



UMA ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL PARA MATERIAIS COMPÓSITOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Gelson de Sousa Alves

Francisco Evangelista Junior

gelsondsalves@gmail.com

fejr.unb@gmail.com

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

Edifício SG 12, 1º andar, Campus Darcy Ribeiro, 70.910-900, Brasília, DF, Brasil

Resumo. *Este artigo tem como objetivo implementar formulações não convencionais do método dos elementos finitos (MEF) aplicado à análise estrutural em regime elástico linear, especificamente, ao método dos elementos finitos generalizados (MEFG) em uma estratégia global local. Essa estratégia consiste na resolução de um problema global inicial com malha grosseira e sua solução funcionará como condições de contorno para resolução de um problema em escala local com malha refinada de elementos finitos a fim de melhorar a aproximação dos problemas de valor de contorno devido a diferentes interfaces de materiais compósitos, como em chapas e vigas compósitas heterogêneas. As soluções dos problemas locais são utilizadas como enriquecimentos do problema global inicial e, também, ao mesmo problema inicial, a adição de funções de enriquecimento de interface, de modo que a malha de elementos não esteja em conformidade com o contorno dos diferentes materiais. Assim, novamente, o problema foi resolvido de uma maneira precisa e com um pequeno aumento no número de graus de liberdade. Essa estratégia permitiu solucionar modelos locais com malhas suficientes refinadas sem, contudo, aumentar o custo computacional da solução global. Finalmente os resultados foram comparados com soluções simuladas pelo MEF, mostrando a eficiência do método proposto.*

Palavras-Chave: MEF, MEFG, Materiais compósitos, Interface.

1 INTRODUÇÃO

A formulação de abordagens mais flexíveis na modelagem de materiais e estruturas mais complexas é muito relevante para as indústrias do segmento automobilístico, aeronáutico, aeroespacial, da construção civil, do petróleo dentre outras. Essas indústrias exigem projetos mais audaciosos com grandes dimensões e elevado grau de complexidade nas novas estruturas e materiais desenvolvidos e empregados.

O desenvolvimento de formulações não convencionais necessárias para resolução de problemas complexos ainda é um tema central da mecânica computacional. Materiais compósitos, como por exemplo, que são formados por duas ou mais fases com diferentes propriedades mecânicas demandam que a modelagem, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), adeque a discretização (malha) aos contornos das diversas fases do material. Isso pode aumentar demasiadamente os custos computacionais de modelagem e tornar não permissíveis as análises micromecânicas e as técnicas multi-escalas.

Nos últimos anos, diferentes métodos não convencionais vêm ganhando importância e sendo cada vez mais difundidos para resolução de problemas específicos de mecânica computacional. Dentre esses métodos, destaca-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que oferece condições bastante favoráveis às limitações encontradas nos métodos convencionais, entre eles o MEF. O MEFG pode ser entendido como uma combinação dos conceitos dos métodos sem malha, quanto à utilização de funções enriquecedoras, combinado com as funções de aproximação tradicionais do MEF definidas nos nós (Babuška *et al.*, 1994). O MEFG trabalha com diversas famílias de funções de enriquecimento, citando-se: os enriquecimentos polinomiais, singulares, descontínuos e de interface que visam melhorar a qualidade da aproximação e também flexibilizar os aspectos de modelagem.

No caso de materiais compósitos, o MEFG pode possibilitar que a malha gerada não esteja em conformidade com a interface física entre materiais, como acontece no MEF. Possibilitando a modelagem e simulação de problemas com geometrias complexas, fazendo o uso de técnicas multi-escala em estratégias global local, com um menor custo computacional.

Os trabalhos de Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008) e Kim *et al.* (2010) apresentaram uma abordagem multi-escala para o MEFG, utilizando as respostas do problema local, como funções de enriquecimento para o problema global. Nesses estudos analisaram vários fatores, dentre eles o efeito das condições de contorno no problema local, a escolha do tamanho do domínio local com relação ao desempenho do problema global, compararam o custo computacional deste método com relação aos métodos tradicionais, bem como apresentaram a metodologia para a construção das funções de enriquecimento, procedimentos para a integração numérica e resolução do sistema de equações. Ademais, apresentaram a formulação e implementação do método aplicado a problemas de mecânica da fratura.

No trabalho de Soghrati *et al.* (2012), foi apresentado um método para resolver problemas com campos de gradiente descontínuo envolvendo problemas de transferência de calor para análise em domínios bidimensionais. O método foi chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface (MEFGI). As funções de enriquecimento, que são associadas com graus de liberdade generalizados, são criadas a partir de nós na intersecção da interface de fase com as arestas do elemento. Estas funções foram construídas a partir da combinação linear das funções de forma Lagrangeanas no elemento de integração. Os autores citados abordaram várias vantagens desse método em comparação com o Método dos Elementos Finitos Generalizados convencionais. Entre essas vantagens, convém ressaltar:

o menor custo computacional, a fácil implementação e o manuseio simples das condições de contorno de Dirichlet. Em outro trabalho realizado por Soghrati e Geubelle (2012), a simulação foi estendida para o domínio tridimensional. Entretanto, ambos os trabalhos focam o MEFGI para problemas escalares de campo, especificamente transferência de calor. Essa limitação será abordada neste trabalho, onde o método será implementado para problemas vetoriais de forma a analisar compósitos sólidos.

Para problemas em campos de gradiente descontínuo em uma estratégia global local, o trabalho de Plews *et al.* (2012) utiliza a estratégia, para resolver problemas de gradientes de temperatura. Plews e Duarte (2015) aplica essa estratégia global local em múltiplas escalas locais para um único problema global, resolvendo os problemas locais em processamento paralelo, para modelos envolvendo transferência de calor.

No presente trabalho estudam-se a formulação e implementação do método dos elementos finitos generalizados adicionando funções de enriquecimento de interface em uma estratégia global local para a análise de estruturas em regime elástico linear. Valida uma técnica eficiente para a simulação de interface entre materiais em diferentes escalas, de modo a flexibilizar a geração de malhas para análises de materiais compósitos com pequeno aumento no número de graus de liberdade (NGL).

2 FORMULAÇÃO DO MEFG

O MEFG utiliza a estrutura do MEF e os conceitos dos métodos sem malha. Nessa seção faz-se uma abordagem geral do MEFG. Na sequência é descrito uma formulação do MEFG que se aplica para o estudo da interface entre materiais com as respectivas funções de enriquecimento mais conhecido como MEFGI e por último, descreve de maneira sucinta a construção das funções de enriquecimento do MEFG a partir de uma estratégia global local.

2.1 Aproximação no MEFG

O MEFG foi proposto a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997) com as denominações: Método dos Elementos Finitos Especiais; e Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade. Uma estratégia similar foi também proposta por Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996) e Oden *et al.* (1998), com as denominações Nuvens *hp* e Método dos Elementos Finitos baseado nas Nuvens *hp*. Outra abordagem foi proposta por Belytschko e Black (1999) e Möes *et al.* (1999) com a denominação de Método dos Elementos Finitos Estendido.

O MEFG abrange o conceito de nuvens de influência (suporte) entre os elementos, similarmente como ocorre no método das nuvens *hp* de Duarte e Oden (1996), no qual se utiliza uma malha de elementos finitos para o posicionamento dos pontos nodais e as nuvens de influência ω_j são formadas pelo conjunto de elementos finitos que compartilham um ponto nodal x_j . Para cada nuvem, a Partição de Unidade (PU) fica determinada pelo conjunto das funções de forma dos elementos finitos que compõem a nuvem associada ao nó base e devem respeitar as mesmas propriedades que são estabelecidas pelo MEF para se formar a PU. Maiores detalhes sobre as propriedades da PU podem ser encontrados nos trabalhos de Bathe (1996), Reddy (2006) e Zienkiewicz *et al.* (2005).

Para obtenção de uma melhor qualidade nas aproximações, amplia-se o espaço dessa aproximação multiplicando as funções PU já estabelecidas, por funções linearmente

independentes em cada nó x_j da nuvem ω_j , mais conhecidas como funções de aproximação local ou funções de enriquecimento apresentados na Eq. (1):

$$\mathfrak{T}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} \text{ com } \{L_{j1}(x) = 1\} \quad (1)$$

em que L_{ji} são as funções de enriquecimento definidas em cada nó x_j da nuvem ω_j . O produto entre a PU pelas funções da Eq. (1) resulta na chamada função produto ou, mais conhecido, função de forma do MEFG, representado na Eq. (2):

$$\{\phi_{ji}(x)\}_{i=1}^q = N_j(x) \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^q \quad (2)$$

em que N_j são as funções PU também conhecido como funções de interpolação ou funções de forma e ϕ_{ji} são as funções de forma do MEFG.

Na Figura 1, compreende-se de uma melhor maneira como se determinam as funções de forma do MEFG ϕ_{ji} para um domínio bidimensional. Na parte superior da Fig. 1(a) e Fig. 1(b) são representadas as funções PU de uma determinada nuvem de elementos conhecidas como função “chapéu”. Já que se trata de um modelo do MEF, elas são funções de forma tradicionais do MEF. Na parte central, encontram-se as funções de enriquecimento para caracterização do problema local sendo definidas a partir de um conhecimento *a priori* do comportamento da solução, na Fig. 1(a) se mostra uma função de enriquecimento contínua e na Fig. 1(b) uma função de enriquecimento descontínua (função Heaviside). Na parte inferior, mostra-se a função de forma do MEFG ϕ_{ji} , resultado do produto entre a PU e a função de enriquecimento.

As funções do MEFG possuem características locais em decorrência das características da função de enriquecimento escolhida e herdam o suporte compacto da PU, ou seja, as funções de forma valem zero fora dos elementos que contém o seu nó associado (Strouboulis *et al.*, 2000).

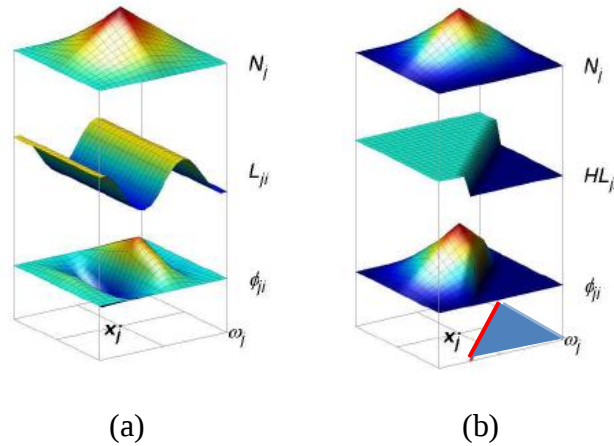


Figura 1. Construção das funções de forma do MEFG, para enriquecimentos: (a) contínuos; (b) descontínuos.

Pela combinação entre as funções PU e de enriquecimento estabelecidas na Fig. (1), chega-se a uma aproximação $\tilde{u}(x)$, apresentada na Eq. (3):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^q L_{ji}(x) b_{ji} \right\} \quad (3)$$

em que u_j são os graus de liberdade da estrutura atrelada ao nó x_j da nuvem ω_j e b_{ji} são os graus de liberdade adicionais, em correspondência a cada componente das funções enriquecidas.

2.2 Aproximação no MEFGI

Conceitos básicos

O MEFGI utiliza uma estratégia parecida com a do MEFG convencional. A diferença crucial entre ambos está na escolha das funções de enriquecimento, em que no MEFG se escolhem funções a partir de um conhecimento inicial do comportamento da solução e no MEFGI se utilizam como funções de enriquecimentos as funções de forma do próprio domínio. A Figura 2 melhor se compreende essa definição do MEFGI num domínio com dois materiais.

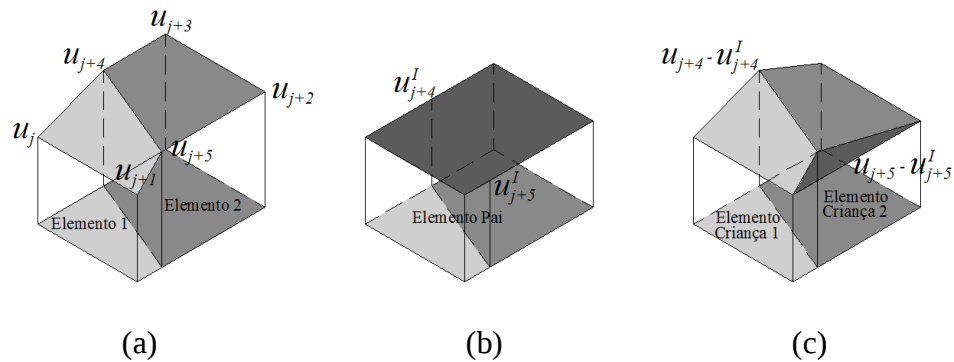


Figura 2. Aproximações em um domínio com 2 materiais. (a) Interpolação convencional do MEF; (b) Interpolação com um elemento em não conformidade; (c) Interpolação do MEFGI (Adaptado de Soghrati et al., 2012).

Na Figura 2(a), o domínio com dois materiais é discretizado por dois elementos quadriláteros, cada um em conformidade com cada material, onde é realizada uma interpolação pelo MEF, utilizando funções de forma Lagrangeanas como funções de interpolação. A aproximação $\tilde{u}(x)$ pelo MEF é mostrada na Eq. (4):

$$\tilde{u}(x) = N_j^{(1)}u_j + N_{j+1}^{(1)}u_{j+1} + N_{j+2}^{(2)}u_{j+2} + N_{j+3}^{(2)}u_{j+3} + (N_{j+3}^{(1)} + N_j^{(2)})u_{j+4} + (N_{j+2}^{(1)} + N_{j+1}^{(2)})u_{j+5} \quad (4)$$

em que $N_j^{(i)}$ são as funções de interpolação Lagrangeanas do nó j associada ao elemento i e u_j são deslocamentos em cada ponto nodal j .

No entanto, se os dois elementos da Fig. 2(a) forem agrupados e transformados em apenas um elemento em não conformidade, ter-se-á um domínio com dois materiais pertencente ao mesmo elemento, como é visto na Fig. 2(b). Porém ao utilizar uma interpolação por elementos finitos nesse elemento em não conformidade, observa-se que o gradiente de descontinuidade na região da interface do material não é reconstruído como se visualiza na Fig. 2(b), em que salto no valor dos deslocamentos não ocorrem na região da interface (Soghrati et al., 2012).

A parte que falta na interpolação do campo de deslocamento pode ser recuperada, conforme observado na Fig. 2(c), por meio da utilização da estratégia do MEFGI. A estratégia consiste em utilizar em um domínio com dois materiais, apenas um elemento, no qual se extraí as funções de forma Lagrangeanas $N_j^{(p)}$ no elemento chamado de pai em cada nó j , ou

seja, o elemento que abriga a região da interface. Na intersecção da aresta do elemento com a interface, criam-se nós e, conseqüentemente, aumenta-se o número de graus de liberdade, porém esses nós não são pertencentes à malha original (Soghrati *et al.*, 2012).

Com os nós inseridos na intersecção da interface com a aresta do elemento, criam-se novos elementos, chamados elementos criança, como se observa na Fig. 2(c), em que cada elemento criança pertence a cada material, possuindo funções de forma Lagrangeanas associadas a cada ponto nodal dos mesmos e que são responsáveis pelo cálculo da integração em cada material separadamente.

Ao final, faz-se a junção de cada elemento criança ao elemento pai, para a montagem da matriz de rigidez do elemento. A aproximação $\tilde{u}(x)$ pelo MEFGI é apresentada na Eq. (5) e as funções que fazem parte da mesma são apresentadas nas Eqs. (6) a (9):

$$\tilde{u}(x) = N_j^{(p)}u_j + N_{j+1}^{(p)}u_{j+1} + N_{j+2}^{(p)}u_{j+2} + N_{j+3}^{(p)}u_{j+3} + \psi_i\alpha_i + \psi_{i+1}\alpha_{i+1} \quad (5)$$

$$\psi_i = N_{j+3}^{(1)} + N_j^{(2)} \quad (6)$$

$$\psi_{i+1} = N_{j+2}^{(1)} + N_{j+1}^{(2)} \quad (7)$$

$$\alpha_i = u_{j+4}^I \quad (8)$$

$$\alpha_{i+1} = u_{j+5}^I \quad (9)$$

em que $N_j^{(p)}$ são as funções de forma Lagrangeanas do elemento pai em cada nó j , u_j são os deslocamentos em cada ponto nodal j do elemento pai, ψ_i são funções de enriquecimento de interface para cada nó i de interface, α_i são os graus de liberdade generalizados para cada nó i de interface. Uma maneira genérica da aproximação $\tilde{u}(x)$ do MEFGI é apresentada na Eq. (10):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{i=1}^{nen} s\psi_i(x)\alpha_i. \quad (10)$$

em que s é um fator de escala relacionado à relação de aspecto entre o elemento criança e o pai. Maiores detalhes podem ser encontrados em Soghrati *et al.*, (2012).

Funções de enriquecimento do MEFGI

As funções de enriquecimento são construídas a partir da obtenção dos valores das funções de forma Lagrangeanas dos elementos criança relativos a cada nó que intercepta a interface e no final são somados os valores dessas funções de forma correspondentes a cada nó dessa interface (Soghrati e Geubelle, 2012). Na Figura 2(c), como foram inseridos dois nós, duas funções de enriquecimento foram adicionadas. Para avaliar as funções de enriquecimento, divide-se o elemento pai em um número mínimo de elementos de integração para obter uma quadratura precisa.

Na Figura 3, apresenta-se o elemento pai quadrilátero interceptado pela interface e dividido em dois elementos de integração também quadriláteros. As funções de enriquecimento correspondentes a cada nó da interface da Fig. 3 são descritas pela Eq. (11) e Eq. (12).

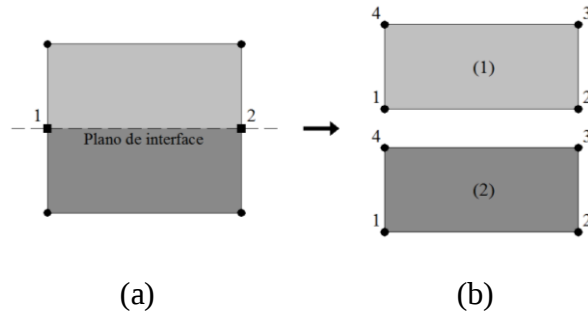


Figura 3. Avaliação das funções de enriquecimento no MEFGI (adaptada de Soghrati *et al.*, 2012).

$$\psi_1 = N_4^{(2)} + N_1^{(1)} \quad (11)$$

$$\psi_2 = N_3^{(2)} + N_2^{(1)} \quad (12)$$

Segundo Soghrati e Geubelle (2012), os subelementos quadrilaterais são criados apenas para se avaliar as funções de enriquecimento. As funções de forma são selecionadas do elemento como um todo, equivalente à primeira parte da Eq. (10), ou seja, do elemento pai.

No que tange aos elementos de integração, quando esses possuírem altas relações de aspecto, resultará em altos valores no gradiente das funções de enriquecimento, o que pode levar a formação de uma matriz de rigidez mal condicionada. Para evitar esse problema, implementa-se um fator de escala s , que aparece na segunda parte da Eq. (10). Esse fator pode ser implementado para qualquer valor entre relações de aspecto ou quando estiver abaixo de um valor específico que pode encontrado em Soghrati *et al.* (2012).

2.3 Aproximação no MEFG global local

Com as características do MEFG em se trabalhar com funções especiais para fornecer uma melhora na qualidade da aproximação, Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008) e Kim *et al.* (2010) aplicaram no MEFG, uma estratégia global local (MEFG^{g-l}) para resolução de problemas de valor de contorno, como sendo uma alternativa às estratégias global local aplicadas ao MEF.

No MEFG^{g-l} as funções de enriquecimento são construídas a partir da solução de um problema de valor de contorno (PVC) local, que aproximam as características locais do problema tais como, trincas, interface material, fibras, inclusões dentre outros, fornecidos por um PVC global, assim como as condições de contorno para resolução desse PVC local que são fornecidas pela resolução desse PVC global inicial, com uma malha constituída por poucos elementos, sem considerar as características locais. Na Figura 4 se exemplifica os procedimentos do MEFG^{g-l} e nas seções abaixo se apresentam os procedimentos a respeito do mesmo para a construção das funções de enriquecimento.

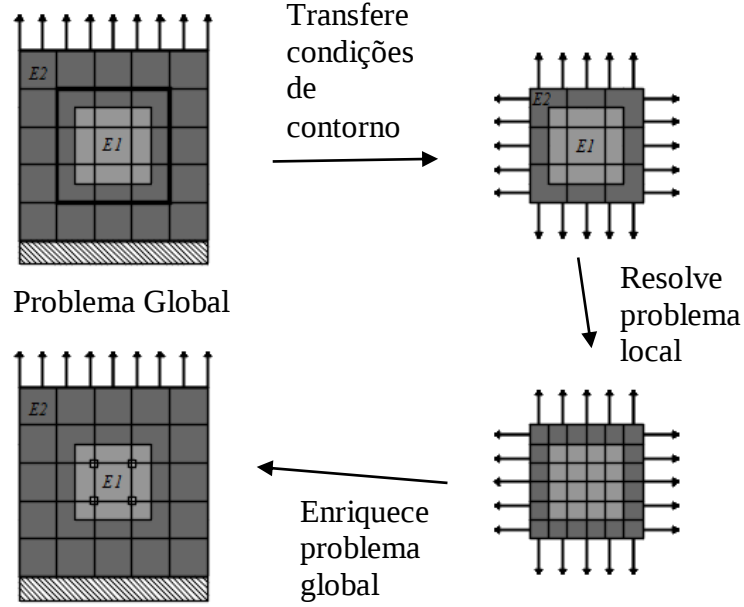


Figura 4. Passos da estratégia global local.

Problema Global Inicial (PGI)

Considere o problema de valor de contorno (PVC) que consiste de um problema global Ω_G com um contorno Γ_G . Carregamentos $\bar{t}$ e deslocamentos $\bar{u}$ são prescritos nas superfícies complementares Γ_G^t e Γ_G^u , respectivamente. As equações governantes sem a consideração de forças de corpo ou forças inerciais podem se definidas abaixo:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ em } \Omega_G \quad (13)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ no } \Gamma_G^t \quad (14)$$

$$u = \bar{u} \text{ no } \Gamma_G^u \quad (15)$$

$$\sigma = C : \varepsilon \text{ em } \Omega_G \quad (16)$$

$$\varepsilon = \nabla_s u; \text{ relação cinemática} \quad (17)$$

em que n é o vetor normal unitário em Γ_G^t , σ é o tensor de tensão de Cauchy, C é o tensor de Hooke, ε é o tensor deformação linear e ∇_s é a parte simétrica do tensor operador gradiente. Seja u_G^0 a solução do problema global inicial (PGI), tanto em análise pelo MEF quanto pelo MEFG definido nas equações acima para o campo de deslocamento u . A forma fraca deste problema é estabelecida abaixo:

Encontrar $u_G^0 \in X_G^0(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G)$ tal que $\forall v_G^0 \in X_G^0(\Omega_G)$:

$$\int_{\Omega_G} \sigma(u_G^0) : \varepsilon(v_G^0) dx + \eta \int_{\Gamma_G^u} u_G^0 \cdot v_G^0 ds = \int_{\Gamma_G^t} \bar{t} v_G^0 ds + \eta \int_{\Gamma_G^u} \bar{u} \cdot v_G^0 ds \quad (18)$$

em que v_G^0 são os deslocamentos virtuais, η é o parâmetro de penalidade utilizado para atribuir as condições de contorno de deslocamentos definidos em Γ_G^u e $X_G^0(\Omega_G)$ é a

discretização do espaço de Hilbert $H^1(\Omega_G)$ definido em Ω_G , e construído utilizando as funções de forma do MEFG.

Problema Local (PL)

Seja u_L a solução do problema local (PL) que pode conter características específicas tais como: trincas, interface material, furos, inclusão, fibras ou outras características locais de interesse. O problema é resolvido em um subdomínio local Ω_L do domínio global Ω_G . A solução global u_G^0 é calculada como descrito na seção anterior e fornece as condições de contorno para o PL. Assim para o PL se apresenta abaixo a formulação em forma fraca.

Encontrar $u_L \in X_L^{hp}(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L)$ tal que $\forall v_L \in X_L^{hp}(\Omega_L)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_L} \sigma(u_L) : \varepsilon(v_L) dx + \eta \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} u_L \cdot v_L ds + \kappa \int_{\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} u_L \cdot v_L ds \\ &= \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^t} \bar{t} v_L ds + \eta \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \bar{u} \cdot v_L ds + \int_{\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} (n \cdot \sigma(u_G^0) + \kappa u_G^0) \cdot v_L ds \end{aligned} \quad (19)$$

em que η é o parâmetro de penalidade utilizado para atribuir as condições de contorno de deslocamentos definidos em $\Gamma_L \cap \Gamma_G^u$, Γ , κ é a rigidez de mola, utilizado para atribuir condições de contorno definidas no $\Gamma_L / \Gamma_L \cap \Gamma_G$ e $X_L^{hp}(\Omega_L)$ é a discretização do espaço de Hilbert $H^1(\Omega_L)$ definido em Ω_L .

Problema Global Enriquecido (PGE)

A solução u_L do problema local é utilizada como funções de enriquecimento na malha grosseira global inicial através das funções de forma de elementos finitos generalizados global local como representado na Eq. (20):

$$\phi_j(x) = N_j(x) u_L(x) \quad (20)$$

em que $N_j(x)$ são as funções de forma de elementos finitos no domínio global em cada nó x_j , cuja nuvem ω_j contem no domínio Ω_L . O problema global é resolvido novamente utilizando a Eq. (20) levando a uma solução global enriquecida. Independente do número de graus de liberdade fornecidos para resolver precisamente o problema local, poucos graus de liberdade são adicionados ao problema global enriquecido (PGE).

3 MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS COMPÓSITOS

São apresentados nesta seção os resultados das simulações numéricas, usando todo o estudo apresentado nas seções precedentes em relação ao MEFGI e ao MEFG^{g-1}, com o objetivo de validação desses métodos aplicados conjuntamente para estruturas com comportamento elástico linear, em um domínio de análise composto por dois materiais. Como modelos de validação, tem-se um material compósito constituído por uma chapa engastada submetida a um esforço de tração, em que no interior da chapa possui outro material localizado com outra propriedade mecânica, discretizadas por elementos quadrilaterais. O segundo modelo é uma viga submetida à flexão simples, em que no interior da mesma também possui outro material com outra propriedade mecânica, também discretizadas por elementos quadrilaterais.

3.1 Aplicação em chapa compósita

Neste modelo, é analisada uma chapa engastada em uma extremidade e submetida a um esforço de tração na outra extremidade. A chapa é um material compósito heterogêneo formado pelas inclusões com módulo de elasticidade E_1 e a matriz com módulo de elasticidade E_2 . A Figura 5 apresenta a configuração dos dois materiais na chapa.

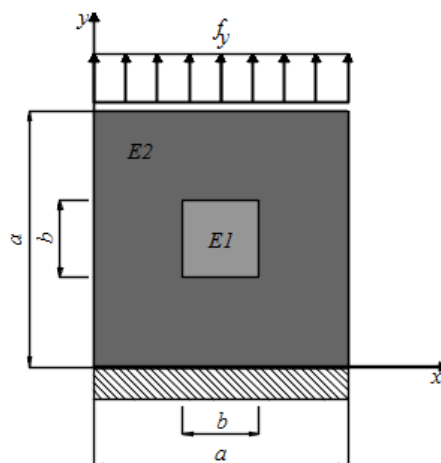


Figura 5. Geometria, carregamento da chapa submetido a esforço de tração.

A chapa possui ambos os lados $a = 1$ m, a inclusão possui lados iguais a $b = 0,3$ m e a espessura da chapa em ambos os materiais iguais a $t = 0,036$ m. Como propriedades mecânicas para a chapa se tem um módulo de elasticidade de referência, $E_R = 30$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e possui uma força uniformemente distribuída na extremidade livre de $f_y = 10$ KN/m.

Nesta chapa, o objetivo é analisar a convergência para os valores de deslocamentos e energias de deformação, implementados pelo MEFGI com a estratégia multi-escala do MEF^{g-1}, para o cálculo das aproximações e se comparar com a solução realizada pelo MEF.

São apresentadas duas relações de materiais para as simulações numéricas: na primeira, os módulos de elasticidade possuem valores iguais a $E_1 = 2E_R$ para o material 1 e $E_2 = E_R$ para o material 2. Para segunda análise os módulos de elasticidade são $E_1 = 10000E_R$ e $E_2 = E_R$, respectivamente.

Nesse modelo, o MEFGI com a estratégia global local é implementado para elementos quadriláteros. No domínio global inicial a chapa é simulada por uma análise de MEF, considerando a existência do material 2 na chapa completa, os deslocamentos obtidos funcionam como condições de contorno para o domínio local que contém a interface e aumentam o número de elementos nesse domínio para uma melhora na qualidade da solução. As soluções locais fornecerão as funções de enriquecimento para o domínio global. O domínio global é enriquecido pelas funções de enriquecimento, a malha gerada nessa etapa não está em conformidade com a interface material e cortam todos os elementos que a abrigam utilizando as técnicas do MEFGI adicionando funções de enriquecimento de interface.

A integração no domínio global enriquecido é realizada na malha global, porém, utilizam-se as malhas locais, desde que as mesmas estejam contidas no domínio global, para se aproveitar os domínios já definidos. Maiores detalhes a respeito da integração do domínio

global enriquecido pode ser encontrado nos trabalhos de Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008) e Kim *et al.* (2010).

Nas análises realizadas pelo MEFGI, o elemento pai é dividido em dois e quatro elementos criança, para o cálculo da integração numérica, A Figura 6 ilustra a região do canto da inclusão em que o elemento pai foi dividido em quatro elementos criança para o calculo da integração numérica. A avaliação das funções de enriquecimento correspondentes a cada nó da interface são apresentadas nas Eqs. (21) a (23).

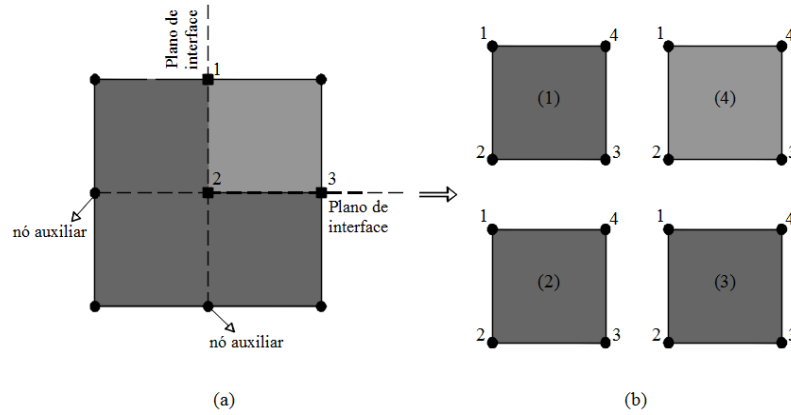


Figura 6. Funções de enriquecimento no MEFGI 2D com criação dos elementos de integração para um elemento quadrilateral de quatro nós, cortado por uma interface feita por dois segmentos lineares interceptados (adaptado de Soghrati *et al.*, 2012).

$$\varphi_1 = N_4^{(1)} + N_1^{(4)} \quad (21)$$

$$\varphi_2 = N_3^{(1)} + N_4^{(2)} + N_1^{(3)} + N_2^{(4)} \quad (22)$$

$$\varphi_3 = N_4^{(3)} + N_3^{(4)} \quad (23)$$

Além dos nós da aresta do elemento com a interface, criam-se nós auxiliares no interior e nas arestas do elemento, que funcionam como pontos auxiliares para o cálculo da integração nos elementos crianças, esse procedimento aplica-se quando se objetiva reduzir erros causados pela geometria, referentes a diversas formas da interface entre materiais (Soghrati *et al.*, 2012).

Na Fig. 7 abaixo, são apresentados os gráficos correspondentes ao deslocamento vertical médio normalizado na extremidade da chapa e a energia de deformação normalizado, simulado pelo MEFGI com estratégia global local e pelo MEF com uma malha refinada (851 elementos) para as diferentes relações entre os módulos de elasticidade $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10000$ com o valor $E_2 = E_R$ para todas as simulações.

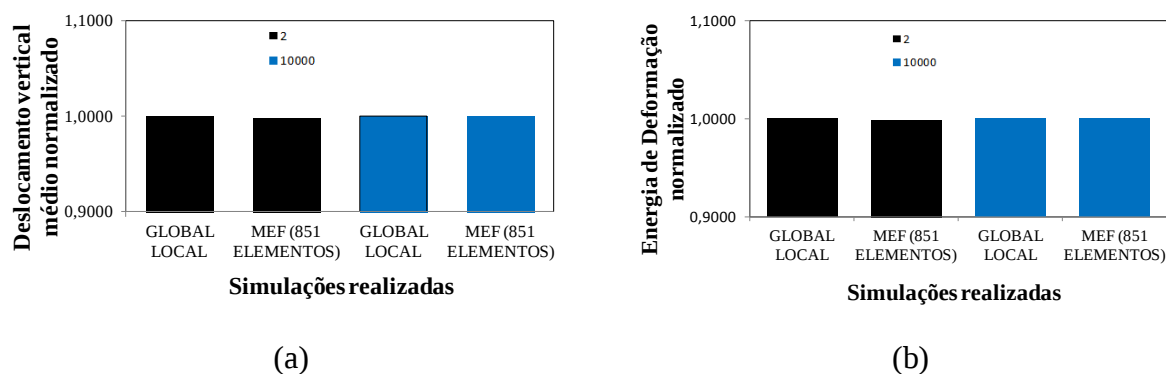


Figura 7. Deslocamento vertical e energia de deformação normalizada na chapa para $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10000$.

Dos gráficos da Fig 7(a) e Fig. 7(b) acima pode-se afirmar que a análise MEFGI com estratégia global local para ambas relações $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10000$, os resultados se aproximam da análise realizada pelo MEF, com resultados praticamente imperceptíveis, mostrando a potencialidade para resolução de problemas de interface na estratégia global local formulada.

Na Tabela 1, se apresentam as etapas de simulação realizadas para o MEFGI global local e pelo MEF, bem como apresentam o NGL de cada análise.

Tabela 1. Número de graus de liberdade para cada análise.

ETAPA	NGL
PGI	242
PL	578
PGE	282
MEF (851 elem.)	1792

Da Tabela 1 acima se pode afirmar que a análise global local possui 3 etapas, PGI, PL e PGE. Apesar disso, o NGL de cada etapa separadamente é bem inferior ao realizado pela malha refinada simulada pelo MEF e os seus resultados foram da mesma magnitude. Essa análise global local demanda um menor custo computacional, devido a simulação de 3 problemas menores ao invés de apenas um modelo com muitos NGL como ocorreu no MEF.

Quanto à aplicação da formulação do MEFGI, um destaque a se fazer está na possibilidade de se estabelecer o tamanho da malha apenas uma vez, mesmo com a possibilidade dos materiais mudarem de forma, não precisando mais gerar uma nova malha para contorná-los, cabendo apenas fazer simulações global local. Os resultados apresentados mostram a capacidade de aproximação quando se realiza uma simulação envolvendo funções de enriquecimento global local conjuntamente com enriquecimentos de interface.

3.2 Aplicação em Viga compósita

Neste modelo, é analisada uma viga engastada e livre composta por dois materiais diferentes, com comprimento $l = 6$ m, altura $h = 0,6$ m e espessura $t = 0,2$ m, submetida à

flexão simples. A inclusão possui tamanho $a = 0,4$ m, $b = 0,12$ m e espessura $t = 0,2$ m, em que é submetida a uma tensão na aresta livre, conforme pode ser visualizado na Fig. 8.

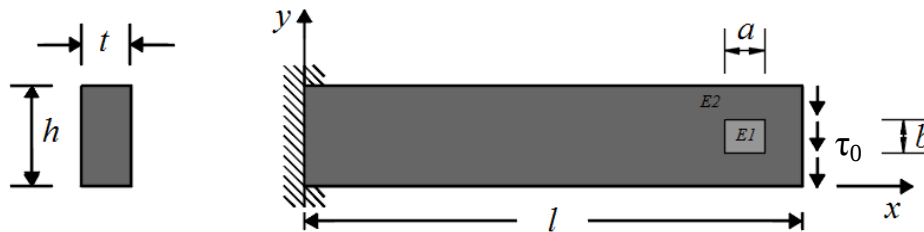


Figura 8. Geometria e carregamento da viga composta de dois materiais submetido à flexão simples.

Como propriedades mecânicas, essa viga possui um Módulo de Elasticidade de Referência, $E_R = 30$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0$. Para qualquer valor de y em $x = l$, tem-se uma tensão $\tau_0 = 150$ N/m² como uma força uniformemente distribuída de $f_y = 30$ N/m ao longo da face.

O E_R como foi comentado na seção anterior é um valor de base para comparação. Nessa viga, o objetivo é o mesmo apresentado na seção anterior: analisar a convergência para os valores de deslocamentos e energias de deformação, utilizando o MEFGI com as funções de enriquecimento de interface em uma estratégia global local para o cálculo das aproximações e se comparar com a solução realizada pelo MEF. Porém agora ao invés de se analisar a estrutura na direção normal, analisa-se a mesma sob flexão.

São apresentadas as mesmas relações entre materiais para as simulações numéricas: na primeira, os módulos de elasticidade possuem valores iguais a $E_1 = 2E_R$ para o material 1, $E_2 = E_R$ para o material 2 e para segunda análise os módulos de elasticidade são $E_1 = 10000E_R$ e $E_2 = E_R$, respectivamente.

Nesse modelo, o MEFGI com a estratégia global local é implementado para elementos quadriláteros e os passos da estratégia global local são os mesmos descritos ao longo desse trabalho, simular um problema global inicial que serve como condições de contorno para o problema local, que vai fornecer as funções de enriquecimento para o problema global enriquecido. A integração do domínio global enriquecido segue os mesmos passos anteriores fazendo a subdivisão de subdomínios.

Nos gráficos da Fig. 9, são apresentados os gráficos correspondentes ao deslocamento vertical normalizado na extremidade superior da viga e a energia de deformação normalizado, simulado pelo MEFGI com estratégia global local e pelo MEF com uma malha refinada (1314 elementos) para duas relações entre os módulos de elasticidade $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10000$ com o valor $E_2 = E_R$ para todas as simulações.

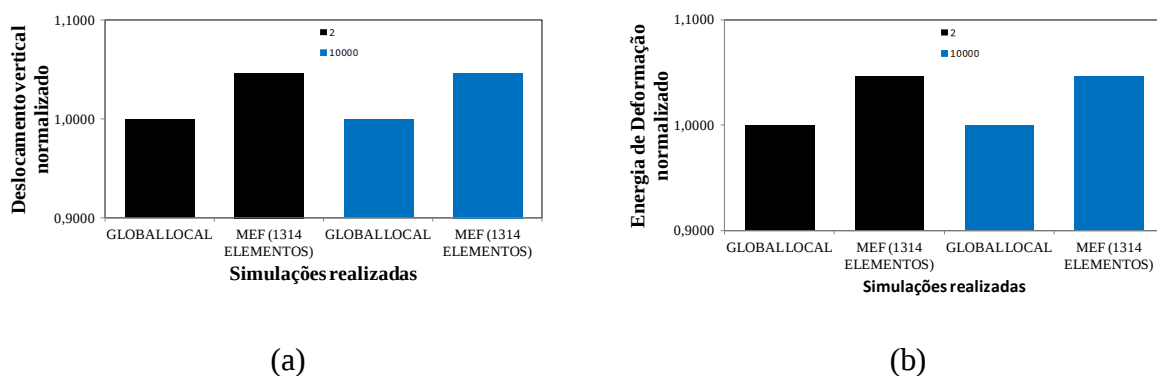


Figura 9. Deslocamento vertical e energia de deformação normalizada na viga para $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10000$.

Dos gráficos da Fig 9(a) e Fig. 9(b), pode-se afirmar que a análise MEFGI com estratégia global local para ambas relações $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 10000$, os resultados apresentam pequenas diferenças tanto para o deslocamento vertical quanto para a energia de deformação, na ordem de aproximadamente 4 % como pode ser visualizado.

Na Tabela 2 abaixo se apresentam as etapas de simulação, bem como apresentam o NGL de cada análise.

Tabela 2. Número de graus de liberdade para cada análise da viga.

ETAPA	NGL
PGI	372
PL	338
PGE	404
MEF (1314 elem.)	2904

Da Tabela 2 acima, assim como na seção anterior na análise global local, o NGL de cada etapa separadamente é bem inferior ao realizado pelo modelo simulado pelo MEF. Seus resultados apresentaram pequenas diferenças devido ao somatório do NGL das etapas da estratégia global local apresentar 1790 graus de liberdade a menos que a realizada pelo MEF. As respostas se aproximariam se aumentasse o NGL da simulação global local, ou se reduzisse o NGL da análise pelo MEF. Porém, mesmo com essa pequena diferença os resultados se mostraram satisfatórios, pois na análise global local demandou menos custo computacional. Do mesmo modo que na seção anterior, a aplicação da formulação do MEFGI, tem-se a possibilidade de se estabelecer o tamanho da malha apenas uma vez, mesmo com a possibilidade dos materiais mudarem de forma, não precisando mais gerar uma nova malha para contorná-los, cabendo apenas fazer simulações global local. Assim como para o exemplo da chapa acima os resultados apresentados mostram a capacidade de aproximação do MEFGI na estratégia global local proposta.

4 CONCLUSÕES

Este artigo abordou a formulação e implementação do método dos elementos finitos generalizados adicionando funções de enriquecimento de interface em uma estratégia global local para a análise de estruturas em regime elástico linear para materiais compósitos. Foram realizadas simulações numéricas de dois modelos para validar as formulações e implementações propostas. Os métodos apresentaram um sucesso na implementação de funções de enriquecimentos de interface na estratégia global local proposta.

Para a metodologia para materiais compósitos, a estratégia de enriquecimento proposta, denominada MEFGI, demonstrou grande potencialidade para a resolução de problemas com gradiente descontínuo, originado pela diferença de rigidez entre os diferentes materiais sem usar uma malha de conformidade nas bordas da interface. A principal característica do método proposto é que os graus de liberdade do enriquecimento são atribuídos somente nos nós fictícios da interface. Além disso, as funções de enriquecimento são simplesmente construídas através da combinação linear de funções de forma Lagrangeanas nos elementos de integração, o que reduz o custo e facilita a aplicação deste método.

A metodologia de análises global local é eficiente, uma vez que possuem muitos graus de liberdade, porém são resolvidos de forma separada, não onerando o custo computacional da simulação, diferentemente do MEF que requer um grande refinamento no domínio global da estrutura em análise.

Finalizando, conclui-se que a utilização do MEFG traz uma grande capacidade na qualidade da aproximação final com a utilização racional de funções de enriquecimento melhorando a eficiência computacional. A aplicação das funções de interface propostas flexibilizam significativamente a modelagem de problemas com campos de gradiente descontínuos, em que se geram malhas sem a preocupação de estar em conformidade com cada material. A aplicação da abordagem global local está em se analisar apenas pequenos domínios locais que contenham essas interfaces materiais para que se obtenham uma maior precisão nas aproximações sem um grande NGL.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAP-DF) pelo apoio financeiro e a Universidade de Brasília pela estrutura fornecida para desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Babuška, I., Caloz, G., & Osborn, J. E., 1994. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n. 4, p. 945 – 981.
- Babuška, I., & Melenk, J. M., 1997. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p. 727-758.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite element procedures*. [S.I.]: Prentice-Hall, Inc., ISBN 0-13-301458-4.
- Belytschko, T., & Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal

remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, No. 5, pp. 601-620.

Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional Structural mechanics problems. *Computers & Structures*, vol. 77, n. 2, p. 215-232.

Duarte, C. A., & Kim, D. J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global- local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, p. 487-504.

Duarte, C. A., & Oden, J. T., 1995. *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem*. Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin.

Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1–4, p. 237-262.

Kim, D. J., Duarte, C. A., & Pereira, J.P., 2008. Analysis of interacting cracks using the generalized finite element method with global local enrichment functions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 75, pp. 763-813.

Kim, D. J., Pereira, J.P., & Duarte, C. A., 2010. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, pp. 335-365.

Melenk, J. M. & Babuška, I., 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1–4, p. 289-314.

Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131-150.

Oden, J. T., Duarte, C.A.; & Zienkiewicz, O. C., 1998. A new cloud-basedhp finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 153, pp. 117-126.

Plews, J., Duarte, C. A., & Eason, T., 2012. An Improved Non-Intrusive Global-Local Approach for Sharp Thermal Gradients in a Standard FEA Platform, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, n. 4, pp. 426-449.

Plews, J., & Duarte, C. A., 2015. Bridging Multiple Structural Scales with a Generalized Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, n. 3-4, pp. 180-201.

Reddy, J. N. , 2006. *An Introduction to the Finite Element Method* 3rd ed: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering. Inc., ISBN 0-07-246685-5.

Soghrati, S., Aragón, A. M., Duarte, C.A., & Geubelle, P. H., 2012. An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields. *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 89, pp. 991-1008.

Soghrati, S., & Geubelle, P. H., 2012. An 3D interface-enriched generalized finite element method for weakly discontinuous problems with complex internal geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, n. 217-220 , pp. 46-57.

Strouboulis, T., Babuška, I. & Copps, K., 2000. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, n. 1–3, p. 43-69.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Zhu, J. Z., 2005. *Finite Element Methods – Its Basic and Fundamentals* 6th ed. Elsevier, Inc., ISBN 0-7506-6320-0.