórios.

Outra dificuldade clássica enfrentada pelos problemas que envolvem restrições de tensão e a técnica de materiais intermediários (i.e., SIMP) é o aparecimento do fenômeno conhecido como *singularidade de tensões*. Duas principais abordagens se destacam na literatura para tratar este problema. A primeira é conhecida como ϵ -relaxação de Cheng e Guo (1997) e a outra, surgindo como uma alternativa à primeira, é chamada abordagem- qp de Bruggi (2008).

Como alternativa ao uso dos materiais intermediários, as formulações usando conceitos de curvas de nível (ou *level sets*) para o controle de fronteiras tem ganho popularidade (uma boa revisão pode ser vista em van Dijk et al. (2013) e Gain e Paulino (2013)). Abordagens *level set* para resolver problemas com restrições de tensão foram propostos em Guo et al. (2011); Wang e Li (2013); Zhang et al. (2013); Emmendoerfer Jr e Fancello (2014). Estes trabalhos utilizam a equação de Hamilton-Jacobi para a evolução da função de nível (ou função *level set*) que, por sua vez, tem a limitação de não permitir a criação de novos furos no domínio durante o processo de otimização (Sethian, 1999). Como consequência, estas técnicas de otimização são chamadas, algumas vezes, de otimização de forma ao invés de topológica. Dentre as diferentes alternativas para superar esta limitação, citam-se o trabalho de Allaire e Jouve (2008) que inclui informações da derivada topológica para nuclear furos, de Wang et al. (2007), que utiliza as funções de base radial, de Jia et al. (2011), que combina as técnicas de otimização estrutural evolucionária e o de Dunning e Kim (2013) que considera uma função *level set* secundária. Uma abordagem particularmente efetiva foi proposta por Yamada et al. (2010) que regulariza o problema de otimização introduzindo uma equação de reação-difusão para a evolução da

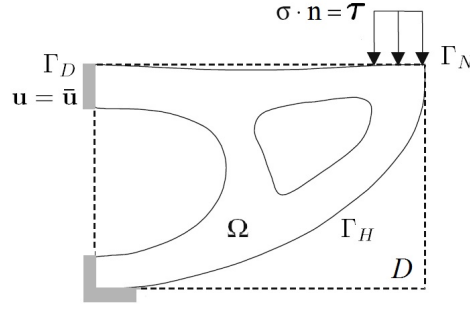


Figura 1: Definições geométricas de um domínio composto por regiões com material e vazios, além das condições de contorno.

função de nível. Esta proposição não faz uso de reinicialização da função de nível, necessária em evoluções de Hamilton-Jacobi, e permite a geração de novos furos.

O propósito do presente trabalho consiste em reformular o problema de mínima massa com restrições de tensão, mantendo a mesma abordagem local para as tensões proposta em Emmendoerfer Jr e Fancello (2014), porém modificando o procedimento de evolução da função de nível para um formato similar àquele proposto em Yamada et al. (2010). Duas consequências importantes desta modificação foram observadas: a primeira é a eliminação do processo de reinicialização conferindo estabilidade à sequência minimizante. A segunda, é a possibilidade de criação de novos furos, permitindo que a sequência de otimização possa iniciar com diferentes configurações, até mesmo sem furos.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ um domínio fixo que contem todas as configurações Ω admissíveis, $\Omega \subseteq D$. Esta configuração é representada por uma função $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que:

$$\phi(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D \setminus (\Omega \cup \partial\Omega). \quad (3)$$

As expressões (1)-(3) definem a região interna, fronteira e externa a Ω , respectivamente. Variações em ϕ modificam as curvas de níveis e consequentemente a fronteira $\partial\Omega$ (Osher e Sethian, 1988; Sethian, 1999). A fronteira $\partial\Omega$ é dividida em três partes: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_H$. Em Γ_D são impostas as condições de contorno de Dirichlet, em Γ_N condições de Neumann não nulas de valor τ e em Γ_H condições de contorno de Neumann homogêneas. Γ_H é a única parte da fronteira que pode se movimentar durante o processo de otimização. Esta representação pode ser vista na Fig. 1.

Considera-se que o domínio seja ocupado por duas fases materiais: em Ω tem-se material 1 enquanto o complemento $D \setminus (\Omega \cup \partial\Omega)$ é preenchido por um material 2, onde as propriedades do material 2 possuem valores significativamente menores do que o material 1. O problema de elasticidade linear que fornece o campo de deslocamentos $\mathbf{u} \in U$ pode ser escrito em termos de

ϕ como:

$$a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_\phi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4)$$

$$a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D \mathbf{C}(\phi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dD, \quad l_\phi(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} d\partial\Omega, \quad (5)$$

onde U e V são os espaços dos deslocamentos e variações admissíveis, respectivamente. Os operadores lineares $a_\phi(\cdot, \cdot)$ e $l_\phi(\cdot)$ representam o trabalho virtual das forças internas e externas, respectivamente. Por razões de simplicidade, as forças de corpo não são consideradas em (5). $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u}$ corresponde ao tensor de deformações lineares e $\mathbf{C}(\phi)$ é o tensor de elasticidade isotrópico dado como:

$$\mathbf{C}(\phi) = H(\phi)^p \mathbf{C}_1 + (1 - H(\phi)^p) \mathbf{C}_2, \quad (6)$$

onde $p > 1$ é um expoente de penalização. A função Heaviside é definida como:

$$H(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi(\mathbf{x}) \geq 0, \\ 0, & \text{se } \phi(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \quad (7)$$

2.1 O problema de otimização topológica com restrições

O principal objetivo deste trabalho é formular o problema de otimização estrutural de minimização de massa com restrições de tensão (falha) local. O problema pode ser escrito em termos da função ϕ como:

Problema P_1 :

$$\begin{aligned} \min_{\phi} \quad & m_\phi(\mathbf{u}) = \int_D \left[\rho(\phi) + \frac{\mu}{2} \mathbf{C}(\phi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right] dD, \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_\phi(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V, \\ H(\phi)g(\mathbf{u}) \leq 0, & \forall \mathbf{x} \in D, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

onde

$$\rho(\phi) = H(\phi)\rho_1 + (1 - H(\phi))\rho_2, \quad (9)$$

é a densidade do material e $g(\mathbf{u})$ é uma restrição de tensão que deve ser satisfeita quase em todo lugar de D . O segundo termo do funcional objetivo corresponde a uma porção da energia de deformação que é ponderada pelo fator fixo $\mu \geq 0$.

A função Heaviside presente nas integrais permite o uso de uma malha fixa durante a modificação do domínio Ω guiado pela função ϕ . Uma consequência disto é que os elementos interceptados pela fronteira $\partial\Omega$ contêm materiais 1 e 2 simultaneamente. Devido à presença de tais elementos, por questões técnicas, a expressão (6) é calculada como

$$\mathbf{C}^e = (a^e)^p \mathbf{C}_1 + [1 - (a^e)^p] \mathbf{C}_2, \quad a^e = \frac{\int_{D_e} H(\phi) dD}{\int_{D_e} dD}. \quad (10)$$

Embora esta aproximação seja análoga àquela usada para materiais intermediários, não existe nenhuma microestrutura presente, mas elementos parcialmente cobertos por Ω . Note que a relação entre o tensor de elasticidade $\mathbf{C}$ e a fração de área a^e segue a lei SIMP. Dentro deste contexto, a Eq. (9) fica dada por

$$\rho^e = a^e \rho_1 + (1 - a^e) \rho_2. \quad (11)$$

Uma outra questão técnica importante, principalmente pelo foco do problema proposto, consiste na definição de uma apropriada restrição de tensão para os elementos cortados pela fronteira. A próxima seção é dedicada para tratar este assunto.

2.2 Restrição de tensão

A definição da restrição de tensão usada neste trabalho segue a proposta de Emmendoerfer Jr e Fancello (2014). A restrição contínua $g(\mathbf{u})$ dada por (8) é substituída por um número finito de restrições de tensão g_r definidos em pontos de amostra $\mathbf{x}_r \in D$, $r = 1, \dots, N_r$. O número e a distribuição de $\mathbf{x}_r$ devem ser uma aproximação consistente do caso contínuo. Além disto, apenas pontos $\mathbf{x}_r$ pertencentes a Ω devem ser efetivamente considerados no conjunto de restrições. Uma restrição g_r , que tem valores contínuos à medida que a fronteira $\partial\Omega$ cruza um ponto de amostra durante o seu movimento, é dado por:

$$g_r(\mathbf{u}, \phi) = \Psi(H_r(\phi)) \frac{\sigma_r^{vM}}{\sigma_{adm}} - 1 \leq 0, \quad (12)$$

onde

$$\Psi(H_r(\phi)) = H_r(\phi)^q, \quad H_r(\phi) = \frac{1}{a_r} \int_D I_r(\mathbf{x}) H(\phi) dD, \quad (13)$$

$$I_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_r, \end{cases} \quad \text{e} \quad a_r = \int_D I_r(\mathbf{x}) dD, \quad (14)$$

$$\sigma_r^{vM} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_r \cdot \mathbf{s}_r}, \quad \mathbf{s}_r = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_r), \quad \boldsymbol{\sigma}_r := \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{u}). \quad (15)$$

O subdomínio Ω_r é uma vizinhança de $\mathbf{x}(r)$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{u})$ a deformação avaliada em $\mathbf{x}_r \in D$. A função $H_r(\phi)$ corresponde à fração volumétrica (área) de material 1 contido em Ω_r . A função Ψ tem como objetivo amplificar o valor da tensão nos pontos onde a fração de área é $0 < H_r(\phi) < 1$. Consequentemente, a tensão em $\mathbf{x}_r$ é significativa sempre que $\Omega \cap \Omega_r \neq \emptyset$, mesmo quando $\mathbf{x}_r$ está contido estritamente em Ω . A Fig. 2 mostra um ponto de amostra $\mathbf{x}_r$ com sua correspondente restrição g_r ativa mesmo com $\mathbf{x}_r \notin \Omega$.

É importante observar que independentemente se o ponto $\mathbf{x}_r$ está dentro ou fora de Ω , a correspondente tensão $\boldsymbol{\sigma}_r$ é sempre calculada pela Eq. (15) e a restrição de tensão pela Eq. (12). A variável que transforma esta tensão significativa ou não, é a fração de área $H_r(\phi)$.

Com base nas considerações acima, o problema de minimização é reformulado como:

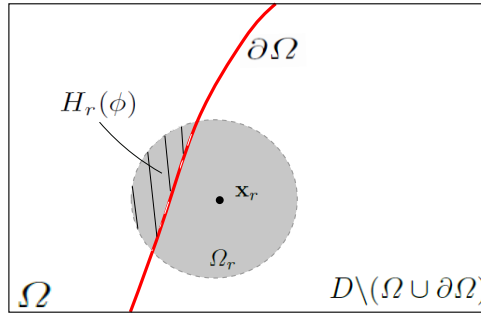


Figura 2: Ponto de amostra $\mathbf{x}_r$ e sua vizinhança Ω_r interceptado pela fronteira $\partial\Omega$. Neste caso, $\mathbf{x}_r \notin \Omega$, mas a restrição de tensão está ativa pois $\Omega \cap \Omega_r \neq \emptyset$, ou seja, $H_r(\phi) \neq 0$ (Emmendoerfer Jr e Fancello, 2014).

Problema P_2 :

$$\begin{aligned} \min_{\phi} \quad & m_{\phi}(\mathbf{u}) = \int_D \left[\rho(\phi) + \frac{\mu}{2} \mathbf{C}(\phi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right] dD, \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} a_{\phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_{\phi}(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V, \\ g_r(\mathbf{u}, \phi) \leq 0, & r = 1, \dots, N_r \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

onde $g_r(\mathbf{u}, \phi)$ é dado por (12) e N_r é o número total de pontos de amostra $\mathbf{x}_r$ em D .

2.3 Solução baseada na abordagem Lagrangiano aumentado

A abordagem Lagrangiano aumentado usada neste trabalho segue o procedimento padrão visto na literatura (Bertsekas, 1996; Martínez, 2009). As restrições de tensão do Problema P_2 são incluídas no funcional objetivo através de uma penalização composta por um termo linear e um quadrático. Define-se uma sequência de multiplicadores de Lagrange $\{\alpha_r^k\}$, $k = 1, 2, \dots$ que convergem para satisfazer as condições de otimalidade necessárias de P_2 . O problema é então reescrito como:

Problema P_3 : para dados valores do fator de penalização c^k e α_r^k , resolver o problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min_{\phi} \quad & J^k(\phi), \\ J^k(\phi) = \quad & \int_D \left[\rho(\phi) + \frac{\mu}{2} \mathbf{C}(\phi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right] dD + \sum_{r=1}^{N_r} \left\{ \alpha_r^k h_r(\mathbf{u}, \phi) + \frac{c^k}{2} [h_r(\mathbf{u}, \phi)]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{sujeito a: } a_{\phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_{\phi}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (18)$$

onde $\mathbf{u}$ é a solução de (18) e $h_r(\mathbf{u}, \phi)$ é uma função da r -ésima restrição de tensão dada por:

$$h_r(\mathbf{u}, \phi) = \max \left\{ g_r(\mathbf{u}, \phi); -\frac{\alpha_r^k}{c^k} \right\}. \quad (19)$$

Uma vez que o mínimo é atingido (ou após um número de iterações convenientemente especificado), verificar a condição:

$$|\alpha_r^k g_r^k| < \varepsilon, \quad (20)$$

onde ε é uma pequena tolerância. Caso a condição (20) não seja satisfeita, atualizar os multiplicadores de Lagrange e o fator de penalização:

$$\begin{aligned} \alpha_r^{k+1} &= \max \{ \alpha_r^k + c^k g_r^k; 0 \}, \\ c^{k+1} &= \beta c^k, \quad \beta > 1, \quad 0 < c^k < c_{\max}, \quad \forall k \in N. \end{aligned} \quad (21)$$

Atualizar $k = k + 1$ e reiniciar o processo.

3 OTIMIZAÇÃO PELO MOVIMENTO LEVEL SET

Para a evolução das fronteiras (*level sets*), neste trabalho será utilizada a abordagem proposta por Yamada et al. (2010). O problema de otimização topológica é modificado adicionando um termo de regularização:

$$\min_{\phi} \quad J_R(\phi) = J(\phi) + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 dD, \quad (22)$$

onde $J_R(\phi)$ é o funcional objetivo regularizado e $\tau > 0$ é um coeficiente de difusão que controla o efeito da regularização. A evolução da função *level set* ϕ é relacionada com a derivada do funcional regularizado (22) como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{dJ_R(\phi)}{d\phi}, \quad \frac{dJ_R(\phi)}{d\phi} = \frac{dJ(\phi)}{d\phi} - \tau \Delta \phi, \quad (23)$$

onde t é um pseudo-tempo e Δ é o operador Laplaciano. Desta forma, a evolução de ϕ termina quando a condição de otimalidade de primeira ordem do problema de minimização (22) é satisfeita.

Combinando as equações em (23), a equação de evolução temporal resultante com condições iniciais e de fronteira é resumida como segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \tau \Delta \phi - \frac{dJ(\phi)}{d\phi}, & \text{em } D \\ \phi(t=0) = \phi_0, & \text{em } D \cup \partial D \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{em } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1, & \text{em } \partial D_N \end{cases} \quad (24)$$

A primeira equação de (24) é uma equação de reação-difusão, também conhecida como equação de Allen-Cahn. O termo $\tau \Delta \phi$ representa a difusão, enquanto a derivada da função custo $dJ(\phi)/d\phi$ é o termo de reação responsável pela mudança da forma e topologia. A Eq. (24) deveria conduzir a função ϕ para uma solução local viável do problema de otimização topológica estrutural. Ainda, a função *level set* deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0, & \forall \mathbf{x} \in D \setminus (\Omega \cup \partial \Omega), \\ \phi(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega, \\ 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial \Omega. \end{cases} \quad (25)$$

3.1 Análise de sensibilidade

Esta seção tem como objetivo determinar o termo de reação $dJ(\phi)/d\phi$ da equação de evolução (24). A partir da definição de um funcional Lagrangiano para o Problema P₃:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = & \int_D \left[\rho(\phi) + \frac{\mu}{2} \mathbf{C}(\phi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right] dD + \sum_{r=1}^{Nr} \left\{ \alpha_r h_r(\mathbf{u}, \phi) + \frac{c}{2} [h_r(\mathbf{u}, \phi)]^2 \right\} \\ & + a_\phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - l_\phi(\boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda} \in V, \end{aligned} \quad (26)$$

onde a função $\boldsymbol{\lambda}$ corresponde ao multiplicador de Lagrange da restrição de equilíbrio. Seguindo o mesmo procedimento de Emmendoerfer Jr e Fancello (2014) através de derivadas de Fréchet, é possível concluir que, para um ponto $(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ estacionário em relação a $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, obtém-se

$$\frac{dJ(\phi)}{d\phi} = V(\phi)\delta(\phi), \quad (27)$$

onde $\delta(\phi)$ é a função delta de Dirac e $V(\phi)$ é dado por:

$$V(\phi) = \begin{cases} (\rho_1 - \rho_2) + p(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)H(\phi)^{p-1} \left(\frac{\mu}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ \quad + \sum_{r=1}^{Nr} \left\{ [\alpha_r + cg_r(\mathbf{u}, \phi)] \frac{I_r(\mathbf{x})}{a_r} \frac{\sigma_r^{vM}}{\sigma_{adm}} \frac{\partial \Psi(H_r(\phi))}{\partial H_r(\phi)} \right\}, \\ \quad \text{se } g_r(\mathbf{u}, \phi) \geq -\frac{\alpha_r}{c}, \\ \\ (\rho_1 - \rho_2) + p(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)H(\phi)^{p-1} \left(\frac{\mu}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \\ \quad \text{se } g_r(\mathbf{u}, \phi) < -\frac{\alpha_r}{c}. \end{cases} \quad (28)$$

Note que o campo $V(\phi)$ é a velocidade de evolução. Dois termos importantes distinguem $V(\phi)$ dado por (28) da expressão análoga obtida em Emmendoerfer Jr e Fancello (2014). O primeiro é a presença da função Heaviside que anula termos de pontos que estão fora da região com material. O outro é o termo de *compliance*, devido ao coeficiente μ .

A solução adjunta $\boldsymbol{\lambda}$ é obtida através da expressão variacional

$$\int_D \mathbf{C}(\phi) [\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda})] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dD = - \sum_{r=1}^{Nr} [\alpha_r + ch_r(\mathbf{u}, \phi)] \mathbf{C}_r \mathbf{A}_r(\mathbf{u}, \phi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V, \quad (29)$$

também conhecida como equação adjunta. $\mathbf{A}_r(\mathbf{u}, \phi)$ é um tensor que contém as derivadas das restrições de tensão em relação aos invariantes I_1 , J_2 e J_3 , dado por

$$\mathbf{A}_r(\mathbf{u}, \phi) = \frac{\partial h_r(\mathbf{u}, \phi)}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial h_r(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \mathbf{P}^T \mathbf{s}_r(\mathbf{u}) + \frac{\partial h_r(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_3} \mathbf{P}^T \mathbf{s}_r(\mathbf{u}) \mathbf{s}_r(\mathbf{u}), \quad (30)$$

onde

$$\mathbf{s}_r(\mathbf{u}) = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{u}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{II} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (31)$$

é o tensor de tensões desviadoras.

3.2 Tratamento e regularização do campo de velocidades

É importante ressaltar que é o termo de reação que, de fato, contém a informação para as mudanças topológicas desejadas, definindo a velocidade $V(\phi)$ em (27,28). Com o objetivo de aprimorar a sequência de minimização, algumas modificações são efetuadas porém, preservando suas propriedades responsáveis pelo decréscimo do funcional objetivo.

A primeira proposta de modificação consiste em estender o termo de reação $dJ(\phi)/d\phi$ para todo o domínio, eliminando o delta de Dirac presente em (27) e considerando

$$\frac{dJ}{d\phi} = V(\phi). \quad (32)$$

Desta forma, o termo de reação permite distribuir valores (incluindo zero) em D e, consequentemente, produzir modificações na função *level set* que conduzem à nucleação de novos furos no interior do domínio.

A segunda modificação consiste em seguir a proposta apresentada em Emmendoerfer Jr e Fancello (2014), fazendo o escalamento logarítmico de $V(\phi)$, ou seja,

$$V_{\log}(\phi) = \begin{cases} \ln(V(\phi) + 1), & \text{se } V(\phi) \geq 0, \\ -\ln(-V(\phi) + 1), & \text{se } V(\phi) < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Com isto, as grandes variações em amplitude de $V(\phi)$ (consequência das restrições de tensão local) são minimizadas, evitando o indesejável efeito de movimentar apenas uma pequena região da fronteira enquanto o restante permanece inalterado.

A última modificação do campo $V(\phi)$ refere-se a operações de suavização. Neste trabalho, foi utilizado o método Hilbertiano proposto por Gournay (2006), fornecendo uma velocidade mais regular $\bar{V}(\phi)$ a partir de $V_{\log}(\phi)$.

Finalmente, a velocidade $\bar{V}(\phi)$ é normalizada:

$$v(\phi) = C \frac{\bar{V}(\phi)}{\max(|\bar{V}(\phi)|)}, \quad (34)$$

onde C é um fator de peso. Portanto, a equação de reação-difusão fica dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \tau \Delta \phi - v(\phi), \quad (35)$$

com condições iniciais e de fronteira dadas por (24).

4 DISCRETIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Para a solução discreta da equação de estado (4) e da equação adjunta (29) utiliza-se o método dos elementos finitos (MEF). Uma única malha (estruturada) de elementos quadriláteros é usada para discretizar a função *level set* e para a análise dos elementos finitos.

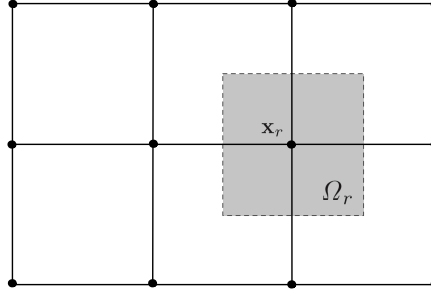


Figura 3: Exemplo de um ponto de amostra x_r (coincidente com um nó da malha de elementos finitos) e sua vizinhança Ω_r .

Para resolver a Eq. (35), utiliza-se um procedimento similar ao de Yamada et al. (2010) ou Choi et al. (2011). Usando um esquema implícito para a discretização temporal e o MEF para a discretização do domínio, a equação de evolução discretizada é dada por:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{T}_1 + \tau \mathbf{T}_2 \right) \Phi_{t+1} = \mathbf{T}_1 \left(\frac{1}{\Delta t} \Phi_t - \mathbf{v} \right), & \text{em } D \\ \phi(t) = 1, & \text{em } \partial D_N, \end{cases} \quad (36)$$

onde

$$\mathbf{T}_1 = \bigcup_e \int_{D_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dD, \quad (37)$$

$$\mathbf{T}_2 = \bigcup_e \int_{D_e} \nabla \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N} dD. \quad (38)$$

Aqui, Δt é o incremento no tempo, e é o número de elementos, $\bigcup_e$ representa a união do conjunto de elementos, $\mathbf{N}$ é a função de interpolação e $\mathbf{v}$ é o vetor de velocidades. Desta forma, a função *level set* atualizada Φ_{t+1} é obtida resolvendo (36).

Os pontos de amostra x_r , são definidos como sendo coincidentes com os nós da malha de elementos finitos. A vizinhança correspondente Ω_r é um quadrado com o mesmo tamanho de um elemento finito (ver Fig. 3), tendo como resultado a completa cobertura de D .

Devido ao uso de elementos (quadriláteros) bilineares, o campo de deformações é descontínuo. Assim, utiliza-se o esquema de recuperação clássico dado pela média das deformações elementares no nó:

$$\epsilon_r(x_r) = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\mathbf{B}_e(x_r) \mathbf{U}_e}{N_e}, \quad (39)$$

onde N_e é o número de elementos e que contém o nó x_r , $\mathbf{B}_e(x_r)$ é a matriz das derivadas da função de forma do elemento e , e $\mathbf{U}_e$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para demonstrar o comportamento do algoritmo de minimização proposto, apresenta-se o clássico problema de uma estrutura com uma singularidade geométrica. O modelo consiste

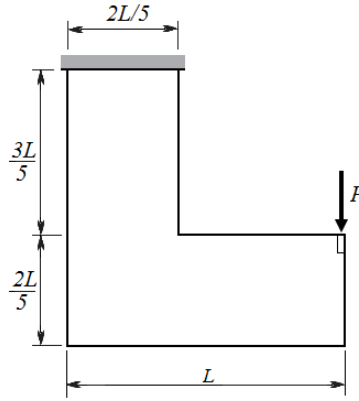


Figura 4: Estrutura em formato de L engastada na parte superior.

numa estrutura em formato de “L”, engastada na parte superior e submetida a uma força $P = 1$ N no topo do lado direito, conforme mostrado na Fig. 4, onde $L = 1$ m.

Os materiais 1 e 2 tem as seguintes propriedades: densidades $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 0.001$, e módulos de elasticidade $E_1 = 1$ e $E_2 = 0.001$. O coeficiente de Poisson é fixado em $\nu = 0.3$ e a tensão de escoamento do material é adotada como $\sigma_{adm} = 42$ Pa. O processo de otimização foi parado após $k = 60$ atualizações dos multiplicadores de Lagrange α_r com 20 iterações (fixas) para cada subproblema. O passo de tempo em (36) foi escolhido convenientemente como $\Delta t \leq 0.25$.

O domínio D foi discretizado com 160 elementos nos lados com maior comprimento, em ambas direções horizontal e vertical, totalizando 16384 elementos finitos quadrilaterais e 16705 nós. Como o número de pontos de amostra coincidem com o número de nós na malha, $N_r = 16705$. Os demais parâmetros são: $c = 0.15$ ($c_{\max} = 30c$), $\beta = 1.1$, $\mu = 0.0015$, $C = 0.25$, $p = 1.001$, $\kappa = 1(\Delta x)^2$, $\tau = 7 \times 10^{-6}$ e $q = 0.5$.

Foram consideradas duas configurações iniciais diferentes, uma contendo furos e outra sem furos. A Fig. 5(a) mostra o domínio *level set* inicial (com furos) e a Fig. 5(b)-(f) os resultados intermediários durante o processo de otimização. O projeto final e a correspondente distribuição das restrições de tensão são mostrados na Fig. 6(a) e (b), respectivamente.

Agora, partindo de uma configuração inicial sem furos, a Fig. 7 mostra o histórico das iterações. Na sequência de minimização observa-se que o algoritmo é capaz de identificar e eliminar, no início, a concentração de tensão na quina, e logo após inicia-se a nucleação de furos no domínio. O projeto ótimo e a respectiva função de restrições de tensão são mostradas na Fig. 8.

A convergência do funcional objetivo regularizado para as duas configurações iniciais é mostrada na Fig. 9. A Tabela 1 compara os valores da razão de massas (razão entre a massa na configuração final e a massa total da estrutura), da *compliance* e o valor máximo da restrição local g_r em D para as duas configurações finais. Observa-se que as estruturas ótimas obtidas no final do processo de otimização satisfazem as restrições impostas de forma razoável. Nota-se também que os projetos são diferentes dependendo da configuração inicial, entretanto as concentrações de tensão foram detectadas e eliminadas.

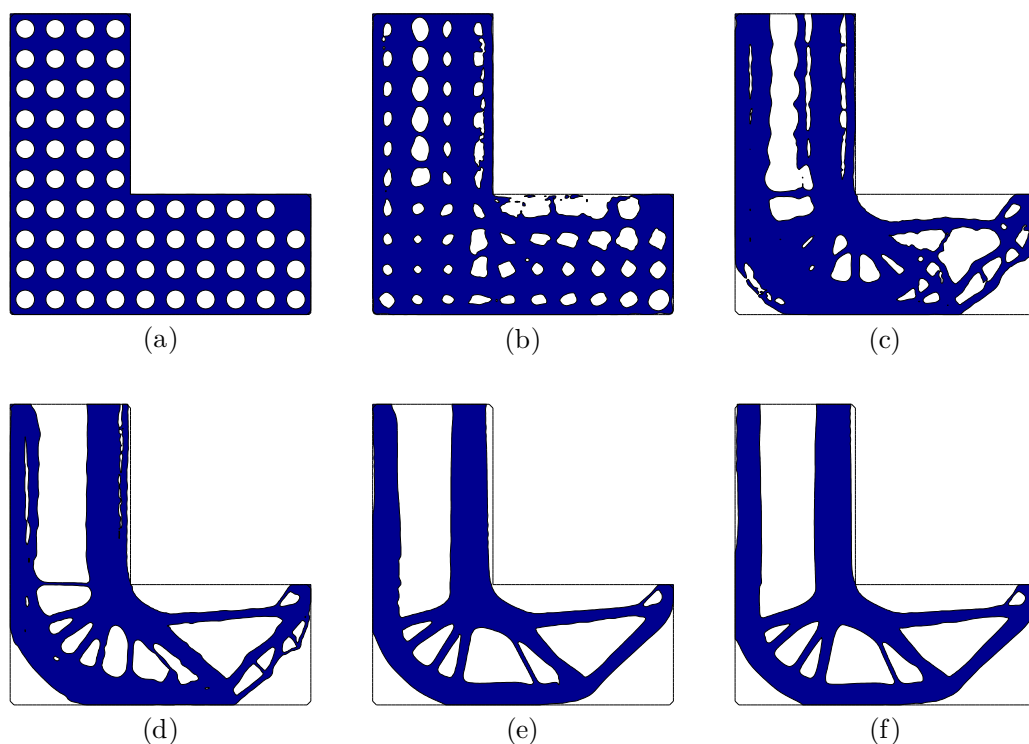


Figura 5: Resultados intermediários para uma configuração inicial com furos: (a) domínio *level set* inicial; (b) iteração 10; (c) iteração 50; (d) iteração 100; (e) iteração 300 e (f) iteração 600.

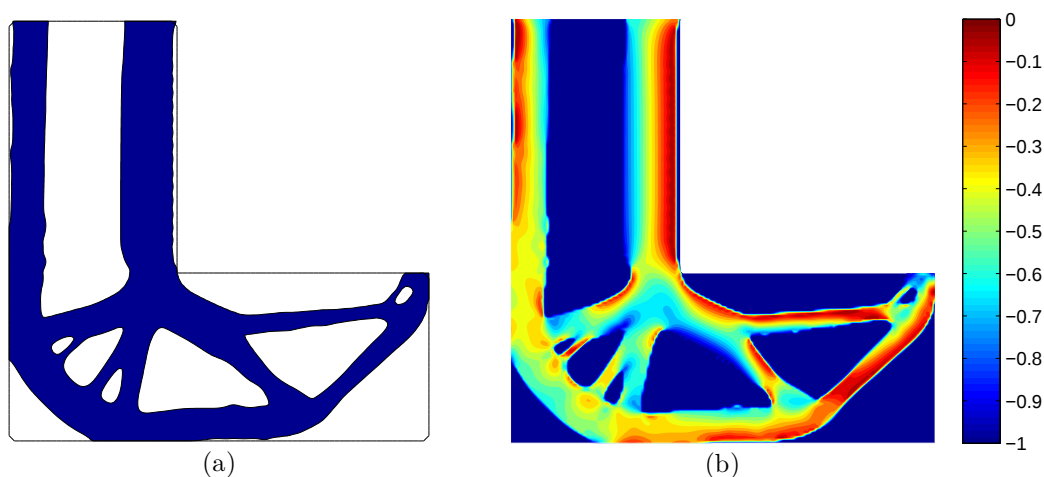


Figura 6: Configuração inicial com furos: a figura mostra o projeto no final do processo de otimização (a) e a correspondente função das restrições de tensão (b).

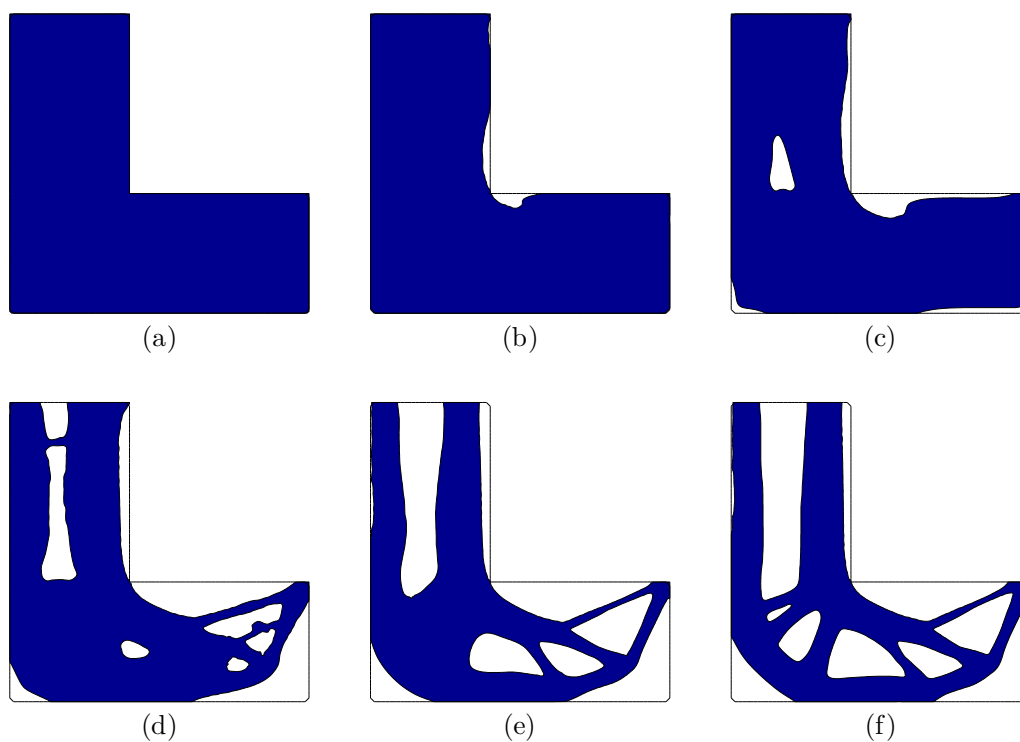


Figura 7: Resultados intermediários para uma configuração inicial sem furos: (a) domínio *level set* inicial; (b) iteração 50; (c) iteração 100; (d) iteração 150; (e) iteração 300 e (f) iteração 600.

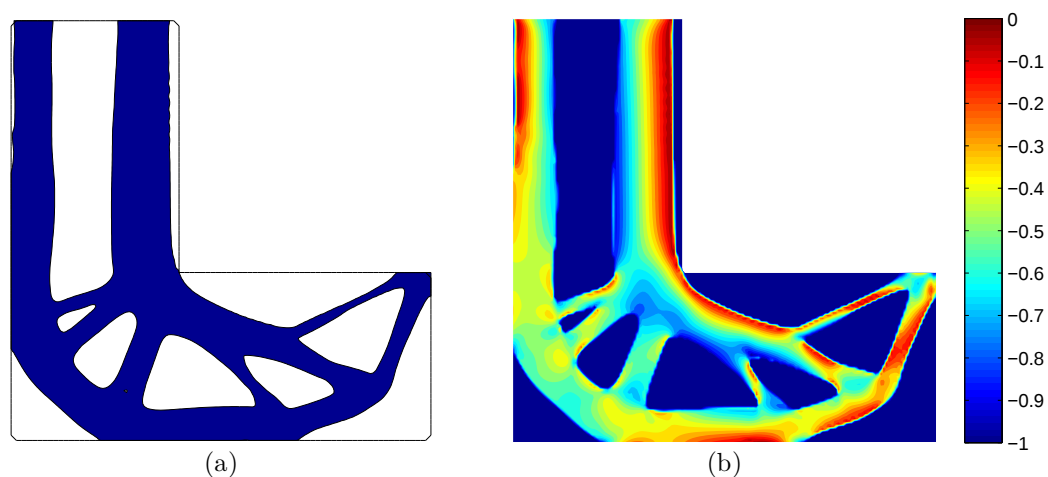


Figura 8: Configuração inicial sem furos: a figura mostra o projeto no final do processo de otimização (a) e a correspondente função das restrições de tensão (b).

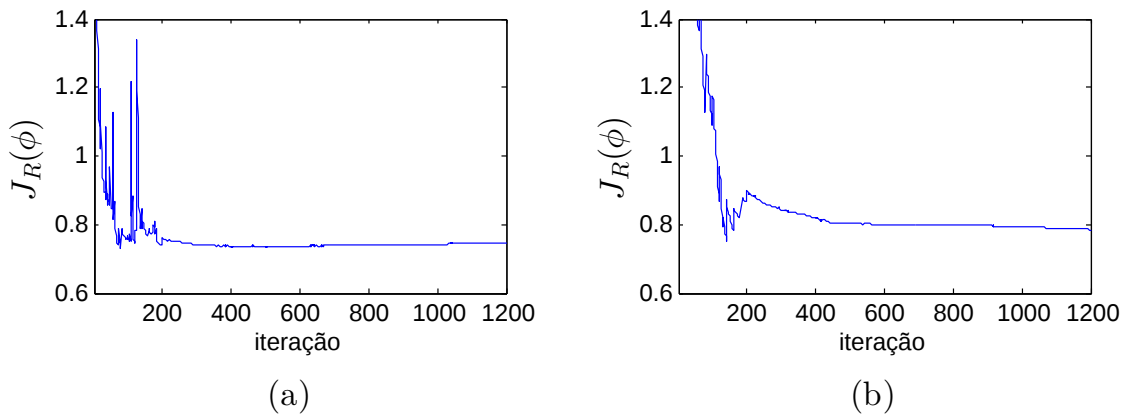


Figura 9: Convergência do funcional objetivo regularizado para as duas configurações iniciais: (a) com furos e (b) sem furos.

Tabela 1: Tabela comparativa para as duas configurações iniciais apresentadas.

Configuração inicial	Projeto final	Razão de massas	Compliance	$\max_D(g_r)$
com furos	Fig. 6(a)	0.4832	222.02	0.0020
sem furos	Fig. 8(a)	0.5310	213.92	0.0022

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi abordado o problema de otimização topológica para minimização de massa considerando restrições de tensão local. Uma técnica Lagrangiano aumentado associada com a restrição de tensão, idêntica à proposta por Emmendoerfer Jr e Fancello (2014), foi utilizada para transformar um problema de minimização com múltiplas restrições em uma sequência de problemas de minimização irrestritos. A evolução *level set*, diferentemente da clássica abordagem baseada na equação de Hamilton-Jacobi, foi controlada por uma equação reação-difusão similar àquela proposta em Yamada et al. (2010). Os resultados numéricos mostraram que o uso desta equação permitiu uma sequência minimizante com bom comportamento e eliminou a necessidade da reinicialização da função *level set* ao longo do processo de otimização. Além disto, o algoritmo proposto permitiu nuclear furos em regiões apropriadas do domínio que, no presente caso, são aquelas onde as tensões são mais baixas. Finalmente, o algoritmo foi capaz de detectar pontos com concentração de tensões e conduzir a projetos viáveis de qualidade geométrica muito satisfatórios quando comparados com resultados análogos na literatura existente.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação CAPES, Ministério de Educação do Brasil, Brasília, DF 70040-020 e ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Brasil.

REFERÊNCIAS

- Allaire, G., & Jouve, F., 2008. Minimum stress optimal design with the level set method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 32, pp. 909-918.
- Amstutz, S., & Novotny, A. A., 2010. Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 41, n. 3, pp. 407-420.
- Bertsekas, D. P., 1996. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. *Athena Scientific*, Belmont, MA, U.S.A.
- Bruggi, M., 2008. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 36, n. 2, pp. 125-141.
- Cheng, G., & Guo, X., 1997. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 13, pp. 258-266.
- Choi, J. S., Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., & Yoo, J., 2011. Topology optimization using a reaction-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 2407-2420.
- Dunning, P. D., & Kim, H. A., 2013. A new hole insertion method for level set based structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 93, pp. 118-134.
- Duysinx, P., & Bendsøe, M. P., 1998. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 1478, pp. 1453-1478.
- Emmendoerfer Jr, H., & Fancello, E. A., 2014. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 99, pp. 129-156.
- Fancello, E. A., 2006. Topology optimization for minimum mass design considering local failure constraints and contact boundary conditions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 32, pp. 229-240.
- Fancello, E. A., & Pereira, J. T., 2003. Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 1, pp. 3-24.
- Gain, A. L., & Paulino, G. H., 2013. A critical comparative assessment of differential equation-driven methods for structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 48, n. 4, pp. 685-710.
- Gournay, F., 2006. Velocity extension for the level-set method and multiple eigenvalues in shape optimization. *SIAM - Journal on Control and Optimization*, vol. 45, n. 1, pp. 343-367.
- Guilherme, C. E. M., & Fonseca, J. S. O., 2007. Topology optimization of continuum structures with ϵ -relaxed stress constraints. In Alves, M. & da Costa Mattos, H. S., eds, *Mechanics of Solids in Brazil*, pp. 239-250, Rio de Janeiro, Brasil.
- Guo, X., Zhang, W. S., Wang, M. Y., & Wei, P., 2011. Stress-related topology optimization via level set approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp.

3439-3452.

Holmberg, E., Torstenfelt, B., & Klarbring, A., 2013. Stress constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 48, n. 1, pp. 33-47.

Jia, H., Beom, H.G., Wang, Y., Lin, S., & Liu, B., 2011. Evolutionary level set method for structural topology optimization. *Computers and Structures*, vol. 89, pp. 445-454.

Le, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C., & Tortorelli, D., 2010. Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 41, n. 4, pp. 605-620.

Luo, Y., Wang, M. Y., & Kang, Z., 2013. An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 254, pp. 31-41.

Luo, Y., Zhou, M., Wang, M. Y., & Deng, Z., 2014. Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints. *Computers and Structures*, vol. 143, pp. 73-84.

Martínez, J. M., 2009. Otimização prática usando o Lagrangiano Aumentado. *Technical report*, IMECC-UNICAMP.

Moon, S. J., & Yoon, G. H., 2013. A newly developed *qp*-relaxation method for element connectivity parameterization to achieve stress-based topology optimization for geometrically non-linear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 265, pp. 226-241.

Osher, S., & Sethian, J., 1988. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, vol. 79 pp. 12-49.

París, J., Navarrina, F., Colominas, I., & Casteleiro, M., 2009. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 39, pp. 419-437.

París, J., Navarrina, F., Colominas, I., & Casteleiro, M., 2010. Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures. *Advances in Engineering Software*, vol. 41, n. 3, pp. 433-441.

Pereira, J. T., Fancello, E. A., & Barcellos, C. S., 2004. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 26, pp. 50-66.

Sethian, J. A., 1999. Level Set Method and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science. *Cambridge University Press*, Cambridge, U.K.

van Dijk, N. P., Maute, K., Langelaar, M., & van Keulen, F., 2013. Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 48, n. 3, pp. 437-472.

Wang, M. Y., & Li, L., 2013. Shape equilibrium constraint: a strategy for stress-constrained structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 47, n. 3, pp. 335-352.

Wang, S. Y., Lim, K. M., Khoo, B. C., & Wang, M. Y., 2007. An extended level set method for

shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, vol. 221, pp. 395-421.

Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., & Takezawa, A., 2010. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 2876-2891.

Zhang, W. S., Guo, X., Wang, M., & Wei, P., 2013. Optimal topology design of continuum structures with stress concentration alleviation via level set method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 93, pp. 942-959.