



UM MODELO DE ESTACA PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS

Hyllttonn Wyktor Dhannyells Bazan

Raul Rosas e Silva

Celso Romanel

hwdbazan@gmail.com

raul@puc-rio.br

romanel@puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente, 225, 22451-900, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

Abstract. *Vibrations must be considered in the design of foundations of equipments and other devices which may interact with neighboring structures. Hence, natural frequencies of foundation elements are important parameters to be determined. Herein longitudinal vibrations of piles modeled as bars in elastic Winkler foundation are studied. Natural frequencies are determined numerically by the Rayleigh-Ritz method. The longitudinal displacements are approximated by use of nodal functions at the ends of the bars, enriched with additional trigonometric functions. This method allows for easy refinement and consideration of property variations along the pile. The soil constants are determined by impact field tests and application of the Fast Fourier Transform on the resulting accelerations, and comparisons of predicted numerical results and actual measurements are made.*

Keywords: *soil-pile interaction; natural frequencies; Rayleigh-Ritz method; dynamics field tests of piles; Fast Fourier Transform.*

1 INTRODUÇÃO

A análise da resposta de vibrações é de considerável importância no projeto de estruturas que podem estar sujeitas à perturbações dinâmicas. Em certas situações, vibrações podem causar grandes deslocamentos e tensões severas na estrutura. Isto pode ocorrer quando a frequência da força de excitação coincide com a frequência natural da estrutura.

Algumas máquinas produzem solicitações dinâmicas que são transferidas às fundações por meio de movimentos vibratórios. É necessário analisar e estudar esses movimentos vibratórios durante o projeto da fundação para evitar danos aos equipamentos, à própria fundação, às estruturas vizinhas, às perdas de produção e também aos riscos de segurança e saúde ocupacional para as pessoas (Dalbone & Sánches, 2011). Por esta razão as frequências naturais de vibração são importantes para o dimensionamento dinâmico de fundações, para se evitar efeitos de ressonância e amplificação.

Bons projetos de fundações de máquinas são caracterizados por pequenas amplitudes de vibração, de modo que teorias lineares são adequadas para calcular a resposta de tais fundações. As teorias de Novak (1974, 1977), e Novak e El-Sharnouby (1983) têm sido comumente usadas para tal objetivo.

O modelo de Novak é o modelo mais popular para a análise dinâmica de fundações. A solução de Novak é baseada em gráficos, que fornecem a rigidez e o amortecimento de uma estaca e a solução é ligada a um grau de liberdade fundamental. O modelo de Novak possui algumas limitações: a solução não considera os efeitos inerciais da estaca; a extrapolação é requerida quando dados do projeto ultrapassam os limites dos gráficos; os gráficos são disponíveis apenas para estacas de concreto e madeira, não há gráficos para estaca de aço; os gráficos não estão adaptados para situações de estacas parcialmente imersas em solo. Este método fornece somente a primeira frequência natural de vibração do sistema estaca-solo. Em muitos casos é necessário conhecer as frequências além da frequência fundamental, nessas situações a aplicação do método de Rayleigh-Ritz fornece um método alternativo que, além de fornecer uma estimativa da frequência fundamental, pode ser usado para obter estimativas de várias frequências superiores.

Em certos casos quando estacas suportam compressores, torna-se essencial checar o projeto para mais frequências de vibração, para garantir que elas não se combinem com o segundo ou terceiro harmônico. Nessa situação, a aplicação do método dos elementos finitos ou Rayleigh-Ritz, em que a estaca é modelada como um elemento de barra e o solo como molas de Winkler, alcança bons resultados.

O principal objetivo desse trabalho é aplicar uma metodologia alternativa para estimar as frequências fundamentais de vibrações longitudinais de estacas embutidas em solo. Também é objetivo desse trabalho determinar frequências fundamentais de vibração longitudinais através de resultados de testes em escala real. De posse das acelerações longitudinais, obtidas durante ensaios de carregamento dinâmico em estacas, realizou-se um estudo comparativo entre as frequências naturais de vibração longitudinais obtidas matematicamente com as obtidas através de ensaios de campo.

Na análise dinâmica, a estaca é modelada como um elemento de barra para as vibrações longitudinais. O solo é tratado como uma base elástica com molas de Winkler. A frequência de vibração fundamental e as frequências superiores são determinadas pelo método de Rayleigh-Ritz. As frequências naturais dos testes em escala real são obtidas através das acelerações medidas nos ensaios de carregamentos dinâmicos realizados nessas estacas.

Em ensaios de carregamento dinâmico em estacas a aceleração longitudinal causada pelo impacto de um martelo no topo de uma estaca é medida até que a estaca volte ao repouso. Esta informação é utilizada somente para a predição da máxima carga que o sistema estaca-solo suporta, porém também permite a estimativa da frequência fundamental de vibração, bem como para várias frequências superiores através de uma Fast Fourier Transform (FFT).

Ainda há poucos dados de comparação da resposta dinâmica de estacas entre o comportamento previsto e o observado, porém atualmente se destacam os trabalhos Kitiyodom et al (2008).

2 TESTES DINÂMICOS EM ESTACAS

Testes de vibração podem ser executados para a determinação das frequências naturais de vibração.

O ensaio de carregamento dinâmico ou prova de carga dinâmica é um ensaio que objetiva principalmente determinar a capacidade de carga da interação estaca-solo, através da medição da força e da aceleração em uma seção do elemento estaca durante um impacto. O equipamento gerador da força de impacto é um bate-estacas ou similar.

O ensaio de carregamento dinâmico pode ser executado em todas as estacas cravadas e em estacas moldadas in loco. A norma brasileira para o ensaio de carregamento dinâmico é a NBR 13208 e a norma norte americana é ASTM D-4945.

O ensaio de carregamento dinâmico é baseado na teoria da onda Smith (1950, 1955, 1957, 1960). Goble et al (1970, 1972) desenvolveram pesquisas que levaram aos equipamentos e métodos de ensaios de carregamentos dinâmicos atuais. Destaca-se também a modelagem de estacas sobre ação de carregamentos dinâmicos nos trabalhos de Lee et al (1988), Deeks & Randolph (1992), Lysmer et al (1999) e Randolph (2000). Mais recentemente Kitiyodom et al. (2006) desenvolveram modelos tridimensionais para a análise de vibrações em estacas.

Apesar de o foco do ensaio de carregamento dinâmico ser a determinação da capacidade de carga da estaca, os acelerômetros do ensaio possibilitam a determinação das frequências naturais de vibração que podem ser obtidas através de uma FFT (*Fast Fourier Transform*).

3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL GOVERNANTE

Uma estaca pode ser modelada como uma barra em base elástica. Para vibrações longitudinais a equação governante é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -K_f u \quad (1)$$

Na Eq. 1, E é o módulo de elasticidade longitudinal, m a massa por unidade de comprimento, K_f a constante da base elástica, e u o deslocamento longitudinal, na direção x. Resolver a equação (1) para vibrações torna-se um problema mais complexo, especialmente quando as condições de contorno se tornam complicadas nos casos de estacas parcialmente embutidas, e nas condições em as propriedades do solo são variáveis. Chowdhury e Dasgupta (2009) apresentam a solução da equação (1) para algumas condições de contorno específicas.

Na análise de vibrações em estacas, é óbvio que o amortecimento do material da estaca é bem menor do que o amortecimento causado pelo solo que circunda a estaca. O amortecimento do solo faz parte do sistema de vibração, contudo é observado que para vibrações translacionais este não é muito significativo e pode ser negligenciado sem maiores efeitos (Chowdhury e Dasgupta, 2009).

4 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

O método de Rayleigh-Ritz fornece uma estimativa da frequência fundamental. Ao mesmo tempo, ele pode ser usado para obter estimativas de várias frequências superiores. Na extensão de Ritz do método de Rayleigh para um sistema de parâmetros discretos, os deslocamentos do sistema são representados como uma superposição de vários vetores de forma diferentes e independentes, conhecidos como vetores de Ritz, cada um com o peso de sua própria coordenada generalizada:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= z_1(t)\boldsymbol{\Psi}_1 + z_2(t)\boldsymbol{\Psi}_2 + \dots + z_M(t)\boldsymbol{\Psi}_M \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (2)$$

Onde $\boldsymbol{\Psi}$ é a matriz dos vetores de Ritz e $\mathbf{z}$ é o vetor de M coordenadas generalizadas. Tratando $\mathbf{u}$ como um possível modo de deslocamento, o quociente de Rayleigh correspondente à forma é dado por:

$$\rho = \frac{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}} \quad (3)$$

Onde $\tilde{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}$ e $\tilde{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}$.

Para sistemas discretos, o valor estacionário é um mínimo próximo a todos os autovalores exceto o mais auto, onde é um máximo. As condições de estacionariedade podem ser declaradas como:

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{z} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{z} \quad (4)$$

A equação acima é reconhecida como um problema de autovalores linearizado. As frequências ω obtidas desta solução serão aproximadamente iguais às frequências do sistema original.

As frequências obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz são somente aproximações das frequências teoricamente exatas. A qualidade da aproximação depende da seleção das formas assumidas $\boldsymbol{\Psi}$, quanto mais próximas estas formas estiverem dos verdadeiros modos de vibração, melhores serão as estimativas das frequências do sistema e dos modos de vibração. As estimativas de frequências sempre serão maiores que as frequências teóricas correspondentes.

O método de Rayleigh-Ritz é também aplicado a sistemas contínuos, neste caso:

$$u(x,t) = z_1(t)\psi_1(x) + z_2(t)\psi_2(x) + \dots + z_M(t)\psi_M(x) \quad (5)$$

$$u(x, t) = \Psi \mathbf{z}$$

Onde Ψ_i , $i=1$ até M , são os modos de Ritz que são funções de coordenadas espaciais x , z_i , $i=1$ até M , são coordenadas generalizadas; Ψ é um vetor coluna de formas Ψ_i ; e $\mathbf{z}$ é o vetor de coordenadas generalizadas, assim:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_0^L EA(x) [\Psi(x)]^T \Psi(x) dx \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_0^L \bar{m}(x) [\Psi(x)]^T \Psi(x) dx \quad (7)$$

No caso do estudo de barras embutidas em um meio elástico a equação (6) deve ser reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_0^L EA(x) [\Psi'(x)]^T \Psi'(x) dx + \int_0^L k_f(x) [\Psi(x)]^T \Psi(x) dx \quad (8)$$

$$\tilde{k}_{ij} = \int_0^L EA(x) [\Psi'_i(x)]^T \Psi'_i(x) dx + \int_0^L \bar{k}(x) [\Psi_i(x)]^T \Psi_i(x) dx \quad (9)$$

4.1 Formulação hierárquica

O método de Ritz, e consequentemente o método de Rayleigh-Ritz pode ser refinado, funções adicionais de forma de Ritz podem ser incluídas para melhorar a acurácia da solução.

Na formulação hierárquica adota-se uma metodologia em que as funções de forma são simplesmente acrescidas, enriquecendo a solução aproximada, sem interferência nas funções existentes. Isto é possível uma vez que os graus de liberdade generalizados são mantidos como incógnitas (Zienkiewicz, 1983). As funções trigonométricas, por sua simplicidade e alto grau de convergência, constituem-se num recurso interessante para o enriquecimento dos elementos. Tais funções são amplamente utilizadas em métodos aproximados de análise estrutural, como o de Rayleigh-Ritz (Burgos, 2005).

Cada função de forma adicional acrescenta um grau de liberdade “fictício” ao elemento, que será mantido como incógnita já que não está associado a um nó. A grande vantagem da formulação hierárquica é a possibilidade do aumento na precisão do elemento sem a necessidade de uma discretização.

Para a análise de vibrações longitudinais, as funções adicionais longitudinais são obtidas de forma hierárquica. No caso, basta utilizar termos em seno, que atendem à condição de zero deslocamento nos nós:

$$\psi_H(x)_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (10)$$

As matrizes de rigidez, de massa e geométrica são acrescidas de uma linha e uma coluna para cada função adicional, mas a parcela relativa ao elemento original não é modificada.

A matriz de rigidez do elemento enriquecido, por exemplo, é dada por:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{PP} & \tilde{\mathbf{K}}^{PH} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{HP} & \tilde{\mathbf{K}}^{HH} \end{bmatrix} \quad (11)$$

No estudo de vibrações longitudinais de barras embutidas em base elástica $\tilde{\mathbf{K}}^{HP}$, $\tilde{\mathbf{K}}^{PH}$ e $\tilde{\mathbf{K}}^{HH}$ são dadas por:

$$\tilde{k}_{ij}^{PH} = \tilde{k}_{ji}^{HP} = \int_0^L EA(x) [\psi'_i(x)]^T \psi'_{H_j}(x) dx + \int_0^L \bar{k}(x) [\psi_i(x)]^T \psi_{H_j}(x) dx \quad (12)$$

$$\tilde{k}_{ij}^{HH} = \int_0^L EA(x) [\psi'_{H_i}(x)]^T \psi'_{H_j}(x) dx + \int_0^L \bar{k}(x) [\psi_{H_i}(x)]^T \psi_{H_j}(x) dx \quad (13)$$

5 FUNDAÇÕES ELÁSTICAS

O modelo de fundação elástica do comportamento do solo foi originalmente proposto por Winkler (1867), caracterizando o solo como uma série de molas lineares-elásticas desconectadas, de modo que a deformação ocorre somente onde o carregamento existe.

5.1 Determinação do módulo de fundação

De acordo com Bowles (1996) o módulo de fundação é uma relação entre a pressão no solo e a deflexão, esta relação aqui discutida é amplamente usada na análise estrutural de elementos de fundações, sua equação básica quando em uma prova de carga em placa é dada por:

$$k_0 = \frac{q}{\delta} \quad (14)$$

Onde $q = P/A$ é a pressão no solo que decorre da aplicação de uma carga P em uma placa com área A .

A determinação de k_0 , k e da constante de mola do solo também pode ser obtida através de provas de carga verticais e laterais. Nestes ensaios as estacas são instrumentadas, as cargas, tensões ou pressões do solo e deflexões ao longo da estaca são medidas diretamente. As

provas de carga são as melhores maneiras para a determinação k_0 , k e da constante de mola do solo, porém requerem tempo, cuidado e são relativamente caras. As provas de carga também são indicadas pelo fato de o módulo de fundação também ser dependente da geometria da fundação (Poulos, 1980).

Na impossibilidade de realizar esses tipos de ensaios normalmente se recorre a correlações empíricas com outras propriedades do solo para a determinação de k_0 . Muitas dessas correlações e valores de referência são apresentadas por Poulos (1980) e Bowles (1996).

Como mencionado anteriormente, na análise de vibrações longitudinais em estacas a formulação de Novak e Beredugo (1972) é bastante utilizada. Nessa formulação os coeficientes de mola k_z , a partir dos quais são calculadas as frequências fundamentais são definidos pela pelas equações:

$$k_z = Gr_0 \left(C_1 + \frac{G_s}{G} \frac{D_f}{r_0} S_1 \right) \quad (15)$$

Onde G e G_s são módulos de cisalhamento dinâmicos do solo, r_0 é o raio e D_f é o embutimento da estaca. C_1 , S_1 , $\bar{C}_{xl}$ e $\bar{S}_{xl}$ são constantes (Novak e Beredugo 1972).

Encontram-se reproduzidas tabelas e gráficos das constantes C_1 , S_1 , $\bar{C}_{xl}$ e $\bar{S}_{xl}$ em Braja Das (1993).

A equação (15) mostra que a constante de mola depende das características do solo na ponta e no fuste da estaca, além da geometria da estaca.

Para a aplicação dessa formulação é necessário o conhecimento do módulo de cisalhamento dinâmico do solo. O ensaio de campo mais comum para a determinação do módulo de cisalhamento dinâmico é o cross hole sísmico. Na impossibilidade de se realizar esse ensaio, normalmente recorre-se a correlações como as de Hardin & Richart (1963); Seed & Idriss (1970); e Ohsaki & Iwasaki (1973); que relacionam outros ensaios geotécnicos de campo com o módulo de cisalhamento dinâmico do solo.

6 ANÁLISE DE RESPOSTAS DINÂMICAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

6.1 Análise espectral e tipos de sinais

A análise de frequências, ou análise espectral, é a essência da análise de vibrações e permite a resolução de muitos problemas de vibração em estruturas. Na análise espectral, o objetivo é determinar a frequência contida em um sinal. Quando são utilizados sinais analógicos, utilizam-se Séries de Fourier, e quando são utilizados sinais digitais é utilizada a Transformada de Fourier Discreta (Cimbala, 2010).

Um sinal analógico é um tipo de sinal contínuo, que varia em função do tempo, já um sinal digital é um sinal com valores discretos, ou seja, descontínuos no tempo e na amplitude. Os sinais obtidos em um ensaio de carregamento dinâmico onde as acelerações são medidas imediatamente após o golpe do martelo são um exemplo de sinal digital e a partir destes sinais podem ser determinadas através de uma FFT.

6.2 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

A Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform – FFT) é simplesmente a DFT que é rapidamente calculada em um computador. Em alguns algoritmos de computador as FFTs são restritas a N em potência de 2 como no Microsoft Excel®. Contudo, há algoritmos FFT que não possuem esta restrição tais como, LabVIEW® e MATLAB®.

Um gráfico da magnitude da FFT, saída $|F|$ versus frequência é chamado de espectro de frequência. Pode ser chamado de espectro de amplitude desde que as dimensões e unidades do eixo vertical sejam as mesmas da amplitude do sinal original. Em um caso típico em que o sinal de entrada é aceleração, as unidades de $|F|$ também são de aceleração. Nesse tipo de gráfico, dado um intervalo de frequências, a amplitude definida neste caminho indica a importância relativa do intervalo de frequência para o sinal.

A FFT é extremamente útil na análise de medidas instáveis, porque o espectro de frequências de uma FFT fornece informações sobre a frequência contida no sinal. A FFT é muito aplicada na área de engenharia, principalmente em vibrações, onde é necessário saber a frequência contida na vibração.

7 RESULTADOS

7.1 Exemplos numéricos

7.1.1 Vibrações axiais

Neste item são apresentados os resultados obtidos das frequências de vibração longitudinais calculadas para três estacas com as características geométricas e físicas apresentadas na Tabela 1. Foram realizadas provas de cargas estáticas nas referidas estacas. A Figura 1 apresenta o resultado do ensaio estático da estaca PI-3, a Figura 2 apresenta o resultado do ensaio estático da estaca PI-10a e Figura 3 apresenta o resultado do ensaio estático da estaca PI-11.

Os ensaios estáticos cíclicos realizados possibilitaram o cálculo das constantes de mola dos solos em que as estacas em questão estão embutidas. As constantes de mola calculadas são apresentadas na Tabela 2.

As frequências de vibração das estacas foram calculadas pelo método de Rayleigh-Ritz enriquecidas com 15 funções adicionais. Os cálculos foram realizados em uma rotina programada em Mathcad®. As frequências calculadas são apresentadas na Tabela 3. No item 7.2.2 estas frequências serão comparadas com os valores reais obtidos em testes de vibração forçada.

Tabela 1 – Características das estacas

Característica	Estaca		
	PI-3	PI-10a	PI-11
Tipo	Pré-Moldada de Concreto	Franki	Metálica
Seção	70cm	60cm	W610x155
Comprimento Embutido em Solo (m)	34.30	25.50	35.65
Comprimento Total (m)	35.90	27.30	46.70
Composição	3X11.00m+3.80m	27.0m	3X12.00m+11.00m
Módulo de Elasticidade (kN/m ²)	29979000	28291000	206874800
Peso Específico do Material da Estaca (kN/m ³)	24.0	24.0	77.3
Área da Seção Transversal da Estaca (m ²)	0.20390	0.30876	0.01601

Tabela 2 – Provas de carga e coeficientes de mola

Característica	Estaca		
	PI-3	PI-10a	PI-11
Comprimento Embutido em Solo (m)	34.30	25.50	35.65
Carga Máxima no Ensaio Estático (kN)	5990	4495	4583
Recalque máximo no Ensaio Estático (mm)	21.58	47.62	35.65
K (kN/m)	296610	328550	136854
k=K/L (kN/m ²)	8648	12884	3839

Os valores de K apresentados na Tabela 2 foram calculados a partir dos dados da última etapa de carregamento do ensaio de carga estático.

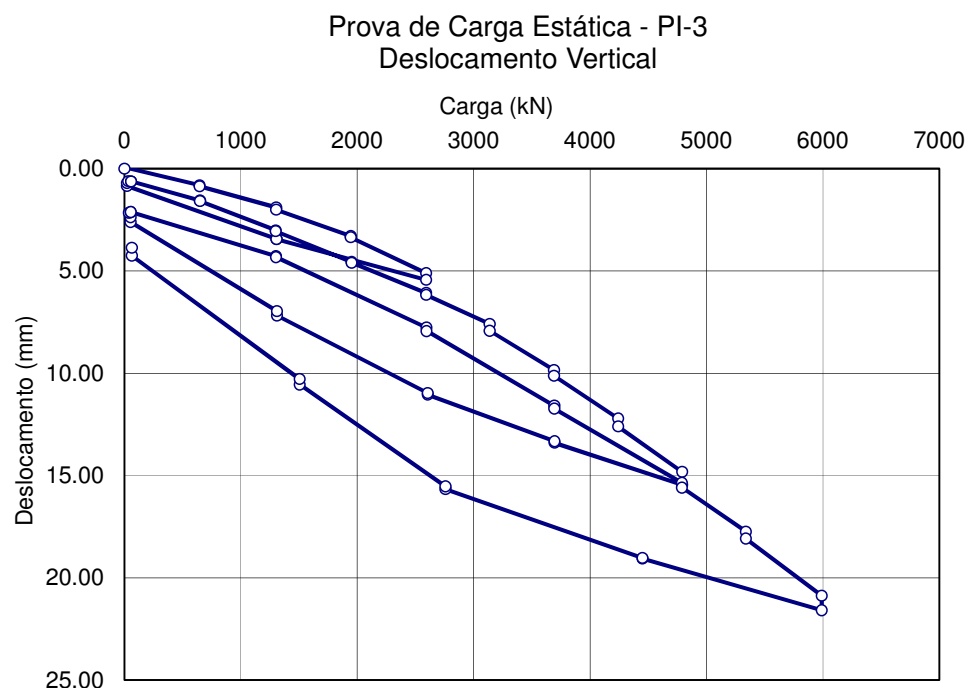


Figura 1 – Prova de carga vertical (PI-3)

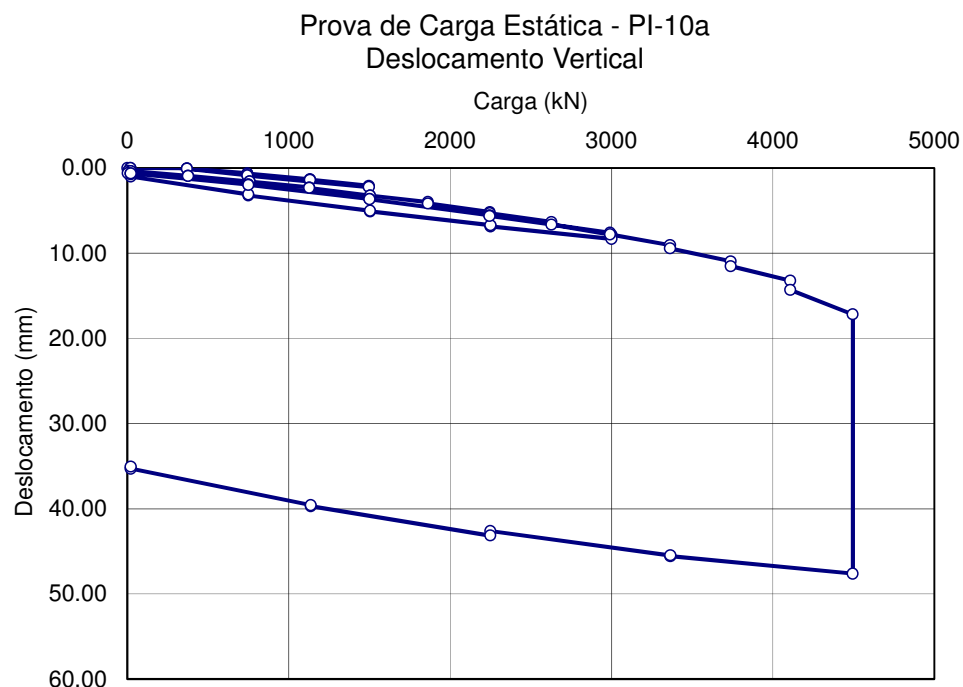


Figura 2 – Prova de carga vertical (PI-10a)

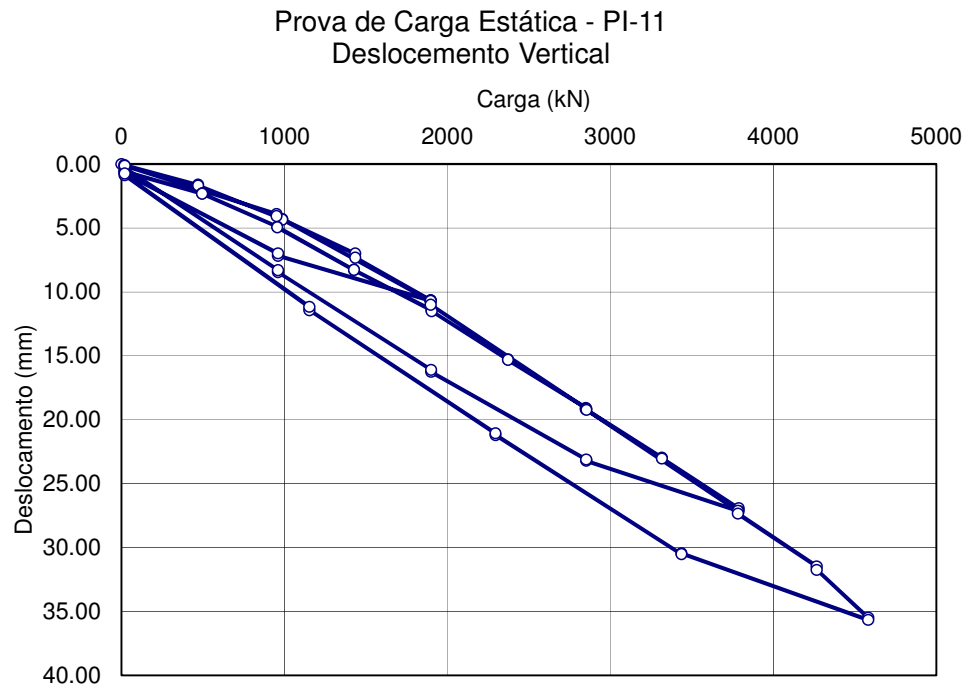


Figura 3 – Prova de carga vertical (PI-11)

Tabela 3 – Frequências de vibração longitudinais das estacas

Modo	Frequência (Hz)		
	PI-3	PI-10a	PII-11
1	26	26	29
2	59	71	67
3	104	129	117
4	150	190	170
5	198	252	224
6	247	314	278
7	295	376	332
8	344	438	387
9	393	501	442
10	442	564	498

7.2 Análise espectral

7.2.1 Exemplo de FFT em sinal periódico amortecido

Neste item é aplicada uma FFT em um sinal gerado a partir de função periódica amortecida conhecida. Neste exemplo $f(t)$ possui sete modos de vibração conforme a equação (16).

$$\begin{aligned} f(t) = & [45\text{sen}(2\pi(25\text{Hz})t) + 135\text{sen}(2\pi(75\text{Hz})t) + \\ & 60\text{sen}(2\pi(140\text{Hz})t) + 45\text{sen}(2\pi(195\text{Hz})t) + 30\text{sen}(2\pi(250\text{Hz})t) + \\ & + 15\text{sen}(2\pi(310\text{Hz})t) + 15\text{sen}(2\pi(400\text{Hz})t)]e^{-50t} \end{aligned} \quad (16)$$

Um sinal da função $f(t)$ foi gerado simulando uma taxa de amostragem de 5000Hz, um número de pontos de dados coletados de 1024 e tempo total da coleta de dados de 0.2046s.

Estes valores de f_s , N e T são usuais em ensaios de carregamento dinâmico em estacas.

A Figura 4 ilustra o sinal gerado e a FFT correspondente. Os resultados apresentados na Figura 4 demonstram a aplicabilidade da FFT em ensaios de carregamento dinâmico.

É comum espectros de frequência de um sinal gerados pela FFT não serem limpos, pois o desempenho de uma FFT depende de uma série de fatores tais como taxa de amostragem f_s ; número de pontos de dados coletados N e tempo total da coleta de dados T , onde.

Existe um erro não físico na FFT que é chamado de *leakage* e aparece quando a aquisição de dados discreta não pára exatamente na mesma fase em que a onda senóide é iniciada. Em princípio, se um número infinito de pontos de dados discretos é tomado, tal erro não seria um problema. Contudo em sistema de aquisição de dados reais a FFT é realizada em um numero finito de pontos de dados discretos, e sempre haverá algum erro de *leakage*.

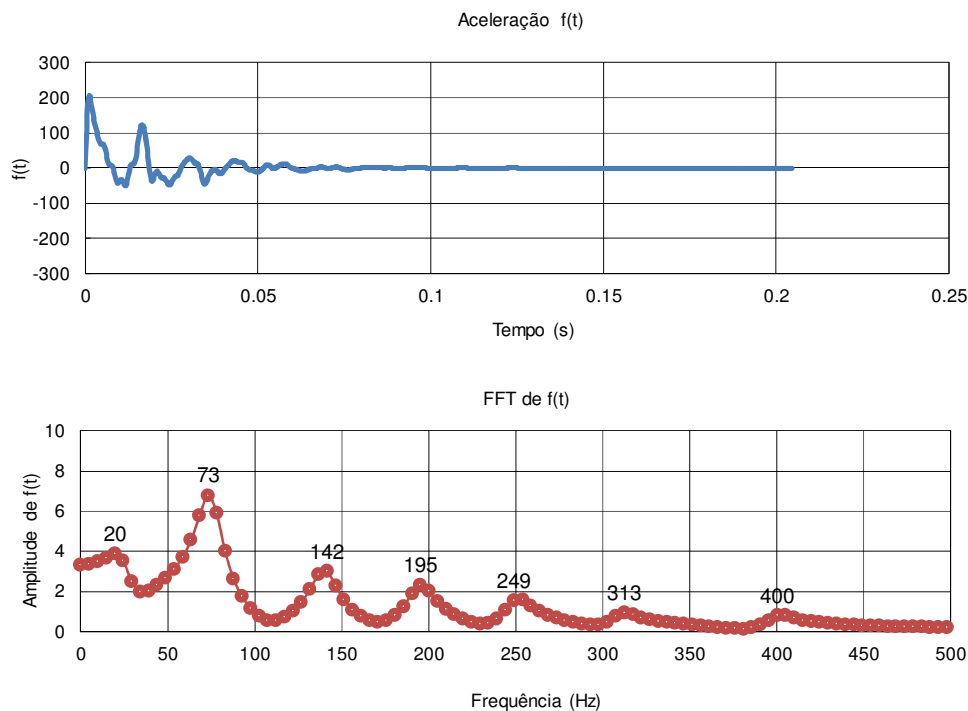


Figura 4 – Função periódica amortecida e FFT

7.2.2 Exemplo de FFT aplicado em estacas

As estacas modeladas matematicamente no item 7.1 foram ensaiadas dinamicamente. Foram realizados ensaios de carregamento dinâmico, ou seja, foram induzidas vibrações forçadas nestas estacas através de golpes aplicados com martelos de cravação.

Foram registrados sinais de aceleração no tempo gerados pelos golpes aplicados no topo das estacas. A Figura 5 apresenta os sinais de aceleração obtidos na estaca PI-03, a Figura 6 apresenta os sinais de aceleração obtidos para a estaca PI-10a e a Figura 7 apresenta os sinais de aceleração obtidos para a estaca PI-11. A taxa de amostragem do ensaio foi de 5000Hz, o número de pontos de dados coletados foi de 1024 e tempo total da coleta de dados foi de 0.2046s.

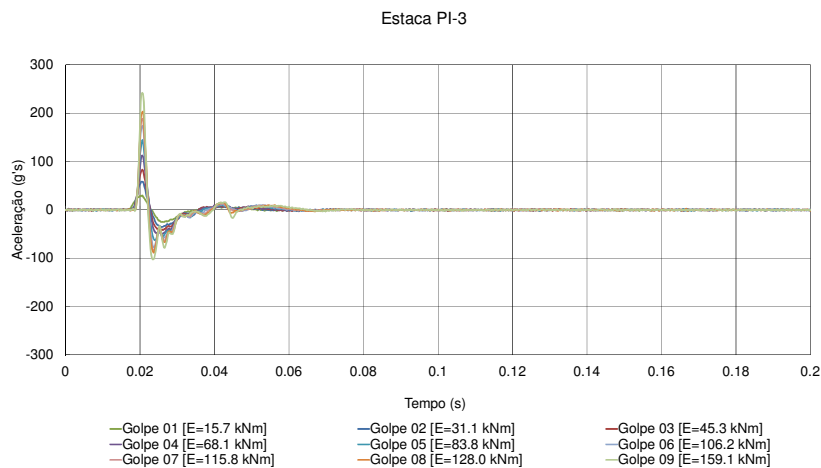


Figura 5 – Acelerações geradas na estaca PI-03 pelos golpes aplicados

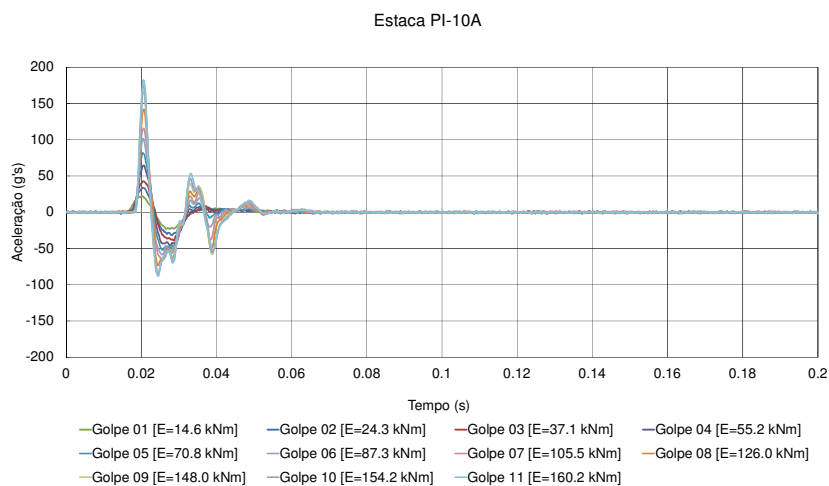


Figura 6 – Acelerações geradas na estaca PI-10a pelos golpes aplicados

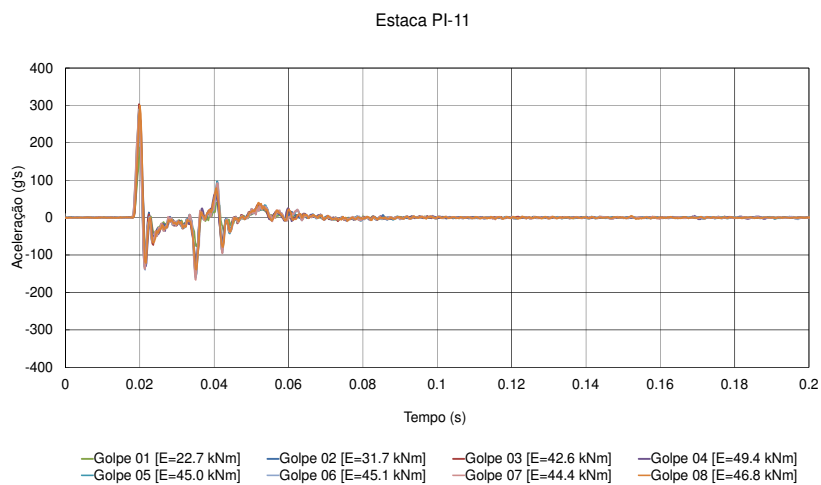


Figura 7 – Acelerações geradas na estaca PI-11 pelos golpes aplicados

Foi aplicada a técnica da FFT para cada um dos sinais coletados. Na Figura 8 é apresentado o espectro de frequências naturais encontrado para a estaca PI-03, na Figura 9 é apresentado o espectro de frequências naturais encontrado para a estaca PI-10a e na Figura 10 é apresentado o espectro de frequências naturais encontrado para a estaca PI-11. Estas figuras apresentam

para cada estaca os espectros na escala $\frac{f_s}{2}$ e em uma escala ampliada de modo a se visualizar melhor os picos dos espectros.

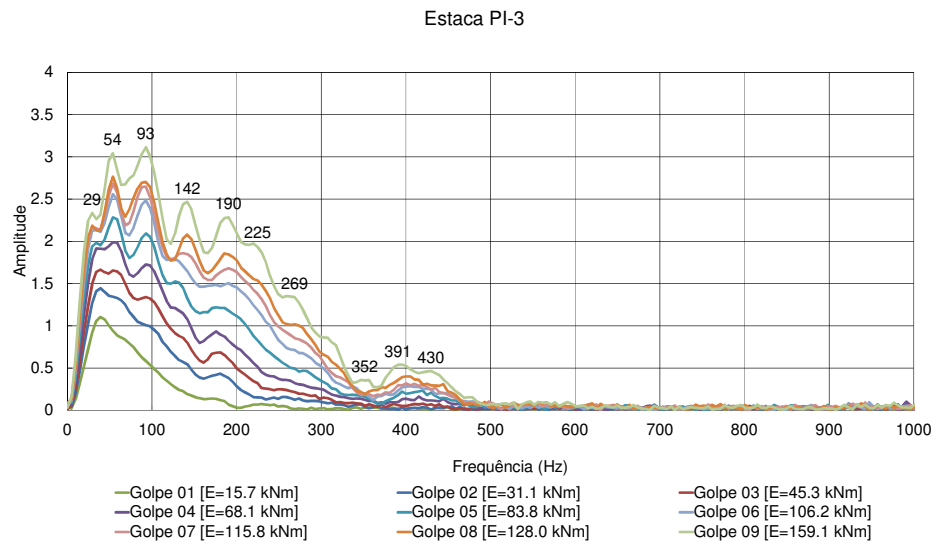


Figura 8 – Espectro de frequências da estaca PI-03

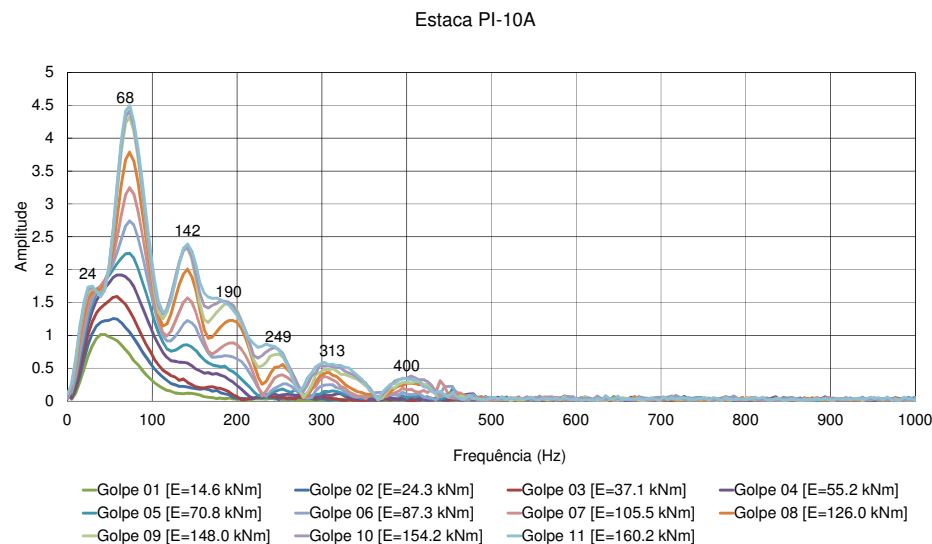


Figura 9 – Espectro de frequências da estaca PI-10a

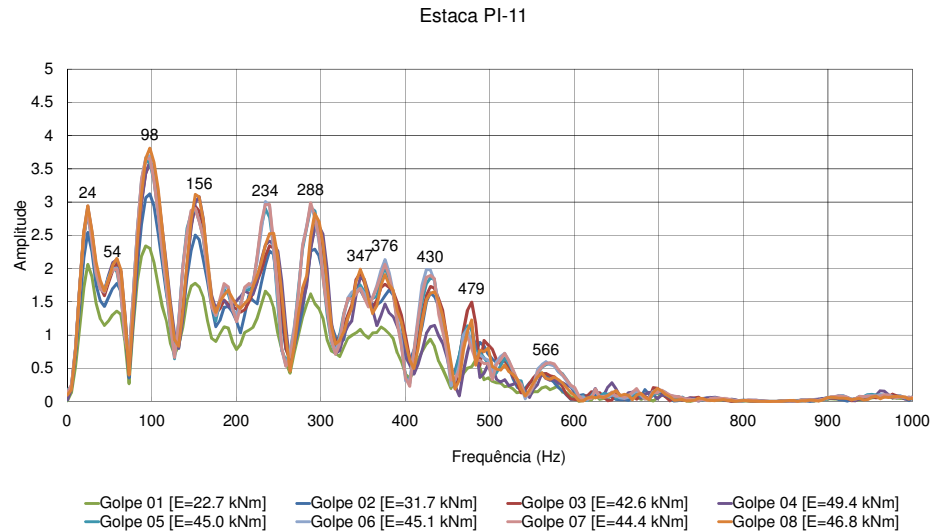


Figura 10 – Espectro de frequências da estaca PI-11

As frequências naturais de vibração obtidas para as estacas em questão através da técnica da FFT foram comparadas com os valores obtidos da modelagem matemática no item 7.1. A Tabela 4 apresenta a comparação das frequências obtidas pelos dois métodos.

Tabela 4 – Frequências naturais obtidas pela FFT

Modo	Frequência (Hz)					
	PI-3		PI-10a		PII-11	
	Rayleigh Ritz (n=15)	Fast Fourier Transform (FFT)	Rayleigh Ritz (n=15)	Fast Fourier Transform (FFT)	Rayleigh Ritz (n=15)	Fast Fourier Transform (FFT)
1	26	29	26	24	29	24
2	59	54	71	68	67	54
3	104	93	129	142	117	98
4	150	142	190	190	170	156
5	198	190	252	249	224	234
6	247	225	314	313	278	288
7	295	269	376	400	332	347
8	344	352	438	-	387	376
9	393	391	501	-	442	430
10	442	430	564	-	498	479

8 CONCLUSÕES

A maior vantagem da metodologia proposta é que ao invés de resolver equações diferenciais, especialmente quando as condições de contorno se tornam complicadas nos casos de estacas parcialmente embutidas, e nas condições em as propriedades do solo são variáveis, as matrizes de rigidez, amortecimento e massa podem ser diretamente derivadas dos princípios de energia de forma simples.

A formulação apresentada pode ser aplicada para um caso geral onde a estaca pode atuar com ambos os comportamentos de ponta e atrito lateral, situação esta que não há soluções diretas disponíveis, e esta pode ser a realidade em muitos casos onde a estaca não é completamente suportada pela ponta ou completamente flutuante suportada pelo atrito.

Neste trabalho foram aplicados elementos enriquecidos com funções de forma trigonométricas, para a avaliação de frequências naturais de vibração longitudinais. A formulação hierárquica com funções trigonométricas mostrou-se eficaz na obtenção de frequências de vibração.

É válido ressaltar a importância do Método de Rayleigh-Ritz, constituindo-se em uma ferramenta computacional de grande aplicabilidade. Deve-se também afirmar a utilidade do

uso de fundações elásticas, pelo menos para situações em que o módulo de fundação ou o coeficiente de mola possa ser determinado por ensaios de carregamento em campo.

Foi aplicada uma metodologia para a determinação de frequências naturais de vibração longitudinal de estacas a partir dos resultados de ensaios de carregamentos dinâmicos.

Exemplos foram realizados no intuito de avaliar as frequências de vibração longitudinais de estacas, cujos resultados reais de campo eram conhecidos. Estes exemplos, implementados no programa Mathcad®, foram coerentes com os resultados obtidos dos ensaios dinâmicos de campo.

O método numérico aplicado também permite o cálculo de frequências de vibração em situações de módulos de fundação variáveis com a profundidade. Porém, esta variação só pode ser realmente determinada com provas de carga instrumentadas em profundidade.

ACKNOWLEDGEMENTS

Os autores agradecem o apoio da PUC-Rio e de CAPES e CNPq.

REFERENCES

ASTM D-4945-00. Standard Test Method for High-Strain Dynamic Testing of Deep Foundations. *ASTM*, 2000.

BRAJA M. D. *Principles of Soil Dynamics*, PWS-Kent Publishing Co., 570 p, 1993.

BOWLES, J. E. *Foundation Analysis and Design*. 5th Edition, McGraw-Hill, 1996.

BURGOS, R. B. *Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2005.

CHOWDHURY I; DASGUPTA S. P. *Dynamics of Structure and Foundation - A Unified Approach*. Taylor & Francis Group, London, UK, 2009.

CIMBALA, J.M. *Fourier Transforms*, Penn State University, 2010.

DALBONE, A. R.; SÁNCHEZ, E. S. Análise Dinâmica de Fundações Diretas para Máquina Rotativas, *Engenharia Estudo e Pesquisa*. v. 11 - n. 2 - p. 36-46 - jul./dez. 2011.

DEEKS A.J.; RANDOLPH M.F. Accuracy in Numerical Analysis of Pile Driving Dynamics. *4th Int. Conf. Application of Stress Wave Theory to Piles*. The Hague, the Netherlands, pp 85-90, 1992.

GOBLE, G. G.; RAUSCHE, F.; MOSES, F. *Dynamic Studies on the Bearing Capacity of Piles; Phase III Volume I Report No. 48*. Division of Solid Mechanics Structures and Mechanical Design School of Engineering Case Western Reserve University: Cleveland, OH, 1970.

GOBLE, G. G.; RAUSCHE, F.; MOSES, F. *Dynamic Studies on the Bearing Capacity of Piles; Phase III Volume II Report No. 48*. Division of Solid Mechanics Structures and Mechanical Design School of Engineering Case Western Reserve University: Cleveland, OH, 1970.

GOBLE, G. G.; KOVACS, W. D., RAUSCHE, F., June 1972. Field Demonstration: Response of Instrumented Piles to Driving and Load Testing. *Proceedings of the Specialty Conference*

on Performance of Earth and Earth-Supported Structures, American Society of Civil Engineers: Lafayette, IN; 3-38, 1972.

HARDIN, B.O.; RICHART, F.E. Elastic wave velocities in granular media. *JSMFD*, ASCE, Vol. 89, No. SM1, 1963.

KITIYODOM, P.; MATSUMOTO, T.; KOJIMA, E.; KUMAGAI, H.; TOMISAWA, K. Analysis of static and dynamic horizontal load tests on steel pipe piles, *Proc. 10th International Conference on Piling and Deep Foundations*, Amsterdam, The Netherlands; 690-699, 2006.

KITIYODOM, P; MATSUMOTO, T. Dynamic. analysis. of. a. single. pile. in. time. domain. considering. frequency. dependence. of. soil. resistance. *8th International Conference on Application of Stress Wave Theory to Piles*, Lisbon, 2008.

LEE, S.; CHOW, Y.; KARUNARATNE, G.; WONG, K. (1988). Rational Wave Equation Model for Pile-Driving Analysis. *J. Geotech. Engrg.*, 114(3), 306–325, 1988.

LYSMER, J.; OSTADAN, F.. CHEN, C. A System for Analysis of Soil Structure Interaction, *SASSI-2000*, University of California, Berkeley, 1999.

NBR 13208/2007, Estacas - Ensaios de carregamento dinâmico. *ABNT*, 2007.

NOVAK, M.; BEREDUGO, Y. O. Vertical vibration of embedded footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division ASCE*, vol. 98, no. SM12, pp. 1291–1131, 1972.

NOVAK, M.; EL SHARNOUBY, B. Stiffness Constants of Single Piles. *J. Geotech. Engrg.*, 109(7), 961–974, 1983.

NOVAK, M.; HOWELL, J. F.; Torsional Vibration of Pile Foundations. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 103, 271–285, 1977.

NOVAK, M. Vertical Vibration of Floating Piles. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 103, No. EM1, pp. 153-168, 1977.

OHSAKI, Y.; IWASAKI, R. On dynamic shear modulus and Poisson's ratio of soil deposits, *Soils and Foundations*, 13(4), pp. 61–73, 1973.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. *Pile Foundations Analysis and Design*. New York: John Wiley and Sons, 1980.

RANDOLPH, M.F. Pile-soil interaction for dynamic and static loadin', *Application of Stress-Wave Theory to Piles*, Rotterdam, Appendix, pp. 3-11, 2000.

RICHART, F. E.; HALL, J. R.; WOODS, R. D. *Vibrations of soils and foundations*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1970.

SMITH, E. A. L. What Happens When Hammer Hits Pile. *Engineering News-Record*. 159, September 5, 1957.

SMITH, E.A.L. Pile Driving Analysis by the Wave Equation. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*. American Society of Civil Engineers, Vol. 86, 1960.

SMITH, E. A. L. Pile Driving Impact. *Proceedings, Industrial Computation Seminar*, International Business Machines Corp., New York, N. Y., p. 44. 1950.

SMITH, E.A.L., Impact and Longitudinal Wave Transmission. *Transactions, ASME*, August, 1955

WINKLER, E. *Die Lehre Von Elasticitaet Und Festigkeit*. 1st Edn., H. Dominicus, Prague, 1867.

ZIENKIEWICZ, O. C., GAGO, J. P. S. R.; KELLY, D. W. The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis. *Comp. Struct.* 16: 53-65. 1983.