



FORMULAÇÃO DO MEC 3D PARA ANÁLISE DE MATERIAL COMPÓSITO COM INCLUSÃO DE FIBRA

Silva, Amanda Rocha e

amanda.arvs@gmail.com

Barbirato, João Carlos Cordeiro

jccb@lccv.ufal.br

Centro de Tecnologia/Universidade Federal de Alagoas

Campus A.C. Simões – Av. Lourival de Melo Mota, S/N, 57072-900, Cidade Universitária, Maceió, Alagoas

Resumo. *O presente trabalho apresenta formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise de materiais compósitos com inclusão de fibras, baseada na utilização de multirregiões. Na área da construção civil, os concretos reforçados com fibras são cada vez mais utilizados, proporcionando aumento da ductilidade e da tenacidade do compósito resultante. A necessidade de interação da área numérica com a experimental é fator importante para desenvolvimento deste material. Assim, utilização do MEC 3D com a solução fundamental de Kelvin é feita para caracterizar tanto a matriz quanto a inclusão da fibra. Neste caso, são utilizadas fibras curtas e retas. Rotinas de multirregiões foram utilizadas em um código MEC3D para o processamento de casos, que serviram para testar a adequação da formulação apresentada. Os dados obtidos no processamento, foram trabalhados em plataforma de pós-processamento, caracterizando o comportamento do material compósito através do mapeamento de cores correspondentes. Os resultados obtidos demonstram a adequação da implementação numérica e abre perspectivas para novas análises de mãos dadas com a área experimental do material ecoeficiente concreto com fibras.*

Keywords: *Multirregiões, Compósito com inclusão, Método dos Elementos de Contorno.*

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos surgiram com a necessidade de empregar materiais com desempenho superior em características mais específicas. São formados pela união de materiais de naturezas diferentes, resultando em um compósito de desempenho estrutural superior àquele de seus componentes tomados separadamente (Hoefel, 2006). Essas combinações são utilizadas nas mais diversas áreas da engenharia.

No ramo da construção civil, tem-se como grande exemplo o concreto reforçado com fibras (Figura 1a). O concreto convencional possui propriedades físicas características como a elevada resistência à compressão, rigidez e durabilidade, porém, também apresenta algumas limitações, como a baixa capacidade de deformação e a rápida propagação de fissuras quando submetido a esforços de tração (Vaz, 2015). Com isso, tem-se a utilização de fibras como alternativa para minimizar essas limitações.

Com a inclusão de fibras, o concreto passa a ser um material pseudo-dúctil, ou seja, continua apresentando uma resistência residual a esforços nele aplicados mesmo após sua fissuração. A alteração do comportamento é função das características das fibras e da matriz de concreto, assim como sua interação (Figueiredo, 2000). Isso denota que as fibras quando adicionadas ao concreto proporcionam melhora significativa na resistência à tração e na tenacidade do compósito no estado endurecido, pois as mesmas atuam como pontes de transferência de tensões através das fissuras, suprimindo assim as deficiências da matriz. Com a superação de tais limitações, é possível trabalhar com obras de grande porte com maior segurança, como foi o caso da construção de um túnel de bagagem de um aeroporto em Londres, UK (Greenhalgh, 2010), apresentado na Figura 1b.

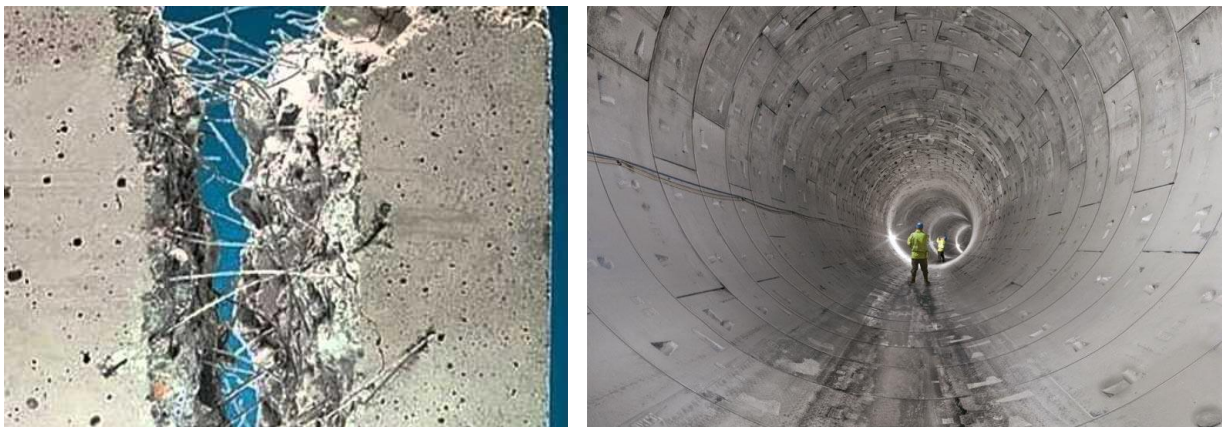


Figura 1 - Concreto com inclusão de fibras (a); Túnel construído com concreto reforçado por fibras em UK (b). Fonte: Greenhalgh, 2010.

No presente trabalho, a modelagem do material compósito se dá através de um dos métodos aproximados utilizados em ciência e engenharia, o Método dos Elementos de Conotorno (MEC). O MEC consiste em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de equações integrais sobre o contorno. Isso reduz de uma unidade as dimensões de problemas lineares analisados, o que leva a menores quantidades de dados de entrada e, consequentemente, menor sistema de equações algébricas.

O MEC é aplicado na solução de equações diferenciais, onde estas são transformadas em equações integrais aplicadas ao contorno do problema. Este, por sua vez, é discretizado em elementos que podem ser constantes, lineares, quadráticos ou cúbicos (Alves, 2006).

Com o objetivo de aumentar a precisão das análises ao considerar as diferentes características presentes em um mesmo elemento de volume representativo (EVR), é utilizada a técnica das multirregiões. Conservando a integridade do problema ao aplicar o equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos, é possível analisar as regiões separadamente e então acoplá-las para formar o resultado geral. Na Figura 2 observam-se duas sub-regiões de domínios Ω_F e Ω_C ; cada domínio pode possuir diferentes características mecânicas que, no contexto, influenciam o elemento como um todo.

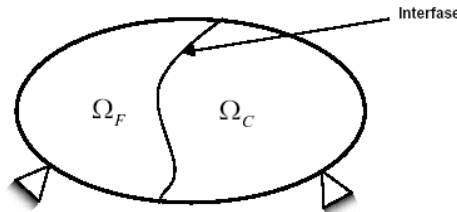


Figura 2 - Representação das sub-regiões.

2 FORMULAÇÃO DO MEC

2.1 Formulação do MEC para problemas elásticos lineares 3D

Considere-se um sólido elástico-linear tridimensional, homogêneo e isotrópico, definido pelo domínio Ω e seu contorno Γ . A equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos, conhecida como equação de Navier-Cauchy para a estática, é apresentada na Eq. 1.

$$u_{i,jj}(\chi) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ij}(\chi) + \frac{1}{G} \cdot b_i(\chi) = 0 \quad (1)$$

2.2 Solução Fundamental de Kelvin

Para que as formulações do MEC fiquem completamente definidas, torna-se necessário o conhecimento prévio da solução de um problema padrão da área que se deseja analisar. A este problema dá-se o nome de "problema fundamental". Para a definição do problema fundamental, considere-se Ω^* um domínio infinito cujo contorno é denotado por Γ^* . O sólido que se deseja analisar, de domínio Ω e contorno Γ , está contido em Ω^* . O problema particular indicado pelo asterisco é chamado de problema fundamental. Na formulação desenvolvida a seguir, utiliza-se a solução fundamental de Kelvin, que é a mais difundida e utilizada pelo meio técnico. A Figura 3 ilustra a definição do problema fundamental de Kelvin para 3D.

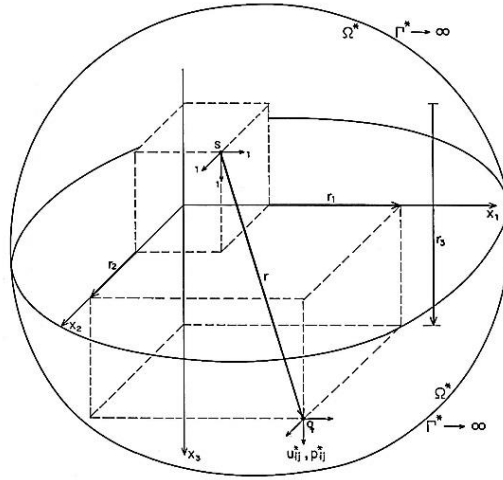


Figura 3 - Definição do Problema Fundamental de Kelvin.

As expressões de deslocamentos e forças de superfície para o problema de Kelvin são, respectivamente:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \quad (2)$$

$$p_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}]r_{,m} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)\} \quad (3)$$

onde,

$$r = \sqrt{r_i \cdot r_i} = |s - q|, \quad r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (4)$$

A equação integral que rege o problema é:

$$c_{ij}(S)u_j(S) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \cdot u_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \cdot p_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) \cdot b_j(q) \cdot d\Omega(q), \quad (5)$$

onde, $c_{ij}(S) = 0$, para pontos externos ao domínio Ω ; $c_{ij}(S) = \mathbf{I}$, para pontos internos ao domínio Ω ; $c_{ij}(S) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$, para pontos de um contorno sem angulosidades ("smooth"). $\mathbf{I}$ é a matriz identidade (de ordem 3x3, para cada ponto de colocação S)

Aproximando o contorno do sólido em "J" elementos, com "N" pontos nodais (nós funcionais), e o seu domínio em "M" células, a representação integral para deslocamentos, obtém-se:

$$c(S)u(S) = - \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^*(S, Q) \boldsymbol{\Phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{U}^n + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^*(S, Q) \boldsymbol{\Phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{P}^n + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \mathbf{u}^*(S, q) \boldsymbol{\Phi}_c^T(q) d\Omega(q) \right] \mathbf{B}^n, \quad (6)$$

Resultando no seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{D}\mathbf{B}. \quad (7)$$

Um sistema de equações algébricas pode ser montado a partir da definição das matrizes H, G e D e dos valores prescritos de deslocamentos U, forças de superfície P e forças de volume B. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_{\mathbf{DF}} = \mathbf{F} \quad (8)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz de ordem $3N \times 3N$ que contém elementos das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas as incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; $\mathbf{V}_{\mathbf{DF}}$ é o vetor das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies, de acordo com as condições de contorno; e $\mathbf{F}$ o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume.

A inclusão das fibras se dá por meio do método das multirregiões, no qual é possível considerar, em um mesmo elemento, diferentes características. Portanto, é possível considerar tanto a matriz, como a própria fibra como sub-regiões diferentes.

3 ACOPLAMENTO DAS SUB-REGIÕES

Nos casos em que o domínio é composto por vários sub-domínios de materiais que apresentam características diferentes, a utilização de sub-regiões proporciona maior precisão a análise (Wutzow, 2003). Para tanto, é realizada a discretização do contorno de cada sub-domínio homogêneo. Neste caso, denomina-se acoplamento MEC/MEC.

Para equacionamento das ligações entre as sub-regiões são impostos o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos em todos os pontos de suas interfaces, como apresentado nas Eq. (9) e (10).

$$\{\mathbf{P}\}^{1i} + \{\mathbf{P}\}^{2i} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\{\mathbf{U}\}^{1i} = \{\mathbf{U}\}^{2i} \quad (10)$$

Inicialmente são geradas as matrizes $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{H}]$, representativas de cada domínio independentemente.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}]_{11} & [\mathbf{H}]_{1i} \\ [\mathbf{H}]_{i1} & [\mathbf{H}]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^{1i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}]_{11} & [\mathbf{G}]_{1i} \\ [\mathbf{G}]_{i1} & [\mathbf{G}]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}^1 \\ \{P\}^{1i} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Juntando-se os dois sistemas em um só e aplicando as condições de equilíbrio, de compatibilidade e as condições de contorno, é obtido um sistema geral para as duas sub-regiões analisadas, como apresentado na Eq. (12).

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}]_{11}^1 & [\mathbf{H}]_{1i}^1 & -[\mathbf{G}]_{1j}^1 & [0] \\ [\mathbf{H}]_{i1}^1 & [\mathbf{H}]_{ii}^1 & -[\mathbf{G}]_{ii}^1 & [0] \\ [0] & [\mathbf{H}]_{ii}^2 & [\mathbf{G}]_{ii}^2 & [\mathbf{H}]_{i2}^2 \\ [0] & [\mathbf{H}]_{2i}^2 & [\mathbf{G}]_{2i}^2 & [\mathbf{H}]_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^{1i} \\ \{P\}^{1i} \\ \{u\}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}]_{11}^1 & [0] \\ [\mathbf{G}]_{i1}^1 & [0] \\ [0] & [\mathbf{G}]_{ii}^2 \\ [0] & [\mathbf{G}]_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}^1 \\ \{P\}^2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Para o mesmo, pressupõe-se que as variáveis referentes a força e deslocamento nas interfaces são incógnitas. Portanto, reescrevendo o sistema de forma mais simplificada, obtém-se um sistema linear de equações, como apresentado na Eq. (13), onde $\{X\}$ representa o vetor de incógnitas.

$$[\mathbf{A}]\{X\} = \{B\} \quad (13)$$

O procedimento supracitado pode ser executado para cada duas sub-regiões, sempre levando como incógnitas as variáveis de forças e deslocamentos nas interfaces. A Figura 4 retrata essa interação entre as sub-regiões.

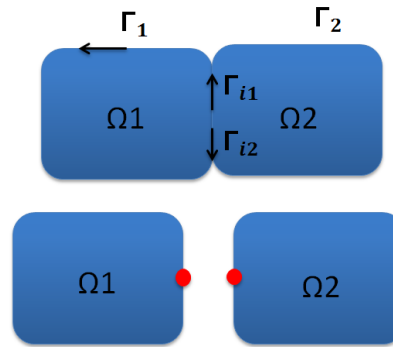


Figura 3 - Esquemática da ligação entre as interfaces

4 ANÁLISE DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES

As análises foram realizadas utilizando-se um programa computacional que implementa o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com acoplamento de sub-regiões. Os dados de entrada para o processamento de casos pelo código implementado consistem nas informações dos elementos, nós e das conectividades de ambas as sub-regiões, neste caso, matriz e fibra. Como resposta do programa, foram obtidos deslocamentos, tensões e deformações em cada nó dos diversos contornos. Após, com todos os dados dos contornos definidos, foi possível definir pontos internos e obter informações de tensões e deformações também nestes pontos, possibilitando uma grade de informações para serem devidamente utilizadas no pós-processamento.

O problema analisado baseia-se em um compósito constituído por matriz cimentícia com inclusão paralelepípeda de aço com base de 0,1 unidades e comprimento de 1,0 unidades, cujas características (Mora, Lucas & Maran, 2010) são apresentadas na Tabela 1

Tabela 1—Propriedades mecânicas dos materiais analisados. Fonte: Mora, Lucas & Maran, 2010.

Características Físicas	Matriz Cimentícia	Inclusão (Fibra)
Coefficiente de Poisson	0,21	0,30
Módulo de Elasticidade (MPa)	26.000	207.000

As condições de contorno do problema consistem em uma das faces travada para deslocamentos axiais, enquanto a face oposta é livre onde se aplica um carregamento distribuído unitário, como ilustrado na Figura 4.

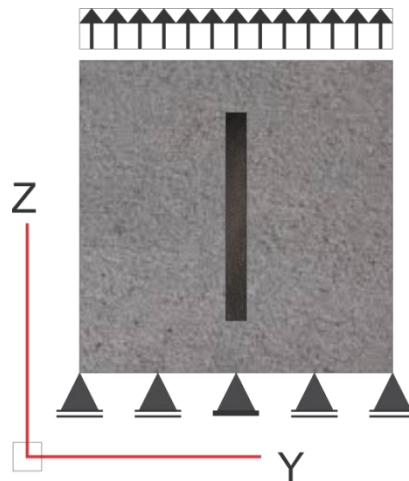


Figura 4 - Representação das condições de contorno.

Considerou-se para análise de teste a matriz e a fibra com as mesmas características físicas – caso denominado “homogêneo”. A partir de então, considerou-se a variação nas características físicas do material da fibra (“heterogêneo”). Com a inclusão posicionada na mesma direção que a aplicação da carga, espera-se menores deslocamentos sofridos pelo EVR, principalmente nas áreas mais próximas a inclusão. Esse caso pode ser constatado na Figura 5, onde é apresentada uma comparação entre os deslocamentos do caso homogêneo e o EVR com a inclusão.

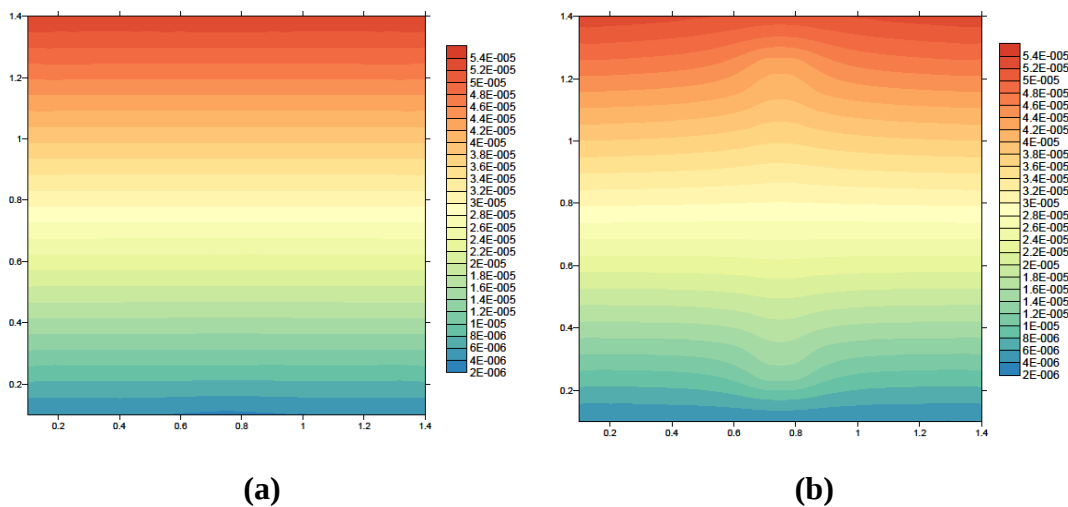


Figura 5 - Deslocamentos na seção do compósito no caso homogêneo (a) e heterogêneo (b).

Considerando a mesma seção média do compósito analisado, a distribuição de tensões adquirida é apresentada na Figura 6. Na mesma, é possível observar que na região de interface entre as sub-regiões há uma concentração de tensões, entretanto, menor do que na fibra e maior que na matriz. Este fato se deve a fibra possuir maior rigidez que a matriz e, com isso, acaba adquirindo um fluxo maior de tensões, aliviando para a matriz ao seu redor (lateralmente). Mas, a matriz que liga a fibra aos apoios recebe maior tensão nessas regiões.

Com base na Figura 6b, são obtidas menores deformações na inclusão e em seu entorno, o que se deve a contribuição da rigidez da fibra no compósito. Também se pode observar maiores deformações na área entre a inclusão e o apoio, pois considerando o equilíbrio de forças, tem-se nos apoios inferiores uma reação contrária ao carregamento,

tracionando a região de análise e a inclusão se comportando como um corpo rígido serve como apoio para essa região.

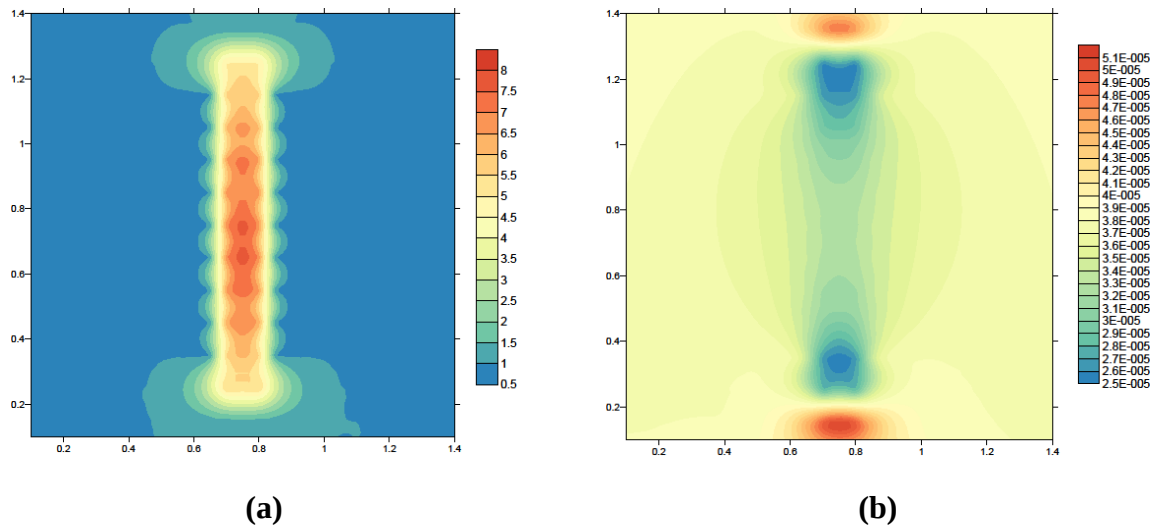


Figura 6 - Distribuição de tensões (a) e deformações (b) na seção média do compósito, na direção do eixo Z.

Como pode ser observado na Figura 6 (b), são apresentados menores deformações nas regiões mais próximas à fibra devido a maior rigidez da mesma. Por meio da conexão entre as sub-regiões, a menor deformação da inclusão tende a “prender” as regiões mais próximas.

Com a variação das características mecânicas da inclusão, é possível analisar a influência da rigidez da mesma em relação à matriz. As variações constam na Tabela 2, onde é possível encontrar diferentes tipos de metal, desde o mais utilizado na construção civil como o aço, até metais mais leves, como titânio e alumínio. Também é possível observar a influência de inclusões poliméricas e ecoeficientes, como é o caso da fibra de Juta (Danese, 2013).

Tabela 2 - Propriedades mecânicas da inclusão. Fonte: Mora, Lucas & Maran, 2010.

Material da inclusão	Módulo de Elasticidade (MPa)	Coefficiente de Poisson
Aço	207.000	0,3
Amianto	130.000	0
Titânio	107.000	0,34
Alumínio	69.000	0,33
Fibra de Juta (natural)	23.660	0
PVC (Policloreto de Vinila)	3.500	0,38
Epóxi (isopor)	2.760	0
Cavidade	0,01	0

No caso em que a inclusão é substituída por uma cavidade, é possível analisar as respostas das deformações e tensões para o EVR com um poro em seu centro. Porém, para evitar irregularidades na execução do código, o módulo de elasticidade adotado foi próximo a zero, e não propriamente nulo. Para evitar, dessa forma, singularidade nas matrizes [G] e [H].

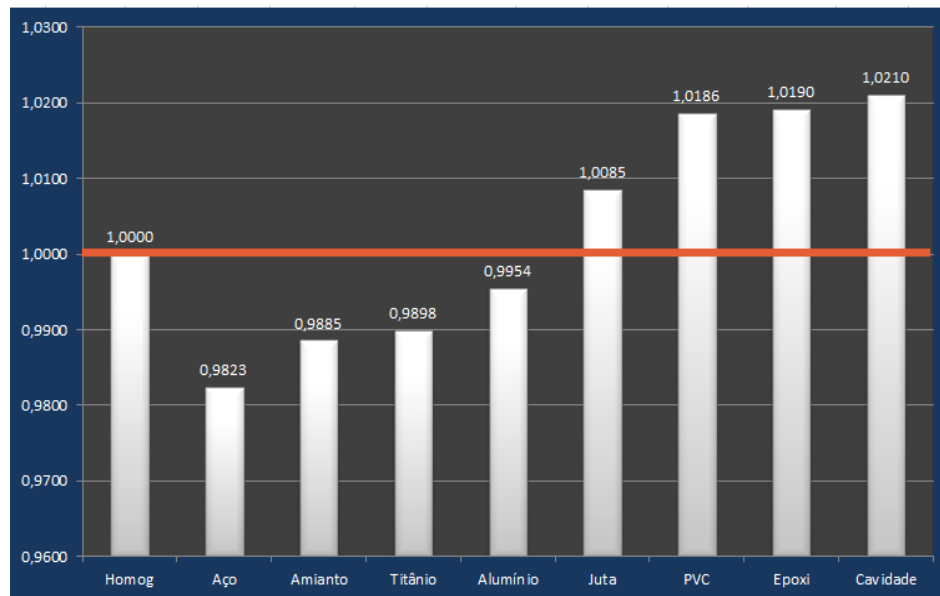


Figura 7 - Relação entre a média de deformações no topo do EVR considerando diferentes tipos de inclusão.

Como apresentado na Figura 7, a inclusão de aço confere maior rigidez ao compósito, considerando que as deformações consequentes foram menores que os demais. Já as inclusões poliméricas apresentaram maiores deformações em suas atuações, sendo ainda maiores do que o caso homogêneo. Tal resultado já era de se esperar quando as mesmas possuem valores do módulo de elasticidade até 75 vezes menor que o do aço.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise de materiais compósitos com inclusão de fibras em 3D, baseada na utilização de multirregiões. Tendo como objeto de análise o material compósito concreto reforçado com fibra, onde matriz e fibra foram consideradas sub-regiões do todo, um código com a solução fundamental de Kelvin foi utilizado para a análise das multirregiões. Os resultados obtidos nos processamentos de caso dão conta da adequação da formulação para a análise pretendida.

Segundo os dados obtidos nas análises, a influência da inclusão na matriz cimentícia, considerando suas propriedades mecânicas superiores, apresenta acréscimos na rigidez de todo o compósito, como pode ser observado nas configurações de deslocamentos, tensões e deformações supracitadas. Entretanto, em casos em que a inclusão apresenta rigidez inferior à da matriz, sua contribuição para a mesma e todo o elemento de volume representativo de forma geral é mínima, como pode ser observado nos comparativos de deslocamentos e deformações no topo do EVR apresentados. Ressalte-se que a comparação é com a fibra de aço. A tenacidade também deve ser levada em conta em análise mais ampla.

Em diferentes perspectivas, ao alterar as propriedades geométricas e físicas da inclusão, a formulação abordada no presente trabalho, juntamente com o respectivo código computacional, permitem chegar a tratar de uma viga de concreto armado, em que a inclusão represente a armadura em si. Ainda, uma abordagem na área da geologia, onde a matriz pode ser constituída de um determinado solo e a inclusão representaria um poro na amostra, ao fornecer propriedades mecânicas bem inferiores as da matriz.

Agradecimentos

Os autores agradecem a disponibilidade de bolsa de Iniciação Científica, ofertada pelo Programa PIBIC-UFAL juntamente com a FAPEAL (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas), fundamental como estímulo à introdução à pesquisa nas engenharias. Igualmente, estende-se para a infraestrutura disponibilizada pelo LCCV/CTEC. Ainda, às valiosas contribuições do Prof. Dr. Francisco Patrick de A. Almeida, bem como a disponibilização do software SIMBOLICK, e do estudante de Engenharia Civil Pedro Leonardo Kuntz na utilização da plataforma SALOME.

REFERÊNCIAS

- Alves, L. M. (2006). Apostila de Método dos Elementos de Contorno. Curitiba, Paraná: Universidade Federal do Paraná.
- Danese, F. C. (2013). *Microconcreto reforçado com resíduo de polipropileno e fibra de juta*. São Carlos, São Paulo: Escola de Engenharia de São Carlos.
- Figueiredo, A. D. (2000). Concreto com fibras de aço. São Paulo, São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Greenhalgh, J. (2010). *20 years of fiber concrete linings in the UK*. Retrieved from TunnelTalk: <http://www.tunneltalk.com/Fibrecrete-Oct10-20-years-of-fibrecrete-in-the-UK.php>
- Mora, N. D., Lucas, J. F., & Maran, M. A. (2010). Propriedade Mecânica dos Materiais. Foz do Iguaçu, Paraná: Universidade Estadual do Estado do Paraná - Centro de engenharias e ciências exatas.
- Pires, E. N. (2009). Efeito do Tratamento de Superfície em Fibras de Juta no Comportamento Mecânico de Compósitos de Matriz Epóxi. Florianópolis, Santa Catarina: Universidade de Santa Catarina.
- Vaz, V. V. (2015). Pavimento Intertravado de Concreto. Campinas, São Paulo, Brasil: Unicamp.
- Wutzow, W. W. (2003). Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapas com Enrijecedores. São Carlos, São Paulo: Universidade de São Paulo.