



MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE UM ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO DE UM COMPÓSITO REFORÇADO POR FIBRA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Silva, Amanda Rocha e

Brandão, Pedro Leonardo Kuntz Oiticica

Souza, Vandeyberg Nogueira de

Almeida, Francisco Patrick Araujo

Barbirato, João Carlos Cordeiro

amanda.arvs@gmail.com

leokuntz@gmail.com

vandeyberg.souza@gmail.com

patrick@lccv.ufal.br

jccb@lccv.ufal.br

Centro de Tecnologia/Universidade Federal de Alagoas

Campus A.C. Simões – Av. Lourival de Melo Mota, S/N, 57072-900, Cidade Universitária, Maceió, Alagoas

Resumo. Os materiais compósitos são amplamente utilizados em diversos ramos da engenharia por apresentarem desempenho superior em relação a materiais convencionais, inclusive seus próprios constituintes. Com isso, seu estudo é de suma importância para com o desenvolvimento científico e tecnológico. Este trabalho apresenta a modelagem computacional de um Elemento de Volume Representativo (EVR) com inclusão de uma fibra cilíndrica em uma matriz cúbica. Na análise do problema é utilizado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com a solução fundamental de Kelvin e elementos de contorno triangulares com aproximação linear. Na consideração dos diferentes meios, é utilizada a técnica de sub-regiões, onde são consideradas condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças na interface entre a fibra e a matriz. As modelagens numéricas realizadas visam a obtenção de propriedades físicas efetivas do material compósito, bem como o estudo da distribuição de tensões e deformações no EVR, onde se considerou variações nas propriedades físicas, dimensões e orientação da fibra.

Keywords: Modelagem tridimensional, compósito com fibra e Método dos Elementos de Contorno.

1 INTRODUÇÃO

Com o surgimento de novas tecnologias, tem-se a crescente necessidade do emprego de novos materiais, os quais apresentam desempenho em características específicas em importantes áreas da ciência e nos mais diversos setores das engenharias (Cardarelli, 1998). Tal fato tem proporcionado um desenvolvimento nas investigações teóricas, experimentais e modelagem dos mesmos. Dentro de uma importante classe destes materiais encontram-se os compósitos, os quais são formados por constituintes de natureza diferentes, resultando em um compósito de performance superior àquela de seus componentes tomados separadamente (Hoefel, 2006), e como exemplo na área da construção civil, tem-se o concreto reforçado por fibra.

Nesse contexto, o trabalho trata da discretização e análise de um Elemento de Volume Representativo (EVR) de matriz cimentícia reforçado com fibra, cuja discretização é realizada com auxílio do software SALOME (Open Cascade, 2005). Sua análise se dá via Método dos Elementos de Contorno (MEC), através de programa computacional que trabalha com multirregiões e acoplamento a outros métodos. O MEC, por sua vez, é um método numérico que permite a análise de corpos a partir da discretização do contorno do modelo, através de nós e elementos (Souza, 2007). A equação integral do MEC para o problema elástico é apresentada a partir da equação de resíduos ponderados, onde são utilizadas funções ponderadoras, as chamadas soluções fundamentais.

Com isso, o presente trabalho vem com o objetivo de analisar, através do MEC, a influência da inclusão de fibra em termos de deslocamentos e tensões em relação a matriz na qual a mesma está inserida, com auxílio de programa computacional considerando multirregiões (Almeida, 2003).

2 FORMULAÇÃO DO MEC

2.1 Formulação do MEC para problemas elásticos lineares 3D

Considere-se um sólido elástico-linear tridimensional, homogêneo e isotrópico, definido pelo domínio Ω e seu contorno Γ . A equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos, conhecida como equação de Navier-Cauchy para a estática, é apresentada na Eq. 1.

$$u_{i,jj}(\chi) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ij}(\chi) + \frac{1}{G} \cdot b_i(\chi) = 0 \quad (1.)$$

2.2 Solução Fundamental de Kelvin

Para que as formulações do MEC fiquem completamente definidas, torna-se necessário o conhecimento prévio da solução de um problema padrão da área que se deseja analisar. A este problema dá-se o nome de "problema fundamental". Para a definição do problema fundamental, considere-se Ω^* um domínio infinito cujo contorno é denotado por Γ^* . O sólido que se deseja analisar, de domínio Ω e contorno Γ , está contido em Ω^* . O problema particular indicado pelo asterisco é chamado de problema fundamental. Na

formulação desenvolvida a seguir utilizaremos a solução fundamental de Kelvin, que é a mais difundida e utilizada pelo meio técnico. A Figura 1 ilustra a definição do problema fundamental de Kelvin.

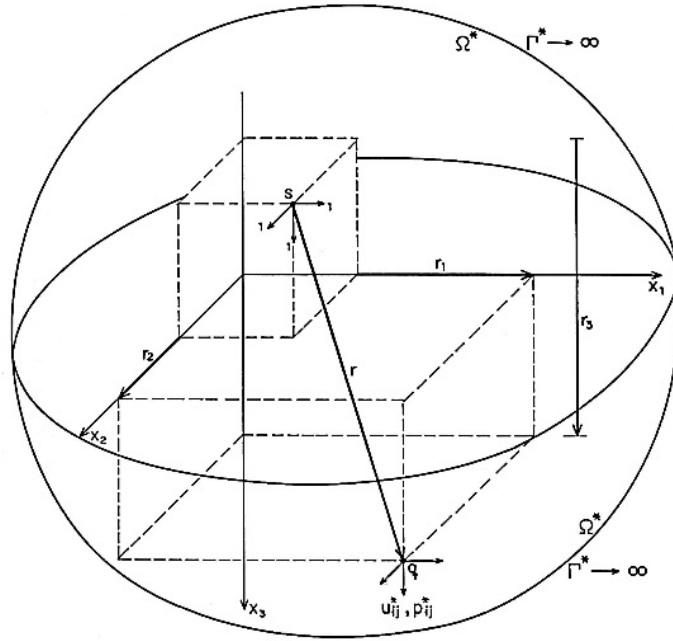


Figura 1 - Definição do Problema Fundamental de Kelvin 3D

As expressões de deslocamentos e forças de superfície para o problema de Kelvin são, respectivamente:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \quad (2.)$$

$$p_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] r_{,m} - (1 - 2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \} \quad (3.)$$

onde,

$$r = \sqrt{r_i \cdot r_i} = |s - q| \quad r_i = X_i(q) - X_i(s) \quad r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (4.)$$

A equação integral que rege o problema é:

$$c_{ij}(S)u_j(S) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \cdot u_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \cdot p_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) \cdot b_j(q) \cdot d\Omega(q), \quad (5.)$$

onde, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade (aqui de ordem 3x3, para cada ponto de colocação S); $c_{ij}(S) = 0$, para pontos externos ao domínio Ω ; $c_{ij}(S) = \mathbf{I}$, para pontos internos ao domínio Ω e $c_{ij}(S) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$, para pontos de um contorno sem angulosidades ("smooth").

Aproximando o contorno do sólido em "J" elementos, com "N" pontos nodais (nós funcionais), e o seu domínio em "M" células, a representação integral para deslocamentos, obtém-se:

$$c(S)u(S) = - \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^*(S, Q) \boldsymbol{\Phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{U}^n + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^*(S, Q) \boldsymbol{\Phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{P}^n + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \mathbf{u}^*(S, q) \boldsymbol{\Phi}_c^T(q) d\Omega(q) \right] \mathbf{B}^n, \quad (6.)$$

resultando no seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{D}\mathbf{B}. \quad (7.)$$

Um sistema de equações algébricas pode ser montado a partir da definição das matrizes H, G e D e dos valores prescritos de deslocamentos U, forças de superfície P e forças de volume B. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_{DF} = \mathbf{F} \quad (8.)$$

onde: A é uma matriz de ordem $3N \times 3N$ que contém elementos das matrizes H e G devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; VDF é o vetor das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies, de acordo com as condições de contorno; e F o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes H e G relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume.

A inclusão das fibras se dá através do método das multi-regiões, no qual é possível considerar, em um mesmo elemento, diferentes características. Portanto, é possível considerar tanto a matriz, como a própria fibra como sub-regiões diferentes.

3 APLICAÇÕES

As discretizações foram realizadas através de uma plataforma genérica de pré e pós-processamento 3D para simulação numérica, representada pelo software SALOME (Open Cascade, 2005). Com o mesmo, tanto a matriz quanto a inclusão foram discretizadas utilizando elementos triangulares com aproximação linear, como pode ser observado na Figura 2.

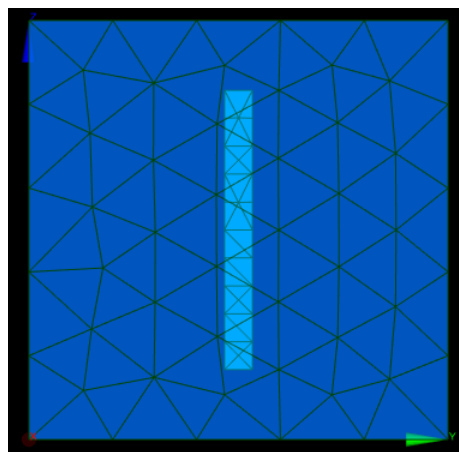


Figura 2 - Discretização do EVR (matriz e inclusão).

Em análise, tem-se o Elemento de Volume Representativo (EVR) de um compósito maior composto por matriz cúbica de 1,5 unidades de comprimento e a inclusão com as dimensões adotadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Características geométricas da segunda sub-região.

Inclusão	Aresta das bases	Comprimento
Em unidades de comprimento	0,1	1,00

A matriz foi discretizada com 564 elementos triangulares e a fibra com 172. Na discretização da matriz suas arestas foram divididas em 5 segmentos, já na fibra foram utilizadas na discretização elementos triangulares com valores de 0.1 nas arestas. Para analisar a atuação da fibra na distribuição de tensões e deformações no interior do compósito, o EVR foi colocado sob condições de carregamento unitário na direção positiva do eixo Z e engaste conforme apresentado na

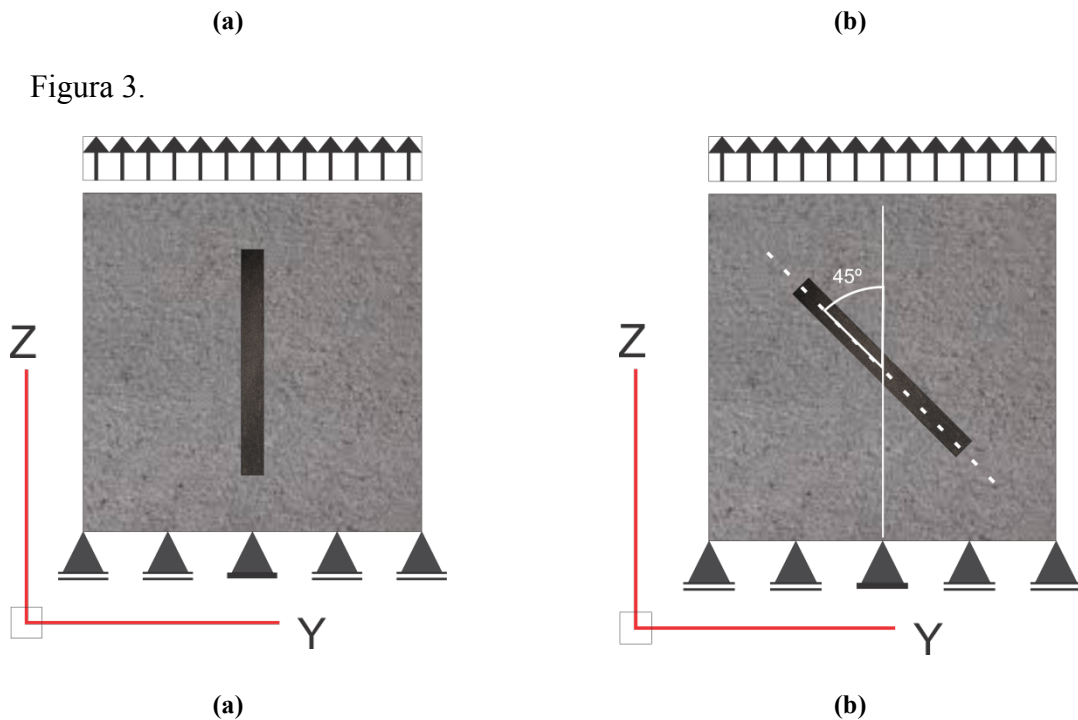


Figura 3 – Representação das condições de contorno para o caso principal a 0° (a) e rotacionado a 45° (b).

Para tanto, nas faces inferior e superior da matriz, foram gerados nós duplos para possibilitar a inserção das condições de contorno da análise numérica. A geração dos nós duplos permite que seja criada uma descontinuidade na análise, a qual possibilita a prescrição de carregamentos e deslocamentos ao problema. A conectividade dos nós do topo e seus respectivos nós duplos é apresentada na Figura 4.

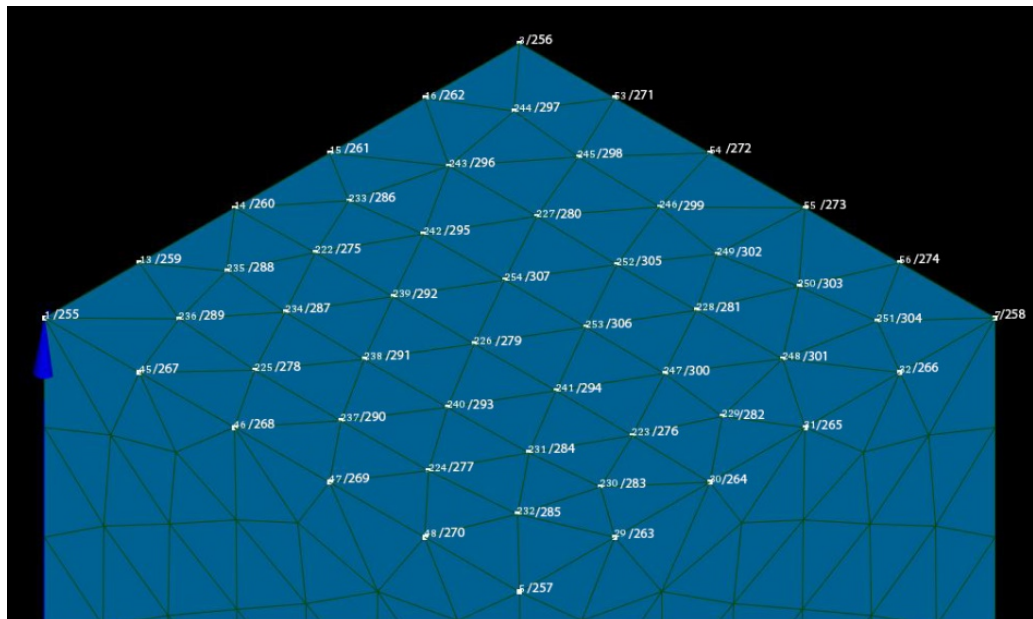


Figura 4 - Discretização da matriz com nós duplos do topo do EVR.

As análises foram realizadas através de um programa computacional que utiliza o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com acoplamento de sub-regiões. Como dados de entrada para o mesmo, foram fornecidos nós, elementos e conectividades de ambas as sub-regiões. Como resposta do programa, foram adquiridos os deslocamentos, tensões e deformações em cada nó.

Para validação da análise, primeiramente foi utilizado o caso homogêneo, onde foi fornecido o mesmo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para matriz e fibra. Os deslocamentos e tensões encontrados com o emprego da formulação apresentada correspondem aos valores analíticos obtidos através da teoria da elasticidade, conforme apresentado na Figura 5.

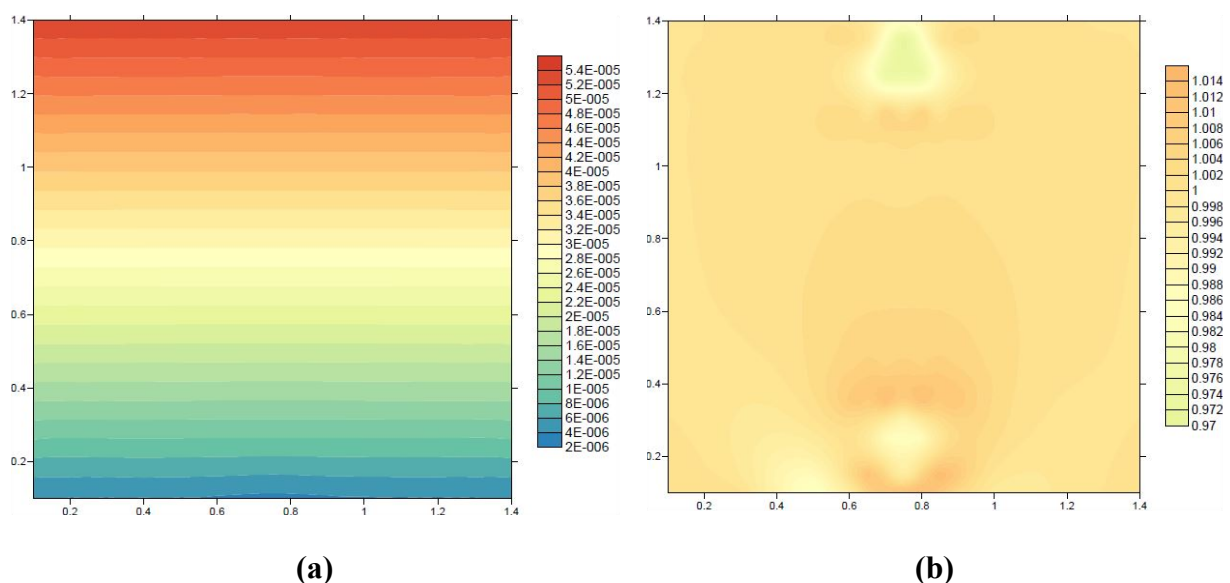


Figura 5 - Deslocamentos (a) e tensões (b) no caso homogêneo.

Nas figuras Figura 5(a) e Figura 5(b) é possível perceber a linearização da distribuição de deslocamentos e tensões, o que já era esperado para o caso homogêneo. Porém, na Figura

5(b), são apresentadas perturbações nas regiões acima e abaixo da inclusão. Esse fato se deve a singularidades nos resultados, sendo estas as regiões mais críticas da análise.

Ainda considerando o caso homogêneo, ao rotacionar a inclusão a 45° de sua configuração inicial, como apresentado na

(a)

(b)

Figura 3b, o resultado também correspondeu com o caso real elástico homogêneo. Partindo do princípio de que, nestas configurações, independente da rotação da inclusão, o resultado corresponderá aos valores analíticos, já que o EVR apresenta as mesmas propriedades mecânicas para toda a região analisada.

O caso heterogêneo analisado representa um compósito constituído por matriz cimentícia com inclusão de aço, cujo módulo de elasticidade é, aproximadamente, 8 (oito) vezes maior (Tasca *et al*, 2010). Tais características são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 - Características dos materiais que constituem as sub-regiões.

Característica	Matriz	Inclusão
Coefficiente de Poisson	0,21	0,30
Módulo de Elasticidade (MPa)	26.000	207.000

Considerando as condições de contorno supracitadas (Figura 3a), onde a inclusão se encontra no mesmo sentido da aplicação da carga, apresentando maior resistência a esforços de tração, o material compósito apresenta maior rigidez quando comparado com o caso homogêneo, proporcionando menores deslocamentos na direção de aplicação da carga, conforme apresentado na Figura 6.

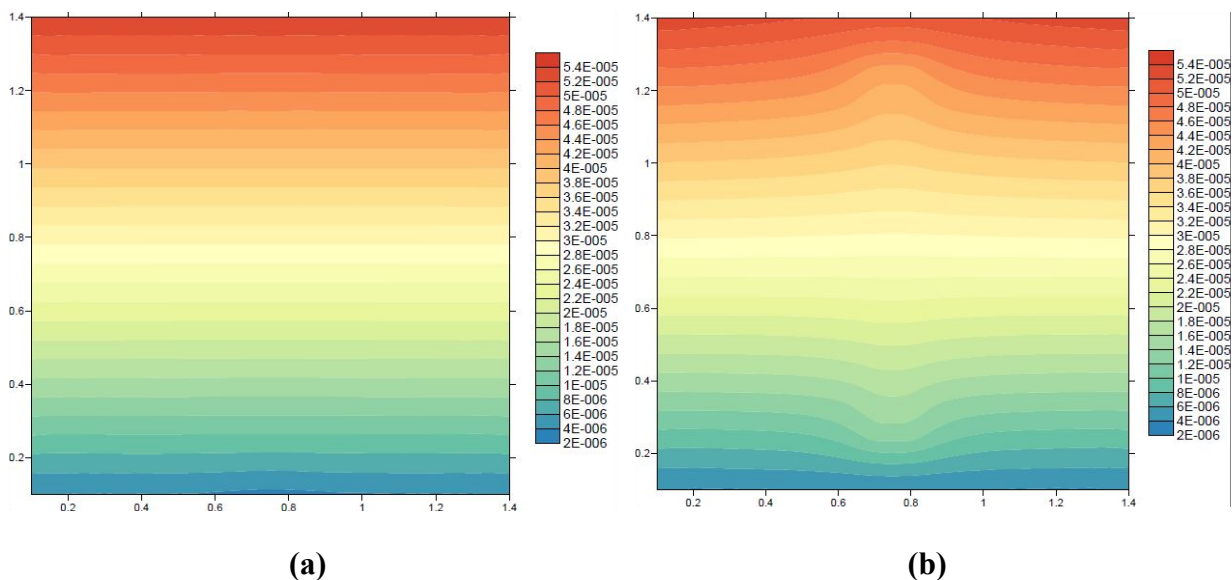


Figura 6 - Deslocamentos na seção do compósito nos casos homogêneo (a) e heterogêneo (b).

A distribuição de tensões para a seção central do EVR em análise está representada na Figura 7. Como a fibra é mais rígida e deforma menos em relação a matriz a qual está

inserida, a mesma possui um maior acúmulo de tensões. Essas tensões são “absorvidas” de seu entorno proporcionando uma menor concentração de tensões na área externa à fibra apresentando, assim, uma coloração azul.

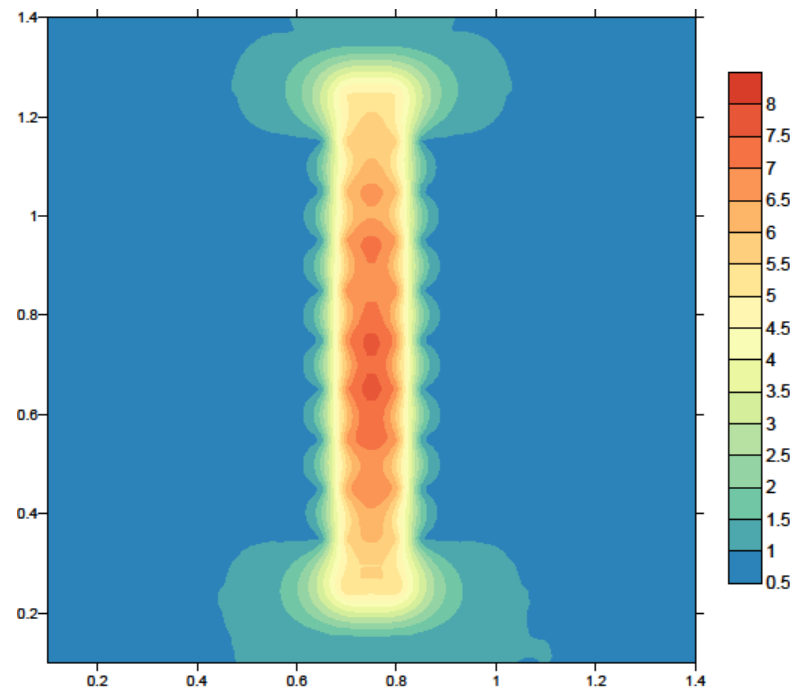


Figura 7 - Distribuições de tensões na seção do compósito no caso heterogêneo.

Como pode ser observado na Figura 8, são apresentadas menores deformações nas regiões mais próximas à fibra devido a maior rigidez da mesma. Através da conexão entre as sub-regiões, a menor deformação da inclusão tende a “prender” as regiões mais próximas da matriz influenciando, assim, no compósito como um todo.

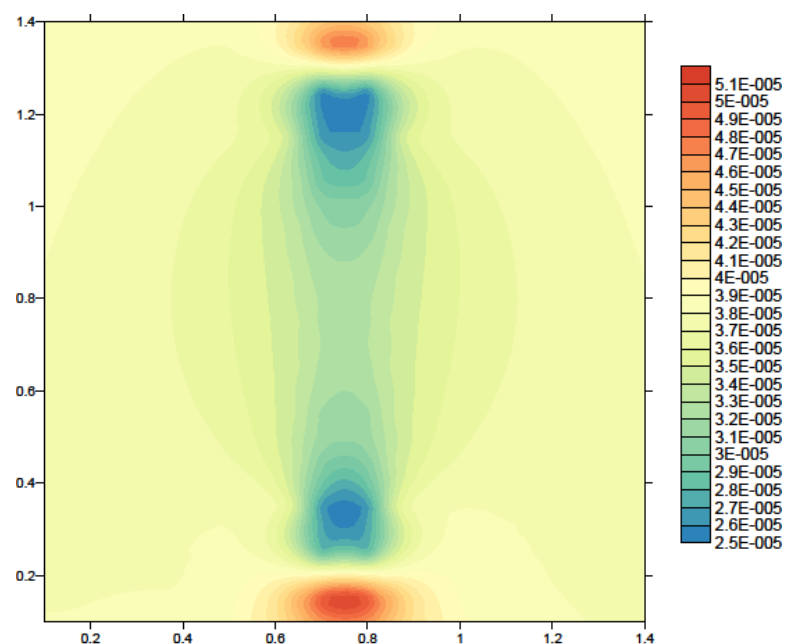


Figura 8 - Deformações na seção do compósito no caso heterogêneo, com inclusão de aço e matriz cimentícia.

Ao variar a topologia da inclusão, considerando angulosidades diversas da fibra em relação à aplicação da carga, espera-se uma queda na rigidez e um aumento nas deformações na medida em que a mesma se aproxima da posição horizontal (90°). Para determinar a influência causada pela inclusão na matriz, foram analisados 5 (cinco) casos com variações no ângulo entre o eixo principal da fibra e a direção de aplicação da carga, são eles, 0° , 30° , 45° , 60° e 90° . Sendo o primeiro apresentado anteriormente.

São apresentados a seguir os gráficos de deslocamentos, tensões e deformações do caso onde a fibra está rotacionada 30° graus em relação ao eixo Z.

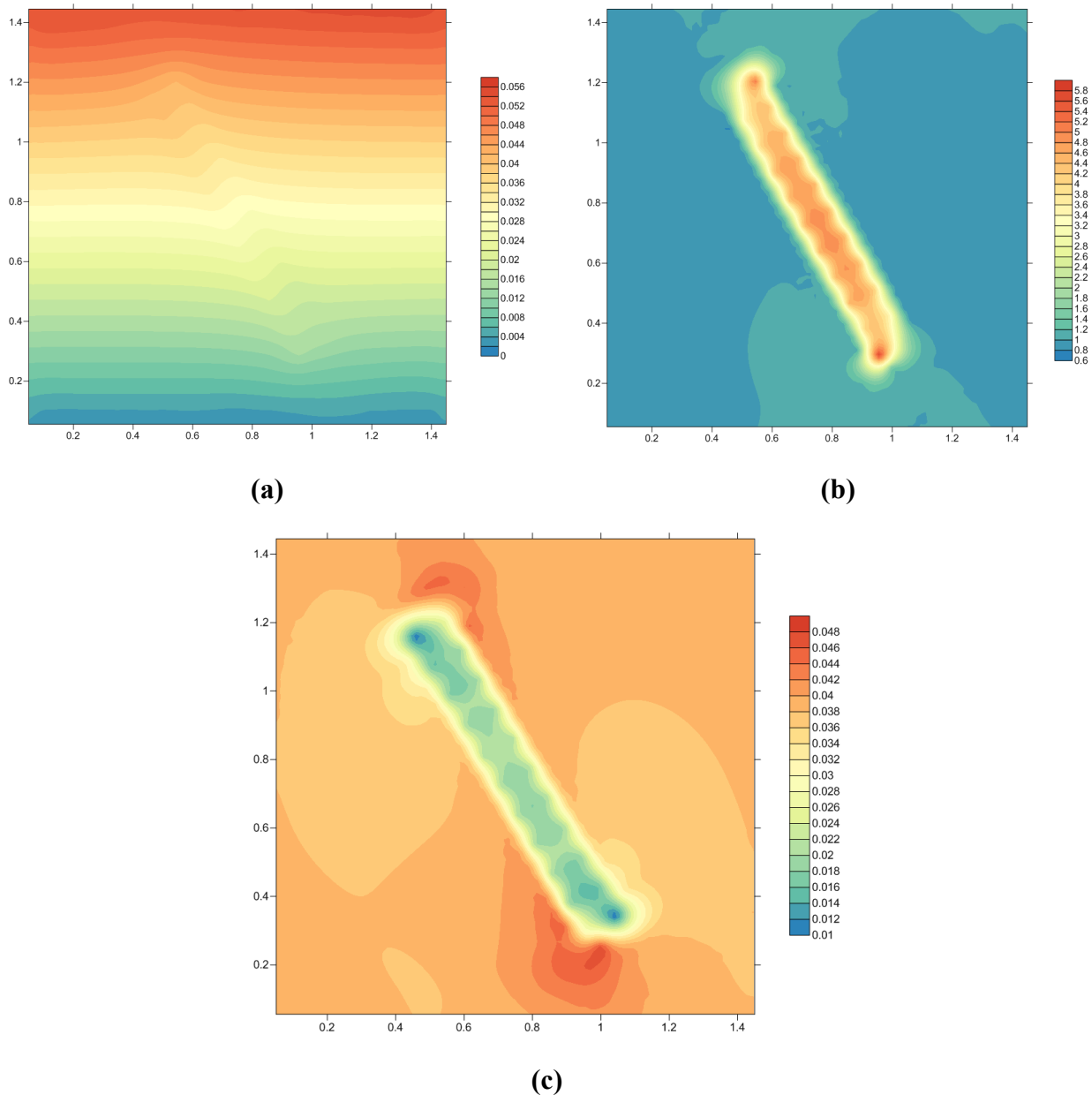


Figura 9 - Deslocamentos (a), tensões (b) e deformações (c) na seção do EVR com a inclusão rotacionada a 30° .

Assim como no caso da inclusão na vertical, pode ser observada uma menor concentração de tensões na área entorno da sub-região. Em comparação ao caso com

posicionamento vertical da inclusão, neste é obtido um quadro de maiores deformações na matriz, como pode ser observado na Figura 9(c).

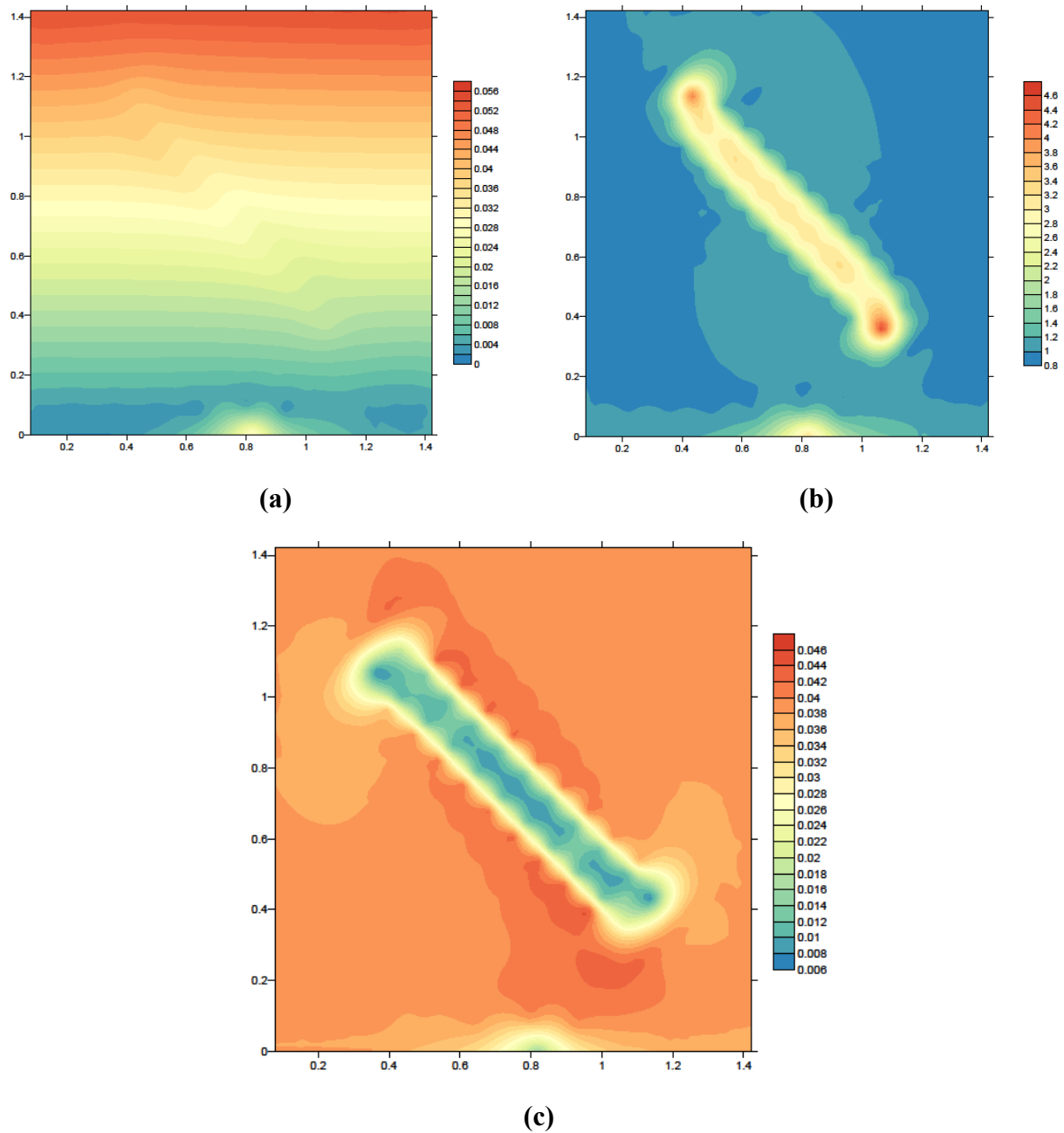


Figura 10 - Deslocamentos (a), tensões (b) e deformações (c) na seção do EVR com a inclusão rotacionada a 45°.

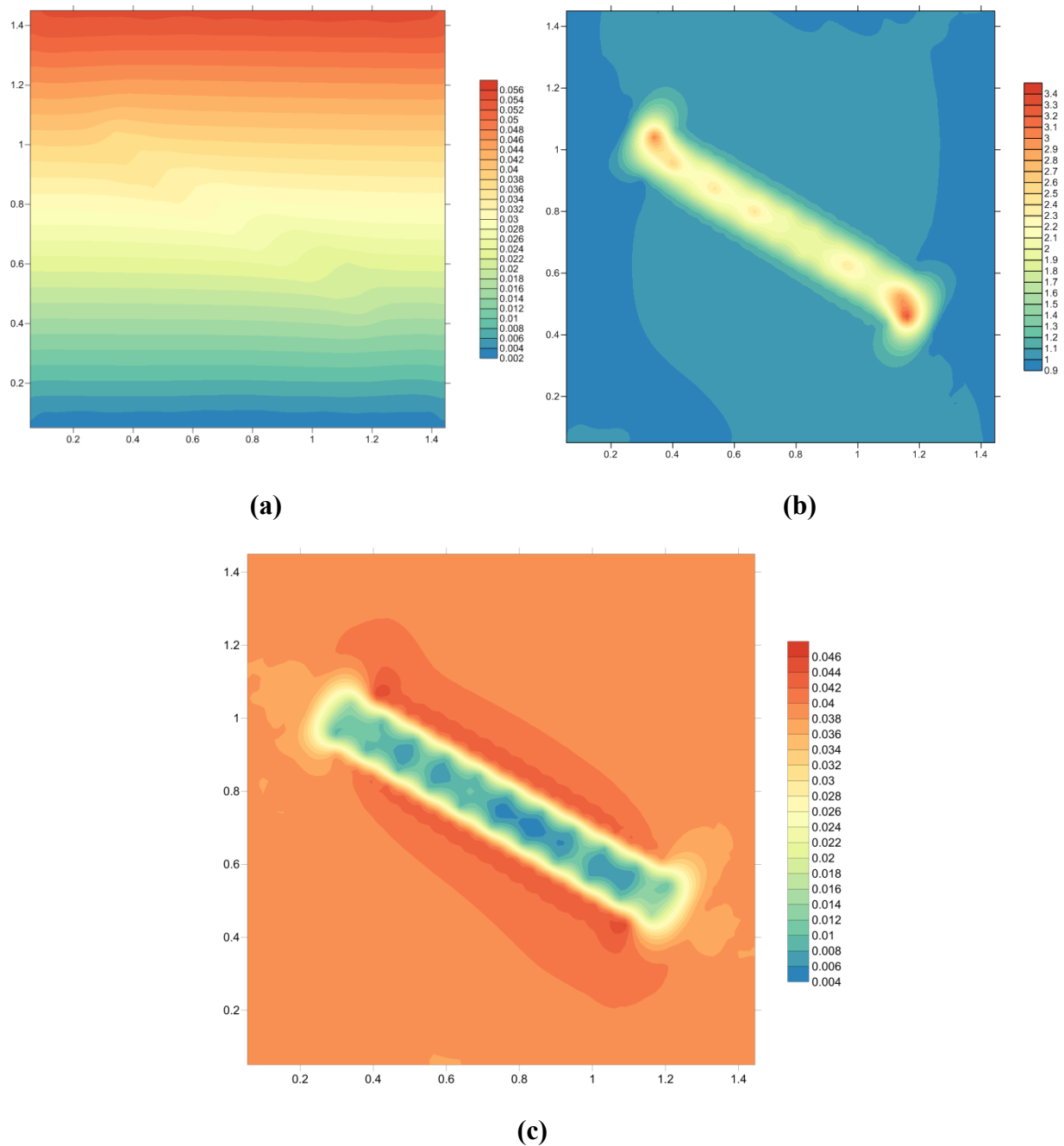


Figura 11 - Deslocamentos (a), tensões (b) e deformações (c) na seção do EVR com a inclusão rotacionada a 60°.

Como pode ser observado nos casos em que a inclusão é rotacionada, a configuração de deslocamentos, tensões e deformações se comportam de forma análoga, sendo que as reações acompanham a fibra e suas características. Com isso, percebe-se respostas similares, porém de menor intensidade, em gráficos como o da Figura 11(c), onde as deformações se apresentam bem mais proeminentes em relação aos demais casos.

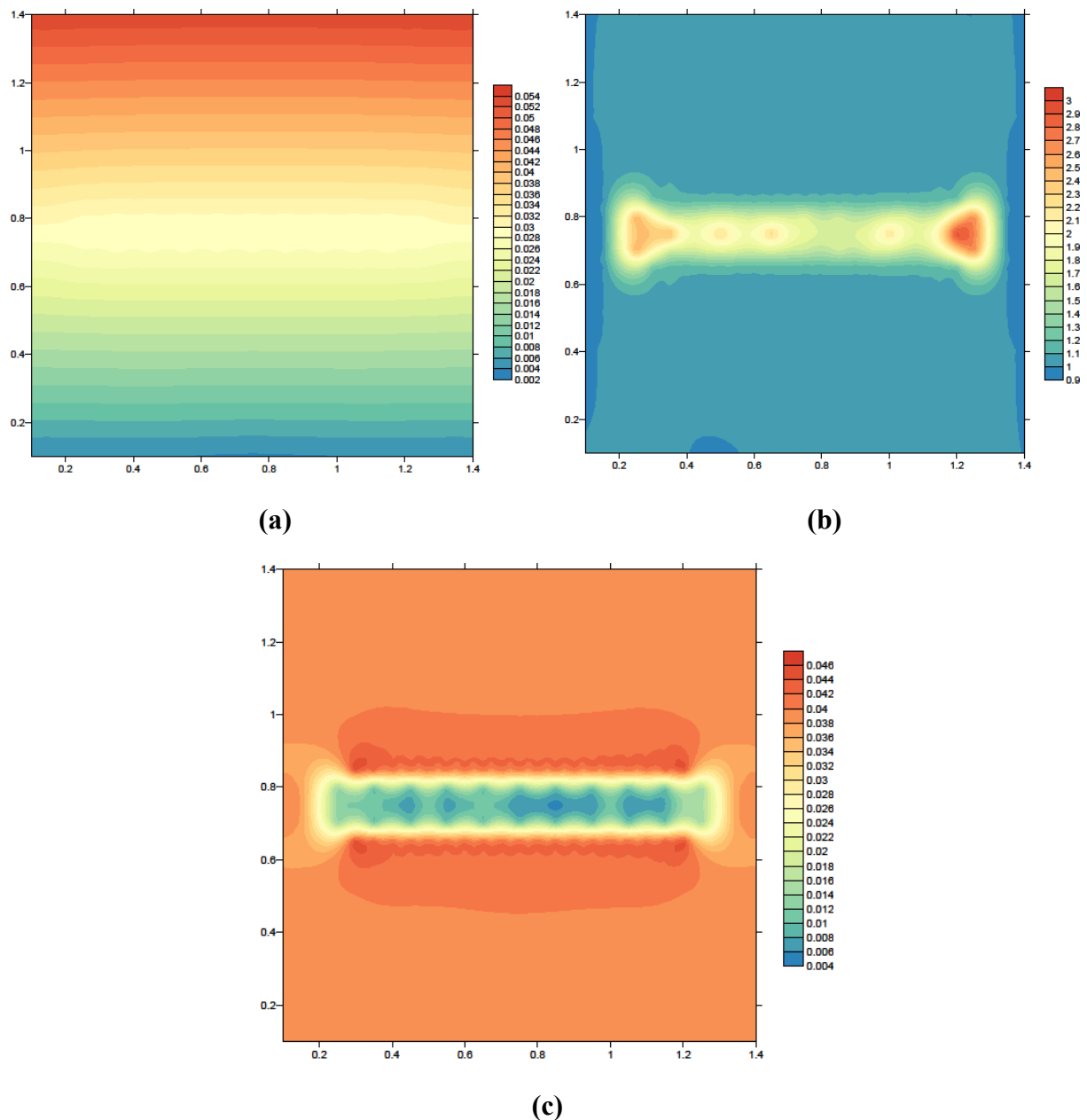


Figura 12 - Deslocamentos (a), tensões (b) e deformações (c) na seção do EVR com a inclusão rotacionada a 90°.

Com base nas análises das Figuras Figura 9(c), Figura 10(c), Figura 11(c) e Figura 12(c), é possível observar a degradação da influência da inclusão ao alterar a posição da mesma em relação ao eixo de aplicação da carga, apresentando maiores deformações na medida em que a fibra se posiciona perpendicularmente ao eixo vertical, ilustrado na Figura 12(c). Paralelamente, o acúmulo de tensões na matriz tende a aumentar na medida em que as deformações também crescem. Tal fato se deve a menor imposição que a inclusão exerce na matriz na medida em que passa para a posição de 90° em relação ao eixo de aplicação da carga.

A Tabela 3 apresenta os percentuais de deformações no topo do EVR, de acordo com a posição da inclusão, em relação ao caso homogêneo.

Tabela 3 – Influência da rotação da fibra nas deformações no topo do EVR.

Rotação (°)	0	30	45	60	90	Homogêneo
Porcentagem de deformações	99,65	99,74	99,83	99,88	99,90	100

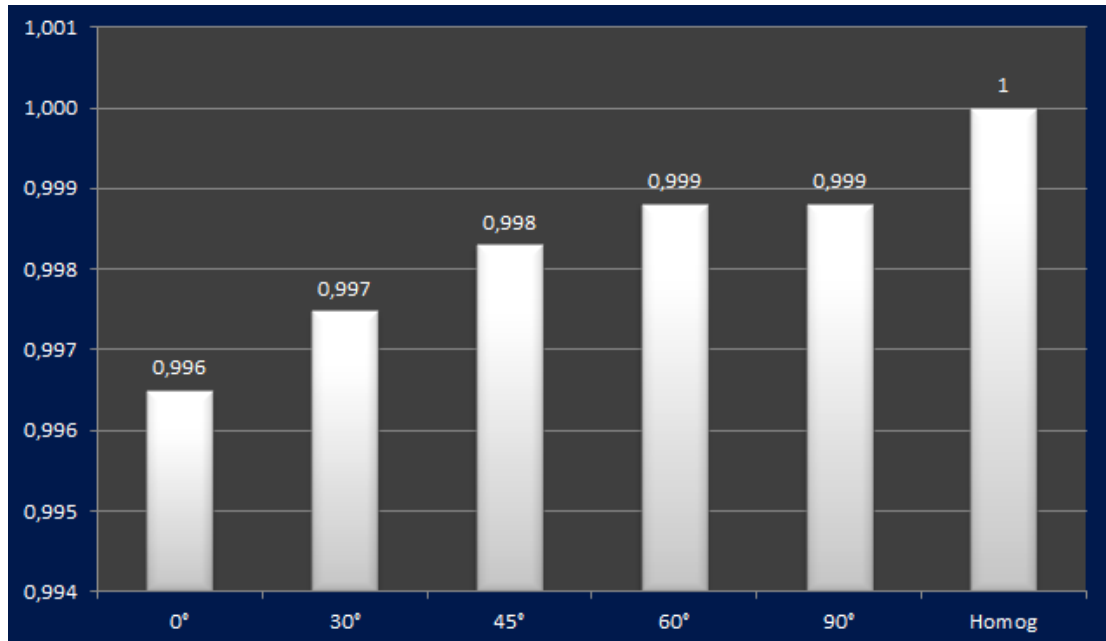


Figura 13 - Deslocamentos no topo do EVR com a inclusão rotacionada em relação ao caso homogêneo.

Com os dados apresentados, é possível perceber que mesmo com a inclusão posta perpendicularmente ao eixo de aplicação da carga, posição na qual proporciona menor influência, a mesma ainda assim confere ganho de rigidez ao compósito.

Alterando as propriedades mecânicas da inclusão, considerando os materiais apresentados na Tabela 4, é possível perceber a variação no ganho de rigidez proporcionado pelos diferentes tipos de inclusão ao compósito.

Tabela 4 - Propriedades mecânicas das inclusões.

Material	Módulo de Elasticidade (MPa)	Coefficiente de Poisson
Concreto (Homogêneo)	26.000	0,21
Aço	207.000	0,30
Alumínio	69.000	0,33

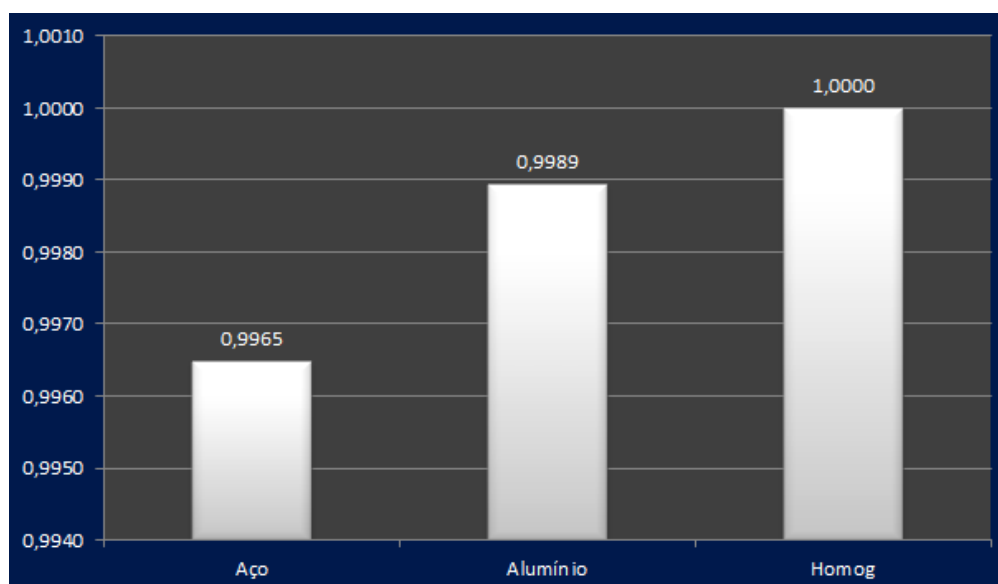


Figura 14 – Comparativo de deslocamentos no topo do EVR com a variação da natureza da inclusão.

Com base na Figura 14, percebe-se uma considerável redução nas deformações com a presença da inclusão de aço em relação ao caso homogêneo. Isso se deve ao fato de que o aço possui uma maior rigidez, a qual influencia a matriz

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho trata da modelagem computacional de um Elemento de Volume Representativo (EVR) de material compósito com inclusão de fibra cilíndrica, utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com a solução fundamental de Kelvin 3D. Para composição das diferentes características providas dos materiais os quais compõem o compósito, foi utilizada a técnica das sub-regiões, mantendo a integridade do problema ao considerar o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos entre as sub-regiões em análise.

Segundo as análises realizadas, observa-se no caso homogêneo um cenário de maiores deslocamentos e deformações quando comparado a qualquer um dos casos com a presença da fibra. A inclusão proporcionou reduções consideráveis nas deformações sofridas no EVR, ao considerar a mesma com módulo de elasticidade superior ao da matriz a qual está inserida, como consta na Tabela 2.

Segundo os dados analisados, a contribuição da inclusão no EVR analisado é maior quando a mesma se encontra na mesma direção da aplicação da carga, influenciando positivamente na rigidez do compósito. Porém, ao variar a angulosidade da inclusão, é percebido que quanto maior o ângulo entre o eixo da fibra e o eixo de aplicação da carga, menor é a rigidez proporcionada ao compósito em geral, conforme apresentado na Tabela 3.

Devido a fibra possuir um módulo de elasticidade, aproximadamente, 8 (oito) vezes maior que o da matriz, e considerando o caso em que ela se encontra posicionada na mesma direção de aplicação da carga (0°), tem-se o quadro em que é conferida uma maior resistência ao compósito. Isso pode ser percebido através da e/ou comparando os gráficos dos deslocamentos nos diversos casos apresentados, observando a variação de cores as quais representam as intensidades dos deslocamentos.

Considerando o EVR adotado de um compósito de proporções maiores e com um número bem maior de inclusões de mesma natureza, tem-se inúmeras possibilidades de atuação das inclusões em relação a matriz. Mesmo que a fibra apresente a configuração menos favorável apresentada no presente trabalho, as demais poderão suprir essa necessidade e, em um contexto maior, as inclusões servirão seu propósito de incrementar as propriedades da peça, seja elemento estrutural ou meramente decorativo.

Agradecimentos

Os autores agradecem a disponibilidade de bolsas de Iniciação Científica, ofertadas pelo Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV/CTEC) e pelo Programa PIBIC-UFAL juntamente com a FAPEAL (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas), fundamentais como estímulo à introdução à pesquisa nas engenharias. Igualmente, estende-se para a infraestrutura disponibilizada pelo LCCV/CTEC.

REFERÊNCIAS

- Alves, L. M. (2006). Apostila de Método dos Elementos de Contorno. Curitiba, Paraná: Universidade Federal do Paraná.
- Cardarelli, F. (1998). *Materials Handbook, A Concise Desktop Reference*. New York: Springer.
- Danese, F. C. (2013). *Microconcreto reforçado com resíduo de polipropileno e fibra de juta*. São Carlos, São Paulo: Escola de Engenharia de São Carlos.
- Figueiredo, A. D. (2000). Concreto com fibras de aço. São Paulo, São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Greenhalgh, J. (2010). *20 years of fiber concrete linings in the UK*. Fonte: TunnelTalk: <http://www.tunneltalk.com/Fibrecrete-Oct10-20-years-of-fibrecrete-in-the-UK.php>
- Mora, N. D., Lucas, J. F., & Maran, M. A. (2010). Propriedade Mecânica dos Materiais. Foz do Iguaçu, Paraná: Universidade Estadual do Estado do Paraná - Centro de engenharias e ciências exatas.
- Pires, E. N. (2009). Efeito do Tratamento de Superfície em Fibras de Juta no Comportamento Mecânico de Compósitos de Matriz Epóxi. Florianópolis, Santa Catarina: Universidade de Santa Catarina.
- Souza, R. A. (2004). Concreto Estrutural: Análise e Dimensionamento de Elementos com Descontinuidades. São Paulo, São Paulo.
- Tasca, M., Migliorini, A., Ozório, B. P., & T., A. (2010). Estudo da viabilidade de adição de fibras de aço no concreto exposto ao ambiente marítimo: Análise da melhoria das propriedades de resistência. Rio Grande, Rio Grande do Sul: FURG.
- Vaz, V. V. (2015). Pavimento Intertravado de Concreto. Campinas, São Paulo, Brasil: Unicamp.
- Villança, S. F., & Garcia, L. F. (1996). *Introdução à Teoria da Elasticidade*. Rio de Janeiro: Coordenação dos Programas de pós-graduação de Engenharia - UFRJ.
- Wutzow, W. W. (2003). Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapas com Enrijecedores. São Carlos, São Paulo: Universidade de São Paulo.