



ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS LAMINADAS

Elias Sariaiva Barroso

Evandro Parente Junior

Antônio Macário Cartaxo de Melo

Edson Moreira Dantas Junior

João Batista Marques de Souza Junior

elias.barroso@gmail.com

evandro@ufc.br

macario@ufc.br

edsonmdantas@yahoo.com.br

joabatistasousajr@hotmail.com

Universidade Federal do Ceará

Campos do Pici, 60440-900, Fortaleza, Ceará, Brasil

Abstract. A Análise Isogeométrica é um método de análise numérica que utiliza como funções de aproximação do campo de deslocamentos as mesmas funções utilizadas pelos sistemas CAD para representação da geometria, como B-splines e NURBS. Desta forma, a geometria do modelo é representada de forma exata para qualquer discretização adotada. Esta é uma vantagem importante sobre o Método dos Elementos Finitos onde a geometria do modelo é representada de forma aproximada por funções polinomiais. Este trabalho apresenta inicialmente a formulação isogeométrica para análise de sólidos de material homogêneo e isotrópico. Em seguida, esta formulação é estendida para a análise de estruturas de materiais compósitos reforçados por fibras. Exemplos de estruturas de cascas de material homogêneo e isotrópico, bem como de compósitos laminados, foram analisados e os resultados foram comparados com resultados disponíveis na literatura. Excelentes resultados foram obtidos em todos os exemplos e esquemas de laminação considerados. Os resultados mostraram ainda que o uso de funções NURBS de ordem mais alta leva a uma convergência mais rápida da resposta, necessitando de menos graus de liberdade em comparação com o uso de funções de ordem baixa.

Keywords: Análise Isogeométrica, Extração Bézier, Estruturas Laminadas

1 INTRODUÇÃO

A Análise Isogeométrica (AIG) é um recente método de análise numérica que propõe aproximar as ferramentas de modelagem geométrica (sistemas CAD) e as ferramentas de análise estrutural. A grande vantagem desta formulação está na utilização, como funções de aproximação do campo de deslocamentos, as mesmas funções utilizadas pelos sistemas CAD para representação da geometria, como B-splines e NURBS. O uso destas funções permite representar exatamente formas complexas, como arcos de círculo, cônicas e quádras. Desta forma a AIG permite que o modelo de análise represente exatamente a geometria do problema, independente da discretização adotada para aproximar o campo de deslocamentos. A AIG foi inicialmente proposta por Hughes et al. (2005) e vem sendo explorada em vários trabalhos (Cottrell et al., 2009; Kapoor & Kapania, 2012; Borden et al., 2011; Espath et al., 2014).

Outra vantagem da AIG consiste na facilidade de refinamento do modelo, através da utilização de algoritmos clássicos de refinamento da geometria tratados no campo da Modelagem Geométrica. No caso das NURBS, estes algoritmos são a *Inserção de Knot* e a *Elevação de Grau* (Piegl & Tiller, 1997). A subdivisão dos modelos em mais elementos e a elevação do grau destes é facilmente alcançada com o uso destes algoritmos.

Os compósitos considerados neste trabalho são formados por fibras de alta resistência (e.g. carbono e vidro) envolvidas por uma matriz polimérica (resina). Estes materiais apresentam várias características importantes para a fabricação de estruturas de alto desempenho, como boas relações resistência/peso e rigidez/peso, bom isolamento térmico e amortecimento estrutural e elevada resistência à fadiga. Normalmente, várias camadas de compósitos com diferentes orientações de fibras são empilhadas de forma a se obter características estruturais mais eficientes, resultando em uma estrutura laminada.

Este trabalho utilizou a AIG aplicada a problemas de análise de estruturas laminadas. A formulação isogeométrica foi implementada em um software acadêmico de Elementos Finitos, de modo a aproveitar toda a estrutura do programa. A implementação da AIG possui muitos aspectos semelhantes à do Método dos Elementos Finitos. Neste sentido, uma das abordagens para implementação da AIG consiste em utilizar o procedimento da Extração de Bézier, facilitando ainda mais a reutilização do código. Neste contexto, a maior diferença entre a implementação de ambos os métodos reside na implementação do cálculo das funções de forma e suas derivadas.

O conteúdo deste trabalho está dividido da seguinte forma: No Item 2, realiza-se uma revisão bibliográfica da representação de NURBS, abordando os principais aspectos utilizados na formulação da AIG; No Item 3, mostra-se a formulação da AIG considerada neste trabalho; No Item 4, explica-se a formulação de sólido laminado utilizada; No Item 5, aborda-se dois exemplos clássicos de problemas de cascas, que são solucionados através da AIG e comparados com resultados da literatura. As conclusões sobre os resultados obtidos são tratadas no Item 6.

2 NURBS

NURBS são representações paramétricas amplamente utilizadas em modelagem computacional, pois oferecem uma forma matemática capaz de representar tanto modelos matemáticos padrão (quádras, cônicas, superfícies de revolução, ...) como também modelos de forma livre, utilizando a mesma base de dados para armazenamento de ambos. Uma curva NURBS C

de grau p é construída por uma combinação linear entre os pontos de controle $\mathbf{p}_i$ e funções de base racional $R_{i,p}(\xi)$, como mostra a expressão:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (1)$$

onde ξ é a coordenada paramétrica de avaliação da curva e n é o número de bases da curva. As bases NURBS são avaliadas em função das bases B-Spline $N_{i,p}$ e dos pesos w_i pela expressão:

$$R_i(\xi) = \frac{N_{i,p} w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p} w_i} = \frac{N_{i,p} w_i}{W(\xi)} \quad (2)$$

onde $W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i$ é a função peso. Cada ponto de controle $\mathbf{p}_i$ possui um peso correspondente w_i . A consideração dos pesos permite alterar a geometria final do modelo, como também a modelagem de cônicas como circunferências e elipses.

As bases B-Spline requerem um vetor de *knots*. Tal vetor consiste num conjunto de valores paramétricos não-negativos e não-decrescentes delimitados ao longo do intervalo paramétrico $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ no qual a curva foi definida. Considerando o vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$, as funções de base B-Spline são definidas pela fórmula recursiva de Cox-de Boor (Piegl & Tiller, 1997):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

Cada base $N_{i,p}$ contribui ao longo do intervalo paramétrico $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$. O número de bases n pode ser calculado em função do tamanho do vetor de *knots* ks e do grau p por:

$$n = ks - p - 1 \quad (4)$$

A derivada de $N_{i,p}$ pode ser calculada por:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

As funções de base B-Spline $N_{i,p}(\xi)$ têm as seguintes características:

- São não-negativas: $N_{i,p}(\xi) \geq 0$;
- Possuem partição da unidade: $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$;
- Possuem suporte localizado: $N_{i,p}(\xi) = 0$ se ξ estiver fora do intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$;
- Possuem continuidade C^{p-1} entre os *knots*;
- Possuem continuidade C^{p-m} nos *knots*, onde m é a multiplicidade do *knot*.

Outra importante observação é que o número de bases que contribui para cada intervalo paramétrico (ou *knot span*) é sempre igual a $p+1$. É importante notar que as funções de base racionais $R_{i,p}(\xi)$ herdam as propriedades das funções de base B-Spline $N_{i,p}(\xi)$.

Um sólido NURBS definido por produto tensorial é construído pelo produto de três funções de base univariantes NURBS. Dados um tensor de pontos de controle $\mathbf{P}$ ($n \times m \times o$), uma NURBS de grau p na direção ξ com vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$, uma NURBS de grau q na direção η com vetor de *knots* $\mathcal{H} = [\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}]$ e uma NURBS de grau l na direção ζ com vetor de *knots* $\mathcal{L} = [\zeta_1, \zeta_1, \dots, \zeta_{o+l+1}]$, um sólido V é definido por:

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^o R(\xi, \eta, \zeta)_{ijk} \mathbf{P}_{ijk} \quad (6)$$

onde $R(\xi, \eta, \zeta)$ é a função de base racional trivariante dada por:

$$R(\xi, \eta, \zeta)_{i,j,k} = \frac{w_{ijk} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,l}(\zeta)}{W(\xi, \eta, \zeta)} \quad (7)$$

e $W(\xi, \eta, \zeta)$ é a função peso trivariante:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^o w_{ijk} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,l}(\zeta) \quad (8)$$

As derivadas parciais de $W(\xi, \eta, \zeta)$ são avaliadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^o w_{ijk} N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,l}(\zeta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^o w_{ijk} N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) N_{k,l}(\zeta) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^o w_{ijk} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N'_{k,l}(\zeta) \end{aligned} \quad (9)$$

As derivadas parciais das funções de base trivariantes podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) &= w_{ijk} N_{j,q}(\eta) N_{k,l}(\zeta) \frac{W(\xi, \eta, \zeta) N'_{i,p}(\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta, \zeta) N_{i,p}(\xi)}{W^2(\xi, \eta, \zeta)} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) &= w_{ijk} N_{i,p}(\xi) N_{k,l}(\zeta) \frac{W(\xi, \eta, \zeta) N'_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta, \zeta) N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta, \zeta)} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) &= w_{ijk} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \frac{W(\xi, \eta, \zeta) N'_{k,l}(\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} W(\xi, \eta, \zeta) N_{k,l}(\zeta)}{W^2(\xi, \eta, \zeta)} \end{aligned} \quad (10)$$

Um modelo NURBS pode ser refinado adicionando novos valores *knots* ou elevando o grau das funções base sem modificar a geometria final da curva. Os algoritmos utilizados para esta finalidade são a *Inserção de Knot* e a *Elevação do Grau* (Piegl & Tiller, 1997). Estes algoritmos podem ser aplicados de forma eficiente a NURBS de qualquer geometria, grau e dimensão (curva, superfície ou volume).

3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método mais utilizado atualmente para análise de sólidos e estruturas. No MEF, a estrutura é dividida em um conjunto de elementos conectados através de nós. Os deslocamentos no interior de cada elemento são interpolados a partir dos deslocamentos de seus nós utilizando polinômios. As equações de equilíbrio da estrutura são obtidas utilizando princípios variacionais (trabalho virtual ou energia potencial) ou Métodos de Resíduos Ponderados (e.g. Galerkin). Na formulação isoparamétrica do MEF, a geometria dos elementos é descrita pelas mesmas funções utilizadas para aproximar os deslocamentos. Esta formulação é largamente utilizada, pois garante que as condições necessárias para a convergência do MEF para a solução exata do problema sejam automaticamente satisfeitas (Cook et al., 2002).

A Análise Isogeométrica (AIG) utiliza a mesma ideia da formulação isoparamétrica do MEF, mas neste caso a sequência é invertida: os deslocamentos no interior do sólido são aproximados utilizando as mesmas funções utilizadas para definir a geometria do sólido (e.g. B-splines e NURBS). Desta forma, consegue-se representar de forma exata a geometria do modelo mantendo a garantia de convergência para a solução do problema.

Utilizando os conceitos de modelagem geométrica discutidos no Item 2, a geometria do sólido é escrita como:

$$x = \sum_{a=1}^{np} R_a x_a, \quad y = \sum_{a=1}^{np} R_a y_a, \quad z = \sum_{a=1}^{np} R_a z_a \quad (11)$$

onde np é o número de pontos de controle que definem a geometria do sólido, R_a são as funções base utilizadas e x_a, y_a, z_a são as coordenadas dos pontos de controle. Neste trabalho, as funções base utilizadas são NURBS trivariadas, discutidas no Item 2.

Na Análise Isogeométrica, os deslocamentos no interior do sólido (u, v, w) são aproximados com as mesmas funções base utilizadas para descrever a geometria do sólido:

$$u = \sum_{a=1}^{np} R_a u_a, \quad v = \sum_{a=1}^{np} R_a v_a, \quad w = \sum_{a=1}^{np} R_a w_a \quad (12)$$

onde u_a, v_a, w_a são os deslocamentos dos pontos de controle do sólido. Estas equações podem ser escritas de forma matricial como

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \mathbf{N}_a \mathbf{u}_a = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (13)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor dos graus de liberdade do problema (i.e. deslocamentos dos pontos de controle) e a matriz $\mathbf{N}$ é dada por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{N}_{np} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Desta forma, a matriz de aproximação dos deslocamentos $\mathbf{N}$ é formada por uma série de sub-matrizes correspondentes a cada ponto de controle.

É importante notar que diferente do MEF, os pontos de controle não pertencem ao sólido e seus deslocamentos não possuem um sentido físico claro, como ocorrem com os deslocamentos nodais, que correspondem aos deslocamentos de pontos do sólido. Desta forma, a AIG tem características similares às do Método de Rayleigh-Ritz.

Um aspecto importante da AIG é que embora a geometria possa ser descrita exatamente utilizando poucos pontos de controle, a obtenção de resultados precisos na análise requer que um número adequado de graus de liberdade seja considerado. Assim, o número de pontos de controle mínimo a ser utilizado é ditado pela geometria do problema, mas o número efetivamente utilizado depende da precisão requerida da análise. Estes pontos de controle adicionais podem ser obtidos utilizando os algoritmos de *Inserção de Knot* e a *Elevação de Grau* (Piegl & Tiller, 1997), de maneira a refinar o modelo numérico mantendo a geometria exata.

3.1 Deformações

Considerando que os deslocamentos são pequenos, as deformações podem ser calculadas como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \begin{bmatrix} R_{a,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{a,y} & 0 \\ 0 & 0 & R_{a,z} \\ R_{a,y} & R_{a,x} & 0 \\ R_{a,z} & 0 & R_{a,x} \\ 0 & R_{a,z} & R_{a,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (15)$$

É importante notar que a matriz deformação-deslocamento ($\mathbf{B}$) tem o mesmo padrão da matriz $\mathbf{N}$ mostrada na Eq. (14).

As funções base R_a são definidas em função das coordenadas paramétricas (ξ, η, ζ) , mas para calcular a matriz deformação-deslocamento é necessário calcular as derivadas destas funções em relação às coordenadas cartesianas (x, y, z) . Assim, como na formulação isoparamétrica do MEF (Cook et al., 2002), na AIG estas derivadas podem ser calculadas utilizando a matriz Jacobiana ($\mathbf{J}$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum R_{a,\xi} x_a & \sum R_{a,\xi} y_a & \sum R_{a,\xi} z_a \\ \sum R_{a,\eta} x_a & \sum R_{a,\eta} y_a & \sum R_{a,\eta} z_a \\ \sum R_{a,\zeta} x_a & \sum R_{a,\zeta} y_a & \sum R_{a,\zeta} z_a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_{a,x} \\ R_{a,y} \\ R_{a,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} R_{a,\xi} \\ R_{a,\eta} \\ R_{a,\zeta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

3.2 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio do sólido na AIG podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). De acordo com o PTV, o equilíbrio ocorre quando o trabalho virtual interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW_{ext}), qualquer que seja o campo de deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}$, desde que este seja pequeno e obedeça às condições de contorno essenciais

do problema (Cook et al., 2002). Matematicamente:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dS + \sum \delta \hat{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{F}_j \quad (17)$$

onde $\delta \epsilon$ é o vetor de deformações virtuais, σ é o vetor das tensões, $\mathbf{b}$ são as forças de corpo, $\mathbf{q}$ são as forças de superfície e $\mathbf{F}_j$ são as cargas concentradas atuantes no corpo.

Utilizando a Eq. (15) e considerando apenas pequenos deslocamentos, as deformações virtuais são dadas por:

$$\delta \epsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (18)$$

Assim, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (19)$$

onde o vetor das forças internas da estrutura ($\mathbf{g}$) é dado por

$$\mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV \quad (20)$$

Utilizando a Eq. (14), o trabalho virtual externo pode ser escrito como:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \delta \mathbf{u}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \delta \mathbf{u}^T \sum \mathbf{N}_j^T \mathbf{F}_j = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (21)$$

Portanto, o vetor das cargas externas ($\mathbf{f}$) é dado por

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \sum \mathbf{N}_j^T \mathbf{F}_j \quad (22)$$

Nesta expressão, a matriz $\mathbf{N}_j$ corresponde à matriz $\mathbf{N}$ da Eq. (14) avaliada no ponto de aplicação da força j .

As equações de equilíbrio do modelo discreto são obtidas substituindo as Eq. (19) e (21) na expressão do trabalho virtual:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (23)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ são arbitrários, as equações de equilíbrio da AIG são dadas por

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (24)$$

Neste trabalho, considera-se que o material tem um comportamento elástico linear:

$$\sigma = \mathbf{C} \epsilon \quad (25)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz constitutiva elástica. No caso de materiais lineares, esta matriz é constante e depende apenas das propriedades do material. Substituindo a relação tensão-deformação a expressão do vetor de forças internas e utilizando a Eq. (15), pode-se escrever:

$$\mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \epsilon dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (26)$$

onde a matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (27)$$

Finalmente, substituindo a relação $\mathbf{g} = \mathbf{K} \mathbf{u}$ na Eq. (24), podemos escrever as equações de equilíbrio como:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (28)$$

A solução da Eq. (28) permite a determinação dos graus de liberdade do problema ($\mathbf{u}$), que correspondem aos deslocamentos dos pontos de controle do modelo. Após o cálculo do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}$, as deformações são calculadas utilizando a Eq. (15) e as tensões são calculadas utilizando a Eq. (25), completando a solução do problema de análise de tensões em sólidos.

É importante notar que sólidos simples podem ser gerados completamente por uma NURBS, mas sólidos complexos podem precisar de várias NURBS diferentes para sua descrição completa. Neste caso, cada NURBS é conhecida como um *patch*, sendo o modelo completo formado por vários *patches*. As equações do item anterior são independentes do número de *patches* e permanecem válidas, desde que a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ e o vetor de cargas externas $\mathbf{f}$ sejam calculados de forma adequada.

Contudo, para manter a compatibilidade do modelo é necessário que o campo de deslocamento seja contínuo entre os *patches*. Isto pode ser obtido de maneira direta com a utilização dos mesmos pontos para descrever a fronteira entre dois *patches*. Assim, os refinamentos do modelo devem ser aplicados de modo que os pontos de controle das fronteiras permaneçam iguais para ambos os *patches*. Métodos alternativos baseados no uso de multiplicadores de Lagrange ou técnicas de penalidade podem ser utilizados. Estes métodos permitem discretizações independentes em cada *patch* ao custo de uma implementação mais complexa.

3.3 Elemento Isogeométrico

De acordo com a Eq. (27), a matriz de rigidez da estrutura é calculada pela integração no volume completo do modelo. Contudo, esta não é uma forma eficiente de realizar a integração. Uma vez que as funções NURBS têm suporte local, apenas $p + 1$ funções são não nulas em um *knot span*, como ilustrado na Figura 1.

Assim, apesar das funções NURBS serem definidas em todo o *patch*, a matriz de rigidez será calculada utilizando a quadratura de Gauss em cada *knot span*, que pode ser entendido como o elemento isogeométrico. A matriz do elemento é então somada à matriz da estrutura de forma idêntica ao que é feito no MEF.

Na integração, o elemento é mapeado do espaço físico para o espaço paramétrico da NURBS, e em seguida mapeado para o espaço paramétrico do elemento, definido no intervalo $[-1, 1]$, como ilustrado na Figura 2. Isto requer que as coordenadas nos pontos de Gauss ($\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\zeta}$) sejam mapeadas para o espaço paramétrico da NURBS (ξ , η , ζ), pela expressão:

$$\xi = \xi_{in} + (\hat{\xi} + 1) \frac{\xi_{fi} - \xi_{in}}{2}; \quad \eta = \eta_{in} + (\hat{\eta} + 1) \frac{\eta_{fi} - \eta_{in}}{2}; \quad \zeta = \zeta_{in} + (\hat{\zeta} + 1) \frac{\zeta_{fi} - \zeta_{in}}{2} \quad (29)$$

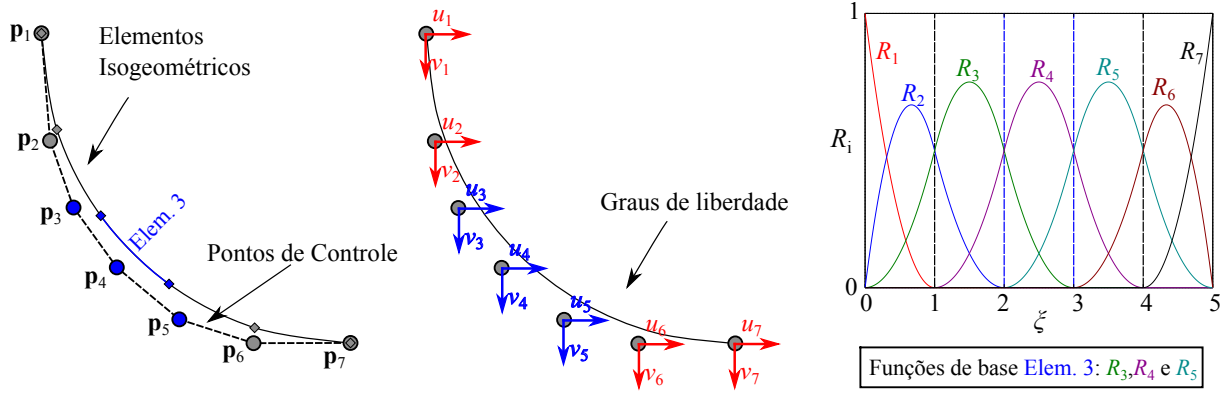


Figura 1: Exemplo de um cabo modelado com Elementos AIG quadráticos, mostrando os graus de liberdade e funções de base locais para o terceiro elemento (cor azul).

onde ξ_{in} , ξ_{fi} , η_{in} , η_{fi} , ζ_{in} e ζ_{fi} são os valores dos *knot span* do elemento nas direções ξ , η e ζ . Com as coordenadas dos pontos de gauss mapeadas, pode-se efetuar o cálculo das funções de base R_i e suas derivadas R'_i do elemento. As derivadas deverão ser mapeadas de volta para o espaço de referência do elemento, sendo necessário o cálculo do Jacobiano da transformação, com termos semelhantes a $\frac{\partial \xi}{\partial \hat{\xi}} = \frac{\xi_{fi} - \xi_{in}}{2}$. Uma maneira de evitar o segundo mapeamento mencionado é utilizando uma estratégia de extração de Bézier, que será mostrada na próxima seção.

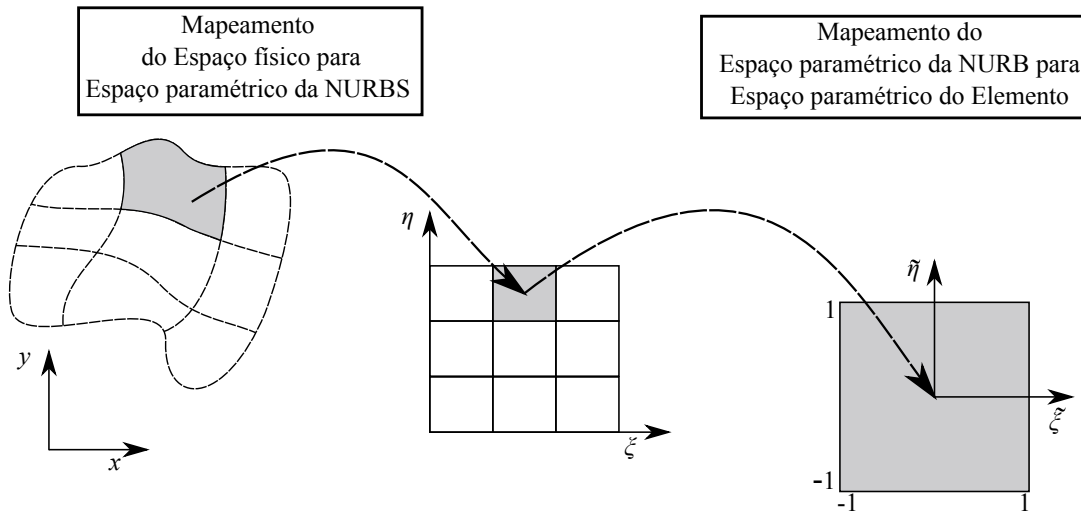


Figura 2: Exemplo de Elemento AIG mostrando seus graus de liberdade e funções de forma.

3.4 Extração Bézier

A Extração Bézier consiste em reduzir a continuidade da NURBS nos pontos (ξ, η, ζ) correspondentes do vetor de *knots* até que estes possuam multiplicidade p , fazendo com que a continuidade nas fronteiras dos espaços paramétricos sejam C^0 , de maneira que cada segmento possa ser representado por uma representação de Bézier de dimensão equivalente. A operação de *Inserção de Knot* é utilizada adicionando *knots* já existentes, envolvendo o cálculo de novos

pontos de controle. Em vez de utilizar os novos pontos de controle como a nova geometria do modelo, pode-se apenas utilizar a operação para facilitar o cálculo das funções base B-Spline $N_{i,p}$ (Borden et al., 2011).

Uma vez que a geometria da NURBS permanece constante durante a aplicação da operação de *Inserção de Knot*, os novos pontos de controle $\bar{\mathbf{p}}$ do elemento AIG podem ser definidos pelo produto de uma matriz de extração do elemento $\mathbf{C}^e$ pelo vetor de pontos de controle antigos $\mathbf{p}$:

$$\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{p} \quad (30)$$

Pode-se mostrar que as funções de base B-Spline $N_{i,p}(\xi)$ e suas derivadas podem ser calculadas por uma combinação linear das funções de base Bernstein, como mostra a expressão:

$$N_{i,p}(\xi) = \sum_{j=1}^{p+1} c_{i,j} B_{i,p}(\xi); \quad N'_{i,p}(\xi) = \sum_{j=1}^{p+1} c'_{i,j} B'_{i,p}(\xi) \quad (31)$$

onde $c_{i,j}$ são os coeficientes da matriz de extração $\mathbf{C}^e$, $B_{i,p}(\xi)$ e $B'_{i,p}(\xi)$ são as funções de base Bernstein e suas derivadas. As funções de base Bernstein são utilizadas na formulação das Curvas de Bézier. As bases Bernstein podem ser definidas ao longo do intervalo paramétrico $[-1, 1]$ pela fórmula recursiva (Nguyen, 2006):

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)B_{i,p-1}(\xi) + \frac{1}{2}(1 + \xi)B_{i-1,p-1}(\xi) \quad (32)$$

$$B_{i,p}(\xi) = 0 \quad \text{para} \quad i < 1 \quad \text{e} \quad i > p + 1, \quad B_{1,0}(\xi) = 1$$

A primeira derivada da base Bernstein pode ser calculado por:

$$\frac{d}{d\xi} B_{i,p} = \frac{p}{2}(B_{i-1,p-1}(\xi) - B_{i,p-1}(\xi)) \quad (33)$$

A matriz de extração do elemento $\mathbf{C}^e$ pode ser calculada apenas com o valor dos vetores de *knot* em cada direção univariante (Borden et al., 2011). Utilizando a Extração Bézier, não é necessário realizar o mapeamento dos pontos de Gauss do espaço de referência do elemento para o espaço paramétrico da NURBS. Todo o procedimento de mapeamento fica encapsulado na matriz de extração do elemento $\mathbf{C}^e$. A utilização da Extração Bézier permite que a implementação da AIG se torne ainda mais parecida com a implementação do MEF, facilitando a reutilização do código. Uma vez definindo as incidências do elemento e pré-calculando as matrizes de extração de cada elemento $\mathbf{C}^e$, a única modificação necessária reside em uma rotina de cálculo das funções de forma e suas derivadas.

4 ANÁLISE DE SÓLIDOS LAMINADOS

Estruturas laminadas são composta por um conjunto de camadas (ou lâminas) empilhadas em uma sequência determinada e unidas de forma a trabalharem em conjunto. No caso de estruturas de alto desempenho, são utilizadas lâminas de material compósito reforçados por fibras unidirecionais. O esquema de laminação é definido pelo material, espessura e orientação das fibras de cada lâmina. Este esquema é escolhido de forma a maximizar o desempenho do laminado em relação às cargas atuantes.

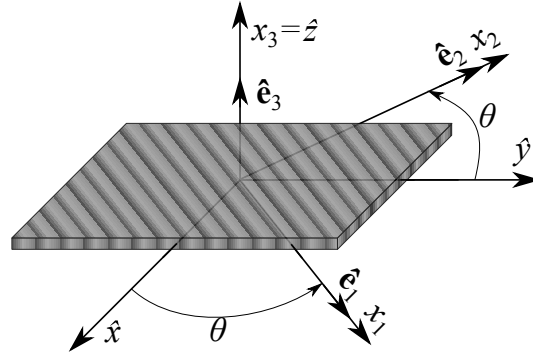


Figura 3: Sistemas de coordenadas global (laminado) e local, assim como seus vetores unitários.

Devido à presença das fibras unidirecionais, o compósito apresenta um comportamento ortotrópico no sistema de coordenadas do material (x_1, x_2, x_3) , onde x_1 é a direção das fibras, x_2 é a direção perpendicular às fibras no plano da lâmina e x_3 é a direção perpendicular à lâmina, como mostrado na Figura 3.

O comportamento mecânico de materiais compósitos antes da falha pode ser representado de forma adequada utilizando a Lei de Hooke generalizada:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = Q \epsilon_1 \quad (34)$$

Os coeficientes da matriz constitutiva da lâmina no sistema local (Q) são definidos a partir das propriedades mecânicas do compósito:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Lambda}; & Q_{12} &= E_1 \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{32}}{\Lambda}; & Q_{13} &= E_3 \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Lambda} \\ Q_{22} &= E_2 \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Lambda}; & Q_{23} &= E_2 \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Lambda}; & Q_{33} &= E_3 \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Lambda} \\ Q_{66} &= G_{12}; & Q_{44} &= G_{13}; & Q_{66} &= G_{23} \\ \Lambda &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{aligned} \quad (35)$$

onde E_1 , E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade nas direções principais, ν_{12} , ν_{21} , ν_{13} , ν_{31} , ν_{23} e ν_{32} são os coeficientes de Poisson e G_{12} , G_{13} e G_{23} são os módulos de elasticidade ao cisalhamento. É importante notar que materiais elásticos ortotrópicos possuem apenas nove constantes independentes, pois os coeficientes de Poisson (ν_{ij}) devem satisfazer à relação:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j) \quad (36)$$

uma vez que a matriz Q é simétrica.

É importante notar que as relações cinemáticas e as equações de equilíbrio são escritas no sistema cartesiano global (x, y, z) , enquanto que as relações constitutivas são definidas no sistema local (x_1, y_1, z_1) . Assim, é necessário transformar as tensões e deformações entre os 2 sistemas. A transformação das deformações pode ser escrita na forma matricial (Cook et al., 2002) como:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & n_1 l_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & n_2 l_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & n_3 l_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (37)$$

onde l, m e n são os cossenos diretores dos eixos principais em relação ao sistema global:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x, x_1); \quad m_1 = \cos(y, x_1); \quad n_1 = \cos(z, x_1) \\ l_2 &= \cos(x, x_2); \quad m_2 = \cos(y, x_2); \quad n_2 = \cos(z, x_2) \\ l_3 &= \cos(x, x_3); \quad m_3 = \cos(y, x_3); \quad n_3 = \cos(z, x_3) \end{aligned} \quad (38)$$

A transformação global-local pode ser escrita na forma compacta:

$$\epsilon_1 = \mathbf{T} \epsilon \quad (39)$$

onde $\mathbf{T}$ é a matriz de transformação definida na Eq. (37) e ϵ é o vetor de deformações no sistema global. Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, pode-se mostrar (Cook et al., 2002) que:

$$\sigma = \mathbf{T}^T \sigma_1 \quad (40)$$

Finalmente, a relação constitutiva no sistema global do laminado pode então ser encontrada utilizando as Equações (39) e (40):

$$\sigma = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \epsilon \Rightarrow \sigma = \mathbf{C} \epsilon \quad (41)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz constitutiva no sistema global.

Além do sistema local (ou da lâmina), a Figura 3 mostra o sistema de coordenadas do laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. É importante notar que o sistema do laminado e o sistema das lâminas (material) têm o mesmo vetor normal ao plano. Finalmente, o ângulo θ define a orientação das fibras de cada lâmina, permitindo relacionar os dois sistemas.

Em elementos de placa e casca baseados na Teoria de Camada Equivalente, a matriz constitutiva de cada camada, referente aos eixos $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, é integrada através da espessura do laminado para que sua matriz constitutiva seja calculada. Esta abordagem não é utilizada para os elementos sólidos apresentados neste trabalho. Ao invés disso, a matriz constitutiva de cada

lâmina é transformada para o sistema global utilizando a Equação (41) e utilizada diretamente na integração da matriz de rigidez do elemento.

Portanto, neste trabalho, os eixos do laminado são utilizados somente para a definição das direções das lâminas. Um vetor unitário $\hat{a}$ é utilizado para definir a direção do vetor $\hat{x}$ do laminado em relação ao sistema global. Por exemplo, no caso de uma casca cilíndrica $\hat{a}$ corresponde a um vetor unitário na direção axial do cilindro.

O vetor unitário $\hat{e}_3$ é dirigido ao longo da espessura do laminado. Assim, este vetor é calculado a partir da derivada da geometria do sólido ($\mathbf{x}$) em relação à coordenada paramétrica ζ :

$$\hat{e}_3 = \frac{\mathbf{x}_{,\zeta}}{|\mathbf{x}_{,\zeta}|}, \quad \mathbf{x}_{,\zeta} = \sum_{a=1}^{np} R_{a,\zeta} \mathbf{x}_a \quad (42)$$

Em seguida, o vetor unitário $\hat{e}_1$ que define o eixo x_1 é calculado através da rotação do vetor $\hat{a}$ de um ângulo θ em relação ao eixo $\hat{e}_3$:

$$\hat{e}_1 = \mathbf{R} \hat{a} \quad (43)$$

onde a matriz de rotação $\mathbf{R}$ é obtida utilizando a fórmula de Rodriguez (Monteiro, 2004):

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin(\theta) \cdot \mathbf{S} + (1 - \cos(\theta)) \cdot \mathbf{S}^2 \quad (44)$$

Nesta equação, $\mathbf{S}$ é uma matriz antissimétrica dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_3 \\ n_3 & 0 & -l_3 \\ -m_3 & l_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

onde l_3, m_3, n_3 são os cossenos diretores do vetor $\hat{e}_3$. Finalmente, o vetor $\hat{e}_2$ é calculado através do produto vetorial dos vetores anteriores:

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \quad (46)$$

Como a tríade $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ é composta por vetores unitários ortogonais, suas componentes no sistema global são os cossenos diretores utilizados na Eq. (37) para montar a matriz de transformação $\mathbf{T}$. É importante notar que como a geometria do modelo pode ser curva, o sistema de coordenadas local definido por estes três vetores pode variar ponto a ponto. Uma vantagem da formulação isogeométrica sobre o MEF é que nesta formulação os vetores que definem o sistema local, e portanto a matriz de transformação, são exatos, uma vez que a geometria do sólido é modelada de forma exata.

4.1 Integração

A principal diferença nas equações desenvolvidas anteriormente, entre elementos laminados e convencionais, é que a matriz constitutiva $\mathbf{C}$ muda em cada lâmina. Por isso as tensões e a matriz constitutiva são descontínuas na espessura, apesar dos deslocamentos e deformações

serem contínuos no elemento. Por este motivo, as integrações numéricas devem levar em consideração esta descontinuidade da matriz constitutiva.

A integração do vetor de forças internas e da matriz de rigidez do elemento devem ser realizadas ao longo de cada camada. O procedimento para a matriz de rigidez pode ser definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int_{-1}^{\zeta_1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta + \dots \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_k \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \\ &\dots + \int_{\zeta_m}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (47)$$

onde m é o numero de lâminas do compósito e ζ_k é a coordenada paramétrica da face inferior da k -ésima lâmina. A integração numérica de cada lâmina é realizada por quadratura de Gauss, considerando que o intervalo de integração na direção ζ é igual a $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$. Uma forma de realizar a integração entre lâminas dentro do intervalo padrão $[-1, 1]$ é mapear os valores do intervalo paramétrico $\tilde{\zeta} \in [-1, 1]$ para $\zeta \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ por:

$$\zeta = \frac{\zeta_{k+1} + \zeta_k}{2} + \frac{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}{2} \tilde{\zeta} \quad (48)$$

Derivando-se esta expressão, verifica-se que o incremento $d\zeta$ para a k -ésima lâmina é dado por:

$$d\zeta = \frac{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}{2} d\tilde{\zeta} \quad (49)$$

Com isto, a matriz de rigidez pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{k=1}^m \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_k \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_k \mathbf{B} |\mathbf{J}| \frac{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}{2} d\xi d\eta d\tilde{\zeta} \end{aligned} \quad (50)$$

Utilizando a quadratura de Gauss:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{npg} (\mathbf{B}^T \mathbf{C}_k \mathbf{B} |\mathbf{J}|)_i \frac{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}{2} W_i \quad (51)$$

onde npg é o número de pontos de integração e W_i são os pesos de Gauss.

O número de pontos de integração considerados em cada lâmina é o mesmo utilizado no elemento sólido isotrópico. No caso de um elemento definido por uma NURBS tri-cúbica com 3 lâminas, utiliza-se para integração completa 64 ($4 \times 4 \times 4$) pontos de integração por lâminas, resultando em 192 pontos de integração por elemento laminado.

É importante notar que a utilização de uma quadratura de Gauss completa em cada *knot span* não é uma escolha otimizada. Devido à elevada continuidade da NURBS entre os *knot spans*, pode-se realizar a integração utilizando um número menor de pontos de integração (Hughes et al., 2010). Entretanto, neste trabalho foi utilizado uma quadratura de Gauss completa pra cada elemento isogeométrico.

4.2 Implementação Computacional

A formulação isogeométrica foi implementada no software acadêmico de Elementos Finitos FAST, desenvolvido em linguagem de programação C++ e utilizando o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). É importante ressaltar que toda a implementação relativa ao elemento de sólido laminado foi realizada em um trabalho anterior por Dantas Dantas Junior (2014), sendo reutilizada neste trabalho.

A utilização da Extração de Bézier facilitou a implementação da AIG no FAST, permitindo utilizar a estrutura básica do programa e limitando as novas implementações à criação de classes para gerenciamento dos *patches*, rotinas para o cálculo das novas funções de forma (utilizando Extração de Bézier) e pequenas adaptações na integração numérica.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Esta seção mostra dois exemplos de análise estrutural de casca, modelados com elementos isogeométricos sólidos. Variações dos problemas considerando material isotrópico e laminado foram exploradas.

5.1 Casca cilíndrica com carga concentrada no centro

Este exemplo trata de uma casca cilíndrica restrita nos extremos por um diafragma rígido e submetida a forças pontuais iguais e opostas localizadas no centro do cilindro, como apresentado na Figura 4. Este problema teste faz parte do conhecido *Shell Obstacle Course*, que consiste em um conjunto de problemas teste de grande relevância em análise de cascas. O mesmo problema foi solucionado utilizando AIG com elementos sólidos por Hughes et al. (2005).

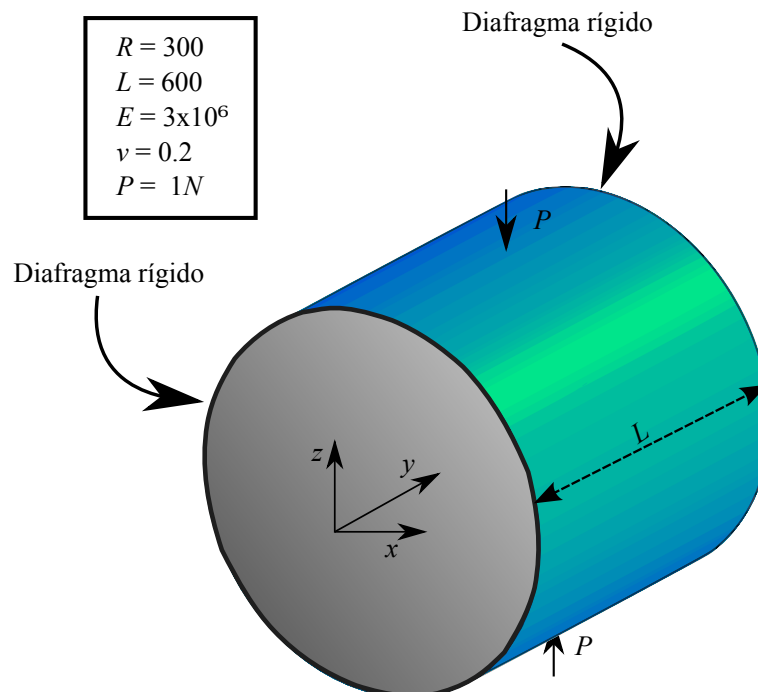


Figura 4: Descrição do Exemplo 5.1.

A solução numérica considerou a simetria do problema, de forma que apenas um oitavo do cilindro foi modelado. As malhas utilizadas seguem um mesmo padrão, dobrando o número de elementos ao longo da direção do comprimento e da circunferência do modelo, como ilustrado na Figura 5. Um único elemento é utilizado ao longo da espessura.

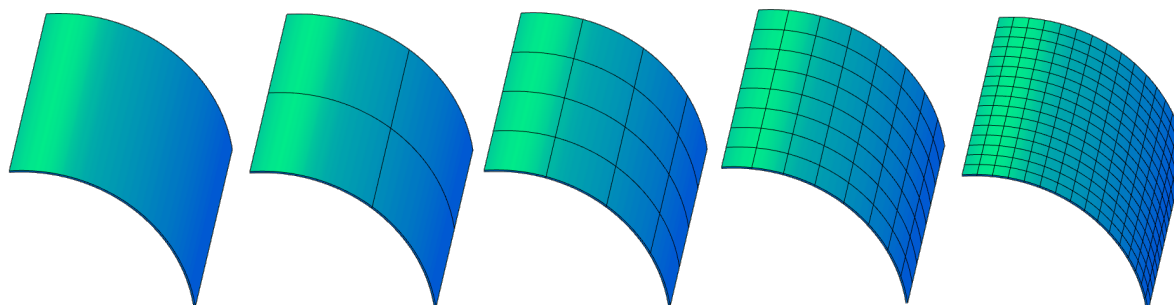


Figura 5: Malhas 1-5 utilizadas no Exemplo 5.1.

Os modelos analisados consideraram NURBS de diferentes graus. O grau quadrático é considerado inicialmente, sendo aumentado o grau das NURBS simultaneamente em todas as direções, exceto na direção da espessura, onde o grau quadrático é mantido. Após a elevação de grau, são inseridos novos *knots* para obtenção das malhas abordadas. Este procedimento de discretização realizado após a elevação do grau é conhecido na literatura como refinamento-*k*; Neste, a continuidade entre os elementos isogeométricos no interior do *patch* é elevada. Tal efeito não existe nos refinamentos tradicionais utilizados no MEF.

O deslocamento w_p no ponto de aplicação de carga é avaliado para diferentes números de pontos de controle por lado da superfície. A Figura 6 mostra os resultados obtidos no presente trabalho comparando com os resultados de Hughes et al. (2005). Os pontos de cada curva representam cada malha utilizada.

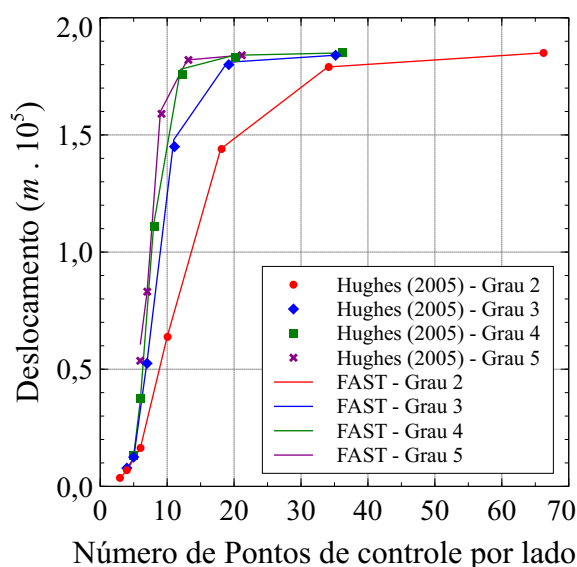


Figura 6: Convergência de w_p considerando NURBS de vários graus.

Os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os resultados de Hughes et al. (2005). O número de pontos de controle por lado necessário para a convergência do problema diminuiu à medida que são utilizados elementos de grau mais elevado. A deformada da estrutura está apresentada na Figura 7.

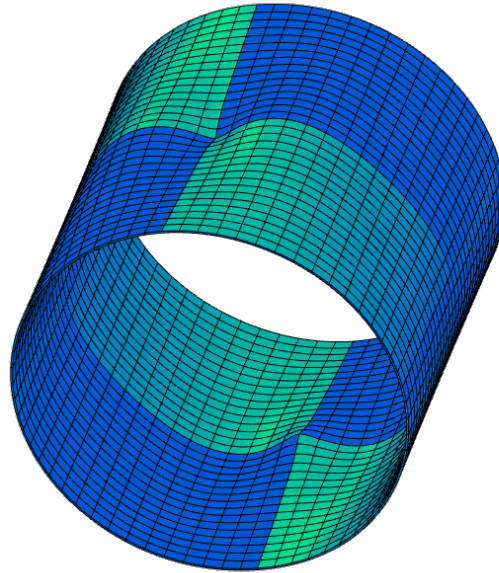


Figura 7: Deformada com fator de escala = $2e6$.

Um exemplo de mesma geometria foi solucionado por Reddy (2004) considerando material compósito laminado, utilizando elementos finitos de casca. As propriedades do material estão apresentadas na Tabela 1. Quatro casos de laminados antissimétricos são considerados: cross-ply com duas $[0/90]$ e 10 lâminas $[0/90]_5$ e angle-ply com duas $[-45/45]$ e 10 lâminas $[-45/45]_5$.

Tabela 1: Propriedades do Material laminado.

E_1	$E_2 = E_3$	$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{23}$	$G_{12} = G_{21}$	G_{23}
3×10^6	$1,2 \times 10^6$	0,25	6×10^4	$2,4 \times 10^4$

O problema foi modelado utilizando o Elemento Isogeométrico Laminado descrito no Item 4, considerando o cilindro completo (sem simetria) e utilizando uma malha equivalente à Malha 5 e Malha 6 deste exemplo com grau cúbico. Também foi realizado a análise do exemplo utilizando o software comercial ABAQUS, considerando elementos de casca SR8. Os resultados do deslocamento w_p estão apresentados na Tabela 2 e Tabela 3. Os resultados obtidos neste trabalho estão em concordância com os apresentados por Reddy (2004).

Tabela 2: Resultados do Exemplo 5.1 considerando pares de lâminas [0/90].

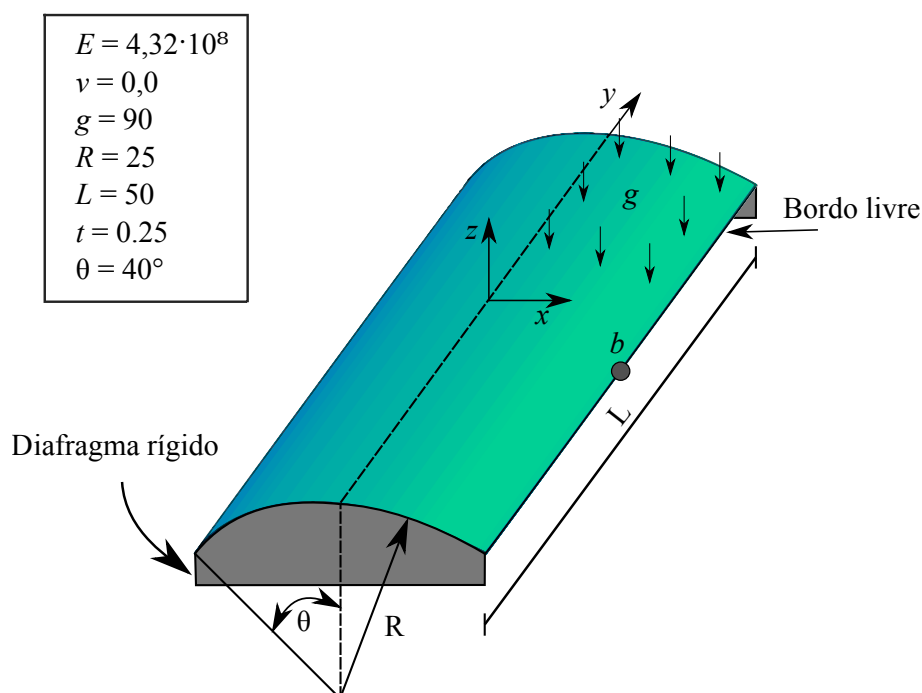
Núm. Lâminas	Reddy	ABAQUS	Difer(%)	FAST M5	Difer (%)	FAST M6	Difer(%)
2	1,3833e-4	1,3721e-4	-0,82	1,3695e-4	-1,01	1,3901e-4	0,49
10	8,2278e-5	8,2767e-5	0,59	8,1690e-5	-0,72	8,2313e-5	0,04

Tabela 3: Resultados do Exemplo 5.1 considerando pares de lâminas [-45/45].

Núm. Lâminas	Reddy	ABAQUS	Difer(%)	FAST M5	Difer (%)	FAST M6	Difer(%)
2	1,4517e-4	1,4483e-4	-0,23	1,4213e-4	-2,14	1,4419e-4	-0,68
10	8,1922e-5	8,2284e-5	0,44	8,0543e-5	-1,71	8,1580e-5	-0,42

5.2 Casca cilíndrica com carga Distribuída (Scoordelis-Lo)

O segundo exemplo deste trabalho consiste em uma casca cilíndrica curva restrita nas extremidades por um diafragma rígido e submetida a uma carga vertical, como mostra a Figura 8. Este problema teste conhecido como *Scoordelis-Lo roof* também faz parte do *Shell Obstacle Course*. O problema também foi resolvido por Hughes et al. (2005) através da AIG com elementos sólidos.

**Figura 8: Descrição do Exemplo 5.2.**

A simetria do problema foi considerada na análise, de modo que apenas 1 quarto da casca foi modelada. A mesma estratégia de discretização das malhas descrita no Exemplo 5.1 foi utilizada. Os modelos analisados consideraram elementos com diferentes graus de NURBS.

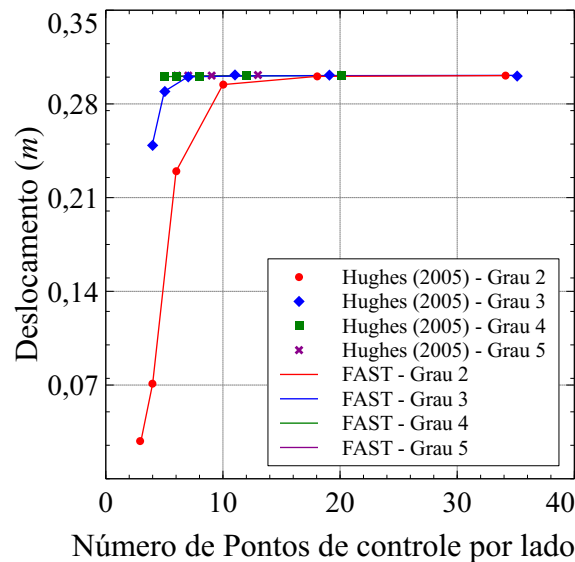


Figura 9: Convergência de w_b considerando NURBS de vários graus.

Os deslocamentos do ponto b (w_b) obtidos neste trabalho e por Hughes et al. (2005) estão apresentados na Figura 9. Pode-se observar uma rápida convergência da resposta e uma excelente concordância entre os resultados obtidos em comparação com Hughes et al. (2005). Pode-se observar também que a velocidade de convergência das respostas foi maior neste exemplo, em comparação como o exemplo anterior. Isto se deve pela acentuada descontinuidade ocasionada pela aplicação da carga concentrada, o que não ocorre neste exemplo por se tratar de carregamento distribuído. A deformada obtida nas análises está ilustrada a Figura 10.

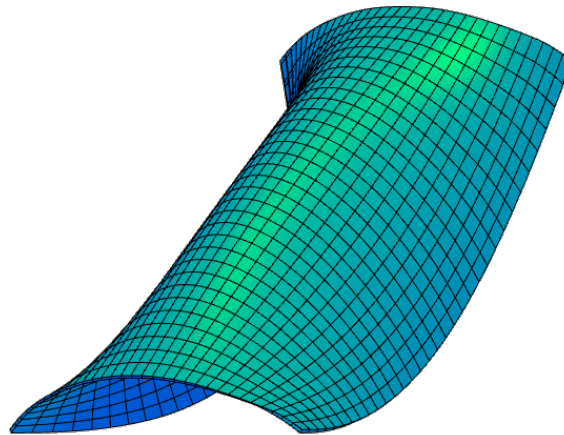


Figura 10: Deformada do exemplo Scoordelis-Lo, com fator de escala = 40.

Um exemplo similar foi analisado por Reddy (2004) considerando material compósito. A geometria do exemplo é multiplicada por 12, resultando em $R = 300$, $L = 600$ e $t = 3$ e a carga $q = 0,625$. As propriedades do material compósito são as mesmas utilizadas no Exemplo 5.1. O problema foi modelado sem a consideração de simetria, com grau quártico e utilizando malhas equivalentes às malhas 4 e 5 deste exemplo. Também foi realizada uma análise com o programa ABAQUS, considerando elementos de casca SR8. As Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados obtidos.

Tabela 4: Resultados do Exemplo 5.2 considerando pares de lâminas [0/90].

Núm. Lâminas	Reddy	ABAQUS	Difer(%)	FAST M1	Difer (%)	FAST M2	Difer(%)
2	19,4944	19,8390	1,74	19,4747	-0,10	19,4884	-0,03
10	11,7981	11,8380	0,34	11,7892	-0,08	11,7903	-0,07

Tabela 5: Resultados do Exemplo 5.2 considerando pares de lâminas [-45/45].

Núm. Lâminas	Reddy	ABAQUS	Difer(%)	FAST M4	Difer (%)	FAST M5	Difer(%)
2	29,9744	28,3920	-5,57	29,4785	-1,68	29,6382	-1,13
10	15,1519	14,9380	-1,43	14,7944	-2,42	14,8430	-2,08

Pode-se observa uma boa concordância das respostas para o caso do laminado cross-Ply. No caso do angle-ply foram obtidas diferenças percentuais da ordem de 2%. Acredita-se que este erro esteja relacionado com o cisalhamento, uma vez que este é considerado de forma aproximada em elementos de cascas.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho mostrou a formulação e aplicação da Análise Isogeométrica utilizando elementos sólidos em problemas de cascas isotrópicas e de material compósito laminado. A utilização da AIG possibilitou um fácil refinamento das malhas dos exemplos, uma vez que estes são representados por NURBS. As respostas obtidas nos exemplos mostram a qualidade dos campos de deslocamentos obtidos através deste método de análise estrutural, tanto para problemas isotrópicos quanto para problemas laminados.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem o suporte financeiro dado pela CAPES e CNPq.

REFERENCES

- Borden, M. J., Scott, M. A., Evans, J. A., & Hughes, T. J. R. 2011. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87:15–47.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. 2002. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, 4nd edition.
- Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y. 2009. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons Ltd.
- Dantas Junior, E. M. 2014. Análise não linear de compósitos laminados utilizando método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará.

- Espath, L., Braun, A., Awruch, A., & Maghous, S. 2014. Nurbs-based three-dimensional analysis of geometrically nonlinear elastic structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 47:373 – 390.
- Hughes, T., Cottrell, J., & Bazilevs, Y. 2005. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194:4135 – 4195.
- Hughes, T., Reali, A., & Sangalli, G. 2010. Efficient quadrature for nurbs-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199:301 – 313. Computational Geometry and Analysis.
- Kapoor, H. & Kapania, R. 2012. Geometrically nonlinear {NURBS} isogeometric finite element analysis of laminated composite plates. *Composite Structures* 94:3434 – 3447.
- Monteiro, F. A. C. 2004. Uma formulação co-rotacional geral: Aplicação a pórticos espaciais. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Nguyen, T. N. 2006. Isogeometric finite element analysis based on bézier extraction of nurbs and t-splines. Computational mechanics, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega.
- Piegl, L. & Tiller, W. 1997. The NURBS Book (Monographs in Visual Communication). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition.
- Reddy, J. N. 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press, 2nd edition.