



FORMULAÇÃO PARA PRÉ-PROCESSAMENTO DE ESPÉCIMES DE MATERIAL COMPÓSITO PARA ORIENTAÇÃO DE INCLUSÃO DE FIBRA PARA O MEC 3D

Souza, VandeybergNogueira

Vandeyberg.souza@gmail.com

Barbirato, João Carlos Cordeiro

jccb@lccv.ufal.br

Centro de Tecnologia/Universidade Federal de Alagoas

Campus A.C. Simões – Av. Lourival de Melo Mota, S/N, 57072-900, Cidade Universitária, Maceió, Alagoas

Resumo. O presente trabalho apresenta uma formulação para adequar o posicionamento geométrico de uma fibra dentro de um meio, denominado matriz. Trata-se de pré-processamento para a utilização em um programa formulado pelo Método dos Elementos de Contorno no domínio tridimensional – MEC 3D. A utilização destes procedimentos proporciona a análise de material compósito com inclusão de fibras, no contexto, retas e curtas. A formulação permite a definição de uma fibra e como proceder para a sua rotação no campo tridimensional. Gerada uma malha tridimensional de elementos triangulares, por exemplo, o procedimento escrito em linguagem C define uma fibra e a rotaciona, preparando o modelo para ser processado. Isso traz à análise versatilidade para os casos a serem analisados. Exemplos são apresentados para demonstrar a adequação da formulação e do código propostos. Ressalte-se que os resultados receberam tratamento simples para serem apresentados em gráficos com variação de cores, facilitando a análise comportamental dos casos processados.

Keywords: Definição da Geometria de Inclusões, Análise 3D de Compósitos, Método dos Elementos de Contorno

1 INTRODUÇÃO

Os avanços tecnológicos e as inovações em engenharia somente se tornaram viáveis após o advento dos compósitos estruturais. A característica básica dos compósitos é combinar, no contexto macroscópico, pelo menos duas fases distintas, denominadas matriz e reforço (Savage, 1993). Os reforços nos materiais compósitos podem se constituir de fibras ou partículas. Segundo modelagem proposta por Aveston, Cupper e Kelly (1971) um compósito ideal possui fibras contínuas e alinhadas à direção do esforço principal. Entretanto, em condições práticas as fibras normalmente estão distribuídas aleatoriamente na matriz (Figueiredo 2000). Desta forma, para realizar a análise de um compósito, com condições mais próximas às da realidade, faz-se necessário desenvolver formulações que levem em consideração a aleatoriedade nas orientações das inclusões utilizadas como reforço.

O problema da orientação da inclusão no desempenho do material compósito pode ser estudado, de forma simplificada, através de uma análise elástico-linear de um Elemento de Volume Representativo (EVR) com uma inclusão. O EVR pode ser definido como o menor volume que, estatisticamente, representa o comportamento efetivo do material (Santos Júnior 2008). Esta análise pode ser feita de forma experimental ou através de modelagem computacional. Particularizando para a análise numérica, a representação matemática do fenômeno físico assume a forma de equação diferencial. As soluções dessas equações podem ser obtidas utilizando-se métodos de soluções de domínio como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e de soluções de contorno como o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Dória 2005). O MEC é um método numérico que permite análise de corpos a partir da discretização de seu contorno, acrescentando-se pontos internos de investigação, trabalhando com multiregiões e acoplamento a outros métodos. Utiliza, como ponderador, as chamadas soluções fundamentais que trazem ao método maior exatidão às expressões que definem o problema.

Para permitir variações na orientação da inclusão dentro do EVR na formulação desenvolvida, faz-se necessário considerar a não comutatividade da operação de rotação. Para tal, parametrizam-se as rotações do corpo rígido no espaço tridimensional utilizando técnicas adequadas, como os ângulos de Euler. Leonard Euler, matemático do século XVIII, mostrou que qualquer rotação 3D pode ser dividida por três rotações ao redor dos eixos do sistema de coordenadas. Assim, é possível realizar qualquer mudança de orientação de um corpo rígido através de três rotações elementares intermediárias que definem uma matriz de rotação R .

2 FORMULAÇÃO DO MEC

2.1 Formulação do MEC para problemas elásticos lineares 3D.

Para caracterizar o objeto de estudo e sua análise via método numérico, considere-se um sólido elástico-linear tridimensional, homogêneo e isotrópico, definido pelo domínio Ω de contorno Γ . A equação de Navier-Cauchy define o problema elástico em termos de deslocamentos, ou seja:

$$u_{i,jj}(\chi) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ij}(\chi) + \frac{1}{G} \cdot b_i(\chi) = 0. \quad (1)$$

2.1.1 Solução Fundamental de Kelvin:

Para que as formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) fiquem completamente definidas, torna-se necessário o conhecimento prévio da solução de um problema padrão da área que se deseja analisar, denominado Problema Fundamental e é indicado com um asterisco. Para a definição do problema fundamental, considere-se Ω^* um domínio infinito cujo contorno é denotado por Γ^* . O sólido que se deseja analisar, de domínio Ω e contorno Γ , está contido em Ω^* . Na formulação brevemente apresentada a seguir, utiliza-se a solução fundamental de Kelvin para o tridimensional.

As expressões de deslocamentos e forças de superfície para o problema de Kelvin são, respectivamente:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}]; \quad (2)$$

$$p_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{[(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}]r_{,n} - (1 - 2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)\}; \quad (3)$$

onde,

$$r = \sqrt{r_i \cdot r_i} = |s - q|; \quad (4)$$

$$r_i = X_i(q) - X_i(s); \quad (5)$$

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r}. \quad (6)$$

A equação integral que rege o problema é:

$$\begin{aligned} c_{ij}(S)u_j(S) = & - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \cdot u_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) \\ & + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \cdot p_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) \cdot b_j(q) \cdot d\Omega(q), \end{aligned} \quad (7)$$

onde, $c_{ij}(S) = 0$, para pontos externos ao domínio Ω ; $c_{ij}(S) = \mathbf{I}$, para pontos internos ao domínio Ω e $c_{ij}(S) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$, para pontos de um contorno sem angulosidades; $\mathbf{I}$ é a matriz identidade (de ordem 3x3, para cada ponto de colocação).

Aproximando o contorno do sólido em J elementos, com N pontos nodais, e o seu domínio em M células, a representação integral para deslocamentos, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 c(S)u(S) = & - \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^*(S, Q) \boldsymbol{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{U}^n \\
 & + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^*(S, Q) \boldsymbol{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{P}^n \\
 & + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \mathbf{u}^*(S, q) \boldsymbol{\phi}_c^T(q) d\Omega(q) \right] \mathbf{B}^n
 \end{aligned} \quad (8)$$

Resultando no seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{D}\mathbf{B}. \quad (9)$$

3 FORMULAÇÃO PARA POSICIONAMENTO GEOMÉTRICO DE UMA INCLUSÃO DENTRO DE UM ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO – EVR

Considere-se a inclusão como um corpo paralelepípedo, de altura L e lados b , com o seu centro posicionado na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Para o desenvolvimento de uma formulação que adeque sua orientação dentro da matriz faz-se sua representação por um vetor, $\vec{V}$, de mesmo comprimento L , posicionado no centro da inclusão e com a mesma orientação, conforme ilustrado na Fig. 1.

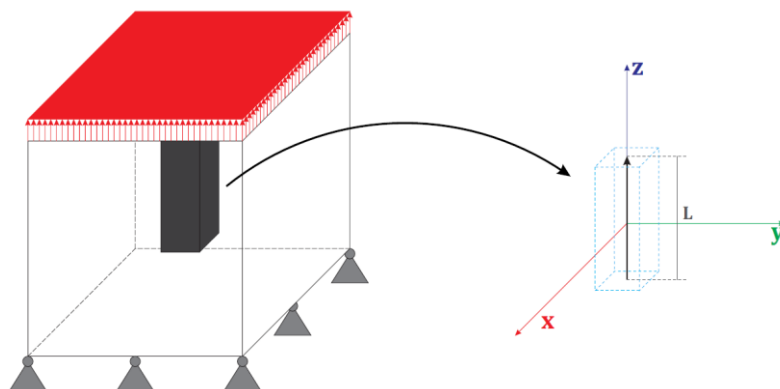


Figura 1 - EVR e posicionamento da inclusão no sistema de coordenadas

A orientação da inclusão, em relação ao sistema de coordenadas cartesianas, é definida através dos ângulos de Euler (ϕ , θ e ψ). Para tal, fixa-se o sistema cartesiano no espaço e define-se um sistema de coordenadas auxiliar, S^* , que gira junto ao corpo e possui sua origem coincidente com a origem do sistema inercial. Desta forma, qualquer orientação do corpo, em relação ao sistema inercial, pode ser obtida através de uma matriz de rotação $R(\phi, \theta \text{ e } \psi)$, definida pela superposição de três rotações intermediárias, conforme ilustrado na Fig. 2.

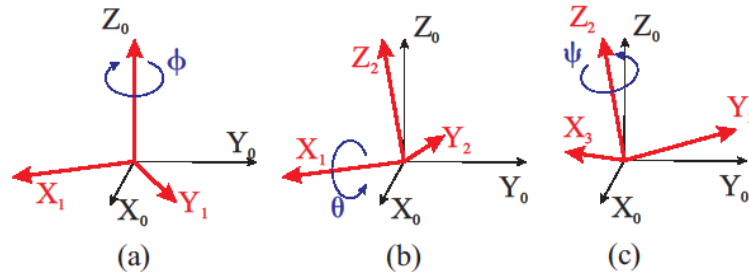


Figura 2 – Etapas intermediárias para rotação de um corpo rígido através dos ângulos de Euler

A primeira rotação intermediária consiste de uma rotação (ϕ) de S^* em torno do eixo Z . A transformação de coordenadas para essa primeira rotação é descrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = R_\phi \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = R_\phi \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

onde,

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

A segunda rotação intermediária consiste de uma rotação dos eixos X_1 , Y_1 e Z_1 em torno do eixo X_1 , de um ângulo θ . As novas coordenadas, depois dessa segunda rotação de Euler são dadas por:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = R_\theta \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

onde,

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Finalmente, a terceira rotação intermediária consiste de uma rotação dos eixos X_2 , Y_2 e Z_2 em torno do eixo Z_2 , de um ângulo ψ . As novas coordenadas, denotadas X_3 , Y_3 e Z_3 , são:

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = R_\psi \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde,

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Realizando o produto matricial das matrizes intermediárias, $R_\psi \cdot R_\theta \cdot R_\phi$, tem-se:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

Chega-se, então, à seguinte equação matricial que define a orientação da inclusão dentro do EVR:

$$Y = R \cdot X, \quad (17)$$

onde, $Y(x_1, x_2, x_3)^T$ é o vetor posição ligado ao corpo rígido, $X(x, x, x)^T$ é o vetor posição no sistema inercial e R é a matriz de rotação que descreve a orientação relativa dos sistemas.

4 APLICAÇÃO

O caso a ser processado é um Elemento de Volume Representativo (EVR) de um material compósito de matriz cúbica com arestas de 1,5 unidades de comprimento e inclusão prismática com altura de 1 unidade de comprimento e seção transversal quadrangular com lados de 0,1 unidade de comprimento. A matriz é solicitada por um carregamento estático unitário de tração na direção do eixo Z do sistema de coordenadas cartesiano e apoiada na base, conforme mostrado na Fig. 3a, para evitar o deslocamento axial nestes pontos. Além dos parâmetros geométricos definidos nesta figura, são considerados: $E = 26$; $\nu = 0,21$ para matriz, e $E = 207$; $\nu = 0,3$ para inclusão (unidades compatíveis).

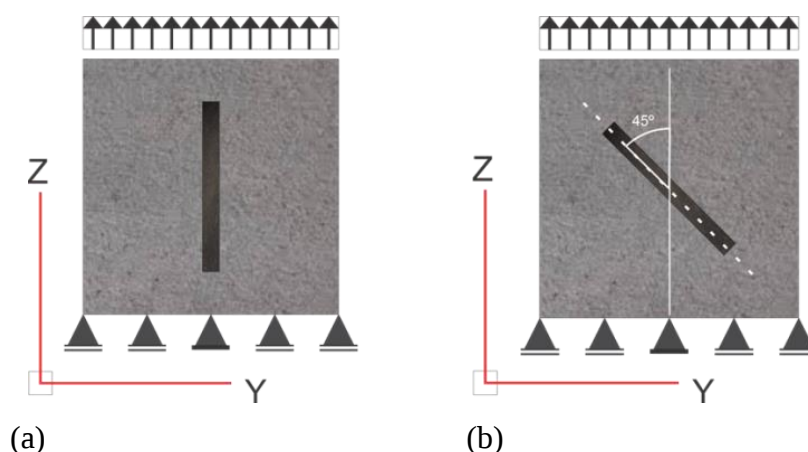


Figura 3 – Representação de uma seção reta do EVR com as condições de contorno e a inclusão direcionada ao longo do eixo de aplicação da carga (a) e rotacionada de 45° (b).

Para realizar as discretizações do EVR, utilizou-se uma plataforma genérica de pré e pós-processamento 3D para simulação numérica, neste caso, o *software* SALOME (Open Cascade, 2005). Com o mesmo, tanto a matriz quanto a inclusão foram discretizadas utilizando elementos triangulares contínuos, com aproximação linear. A matriz foi discretizada com 432 elementos triangulares e a fibra com 72. Na discretização da matriz suas arestas foram divididas em 5 segmentos, já na fibra foram utilizadas na discretização

elementos triangulares com valores de 0,1 nas arestas, com a finalidade de padronizar o tamanho do elementos e evitar problemas de singularidade na etapa de processamento. A Fig. 4 mostra as discretizações do compósito.

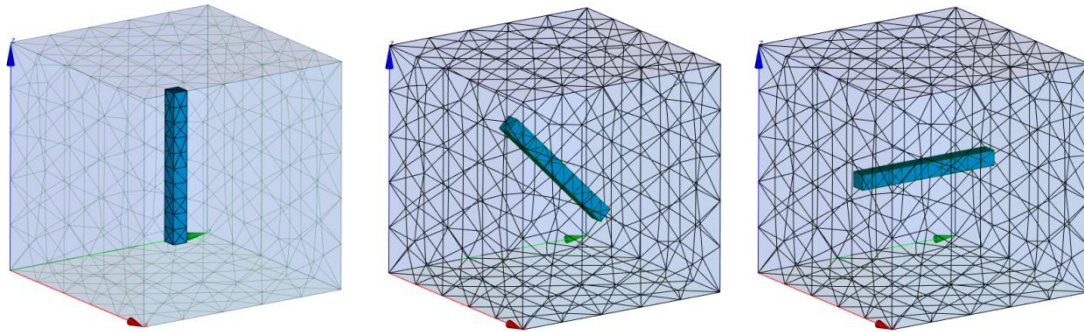


Figura 4 – Discretizações do compósito

As análises de deslocamentos, tensões e deformações no EVR foram realizadas através de um programa computacional que implementa a formulação Método dos Elementos de Contorno (MEC) através da solução fundamental de Kelvin, com acoplamento de sub-regiões. Como dados de entrada para o mesmo, foram fornecidos nós, elementos e conectividades de ambas as sub-regiões. Para tal, desenvolveu-se uma rotina computacional, na linguagem C, que adapta os dados de saída fornecidos pela plataforma SALOME para o modelo de dados de entrada do programa computacional supracitado. Além disso, a rotina desenvolvida implementa as equações desenvolvidas na formulação dos ângulos de Euler, permitindo realizar variações na orientação da inclusão dentro do EVR, como também, gera uma malha de pontos internos em uma seção reta ou transversal do EVR (exemplo em um plano na seção média vertical do EVR – Fig. 5). Com os resultados obtidos nestes pontos são gerados, na etapa de pós-processamento, gráficos com a distribuição de tensões, deformações e deslocamento em uma seção específica do EVR.

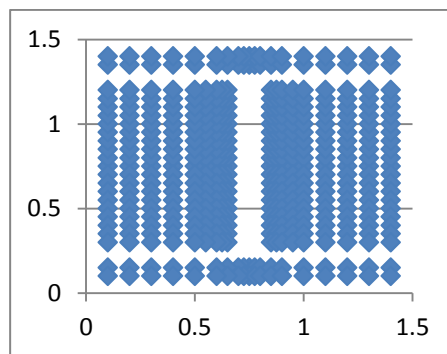


Figura 5 – Definição de pontos internos para análises de tensões deformações

Com as discretizações montadas, tanto para o contorno quanto para pontos interno, as simulações puderam ser realizadas no processamento do MEC 3D. A Figura 6 apresenta a distribuição de deformações, Fig. 6a, e de tensões, Fig. 6b, em uma seção reta do compósito com a inclusão posicionada ao longo do eixo de aplicação da carga. A partir destas é possível perceber como a inclusão confere uma redistribuição de tensões no compósito, o que aumenta sua rigidez quando comparado com o caso homogêneo.

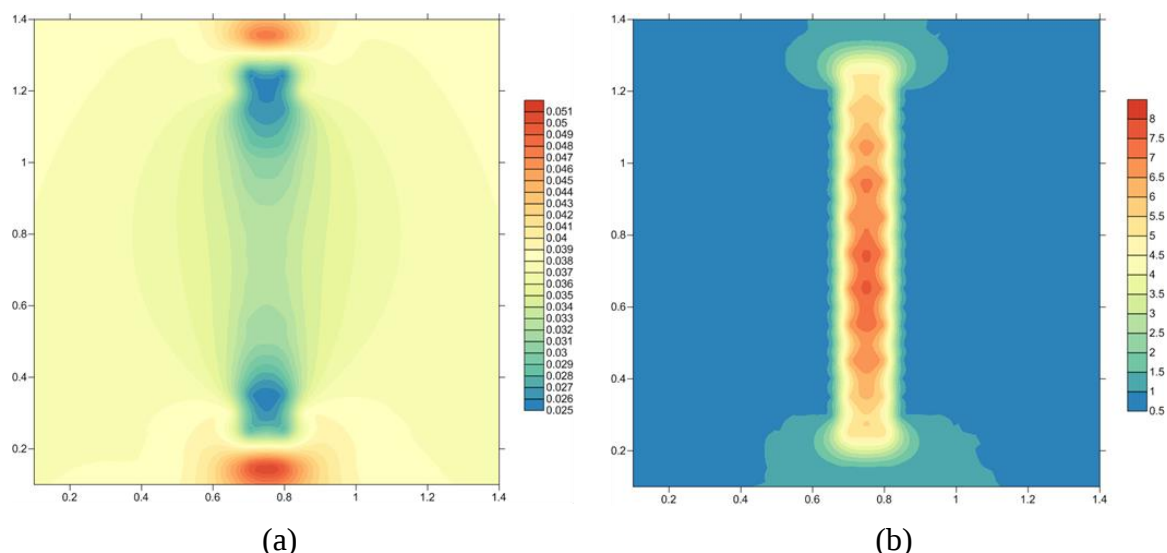


Figura 6 - Distribuição de deformações (a) e tensões (b) em uma seção reta do EVR, no caso heterogêneo, com a inclusão orientada ao longo do eixo de aplicação da carga.

Ao variar a topologia da inclusão dentro do EVR, realizando rotações da mesma em torno do eixo X do sistema de coordenadas adotado, é possível perceber a influência da orientação da inclusão na resistência mecânica adquirida pelo compósito. As Figuras 7 e 8 mostram a distribuição de deformações e tensões na seção reta do compósito ao rotacionar a inclusão com ângulos 45 e 90°, respectivamente, em relação ao eixo de aplicação da carga.

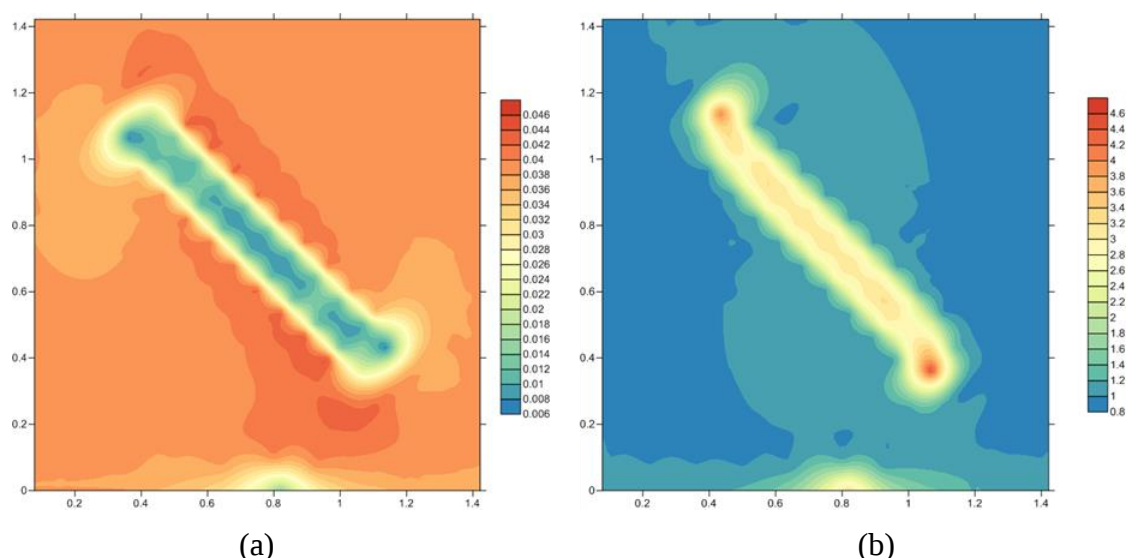


Figura 7 - Distribuição de deformações (a) e tensões (b) em uma seção reta do EVR com a inclusão orientada a 45°, no sentido anti-horário, do eixo de aplicação da carga.

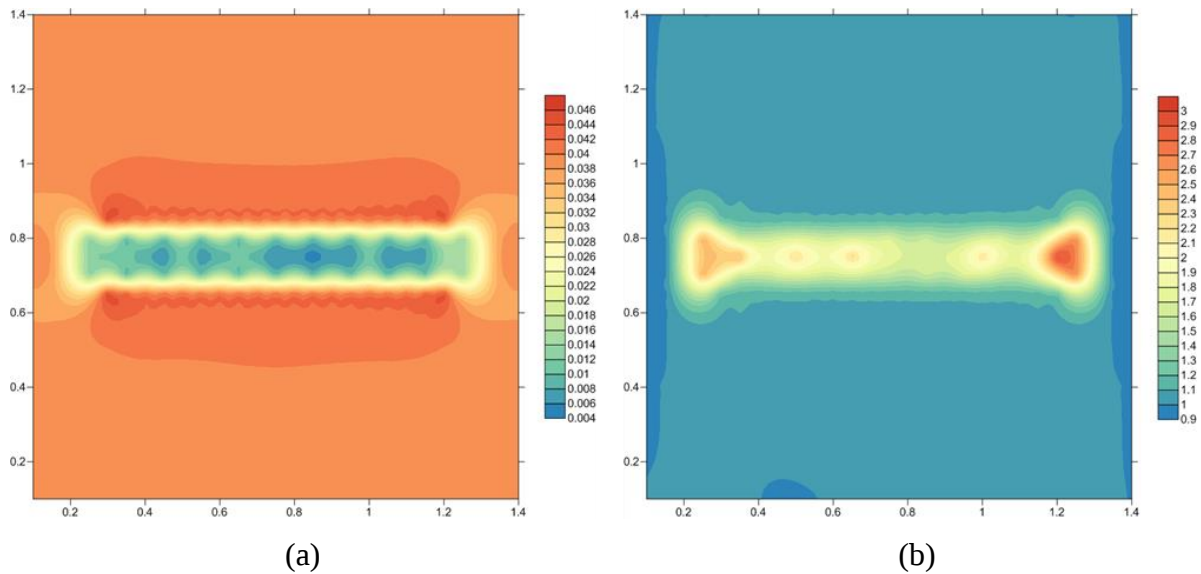


Figura 8 - Distribuição de deformações (a) e tensões (b) em uma seção reta do EVR com a inclusão orientada a 90° do eixo de aplicação da carga.

Ao analisar os gráficos obtidos percebe-se que a adição da inclusão na matriz causa uma redistribuição de esforços no material. Nota-se, também, que a região onde a inclusão se encontra na seção transversal apresenta os valores mais elevados de tensão e as menores deformações, como esperado, devido ao alto módulo de elasticidade da inclusão frente ao da matriz. Assim, sendo a matriz de concreto, que é um material frágil, e ocorrendo fissuras na mesma, a fibra servirá como ponte de transferência de tensões pelas fissuras, minimizando a concentração de tensões nas extremidades das fissuras. Com isto tem-se uma grande redução da velocidade de propagação das fissuras no concreto, que passa a ter um comportamento pseudo-dúctil.

Ao se comparar os gráficos obtidos após as rotações com os gerados com a fibra na direção do carregamento percebe-se que a rotação da inclusão influi na distribuição de tensões no interior do compósito. A medida que aumenta-se o ângulo de rotação da inclusão ocorre uma menor concentração de tensões na mesma, ou seja, um menor alívio de tensões na matriz, o que diminuirá a resistência do compósito à propagação das fissuras, e consequentemente, o concreto terá uma menor resistência à ruptura. Isto ocorre pelo fato da direção de propagação das fissuras ser transversal à direção principal de tensão. Desta forma, a resistência à propagação da fissura diminui progressivamente conforme se rotaciona a fibra de 0 a 90° em relação ao eixo de aplicação da carga.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos mostram que as formulações apresentadas no trabalho são adequadas e resultaram em uma implementação numérica consistente, oferecendo resultados precisos para a modelagem de um material compósito com reforço de fibras retas e curtas, via Método dos Elementos de Contorno. Ainda, os resultados obtidos mostraram a importância da orientação da inclusão dentro da matriz para um melhor desempenho do compósito, com a inclusão posicionada ao longo do eixo de aplicação da carga apresentando melhores resultados frente às demais orientações. Desta forma, para se obter um melhor desempenho do concreto reforçado por fibras, faz-se necessário desenvolver técnicas que gerem orientações preferenciais das inclusões dentro do concreto. Assim as inclusões oferecerão uma maior

resistência à propagação de fissuras na matriz, aumentando a rigidez da mesma e consequentemente, a resistência à ruptura do material. A visualização inicial proporciona o entendimento adequado do problema processado, bem como a visualização gráfica final, ajuda na análise dos resultados.

Agradecimentos

Os autores agradecem a disponibilidade de bolsa de iniciação científica, ofertada pelo Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV/CTEC), fundamental como estímulo à introdução à pesquisa nas engenharias. Igualmente, estende-se para a infraestrutura disponibilizada pelo LCCV/CTEC. Ainda, agradecem os valiosos préstimos do Prof. Dr. Francisco Patrick de A. Almeida, tanto na disponibilização de seu software SIMBOLIK quanto na análise dos resultados, e ao estudante Pedro Leonardo KuntyOitaci pela parceria na utilização da plataforma SALOME.

REFERÊNCIAS

- Aveston, J.; Cooper, G. A.; Kelly, A. 1971. Single and multiple fracture. In: Conference on the Properties of Fiber Composites, London. Proceedings. NPL. p.15-26.
- Dória, A. S. 2005. Abordagem de problemas de engenharia através do Método dos Eementos de Contorno. Monografia de Mestrado. Maceió/AL.
- Figueiredo, A.D. 2000. Concretos com Fibras de Aço. São Paulo, 70p. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- Santos Júnior, A. de. 2008. Um Estudo Sobre Estimativas de Erro de Modelagem em Estruturas de Materiais Heterogêneos. Tese de Mestrado – Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL.
- Savage, G. 1993. Carbon-Carbon Composites, London, UK: Chapman & Hall.