



MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO ESTABILIZADO P-ADAPTATIVO PARA O PROBLEMA DE HELMHOLTZ EM MEIOS HETEROGÊNEOS

Leonardo F. Mello

Iury Igreja

Abimael F. D. Loula

{lfmello, iuryhai, aloc}@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica

Av. Getúlio Vargas, 333 – Petrópolis-RJ – CEP: 25.651-075 – Brasil

Resumo. Nas últimas décadas o desenvolvimento de métodos de elementos finitos para a resolução de problemas de propagação de ondas no domínio da frequência, modelado pela equação de Helmholtz, têm sido largamente explorados. Embora aparentemente simples, este problema tem se mostrado desafiador do ponto de vista da construção de métodos numéricos precisos e estáveis capazes de resolver de forma eficiente o problema de Helmholtz, com número de onda k elevado, de maneira a evitar ou minimizar os efeitos de “poluição numérica”. Métodos clássicos de Galerkin ou de diferenças finitas de segunda ordem, por exemplo, apresentam aproximações instáveis a menos que sejam utilizadas malhas extremamente refinadas. Outra alternativa bastante promissora são os métodos de elementos finitos híbridos caracterizados pela introdução de multiplicadores de Lagrange responsáveis pela imposição da continuidade nas arestas dos elementos. Tal metodologia dá origem a um sistema global envolvendo apenas os graus de liberdade associados aos multiplicadores e as variáveis de interesse podem ser resolvidas no nível do elemento. Esta é uma abordagem de fácil implementação, inclusive de adaptatividade do tipo h e p , além de apresentar grande flexibilidade na escolha dos espaços de aproximações. Neste contexto, apresentamos uma formulação híbrida para o problema em questão onde o multiplicador é identificado como o traço da pressão nas arestas e estabilizado pela adição de resíduos de mínimos quadrados da equação de Helmholtz e do balanço de massa. Para ilustrar a flexibilidade e robustez do método, estudos numéricos são realizados comparando resultados obtidos utilizando multiplicadores contínuos e descontínuos em meios homogêneos e heterogêneos em regimes de média e alta frequência adotando, quando necessário, adaptatividade p para atingir melhor precisão da aproximação.

Palavras chave: Problema de Helmholtz, Adaptatividade p , Métodos híbridos, Estabilização, Meios heterogêneos

1 INTRODUÇÃO

O estudo das vibrações que operam em diferentes frequências dá origem a um fenômeno que denominamos de onda. A propagação de onda é capaz de transmitir energia sem alterar o meio, possui velocidade definida e tem o seu início em um pulso energético. Diversos efeitos físicos envolvendo ondas vem sendo estudados para a construção de ferramentas presentes em áreas como: engenharia civil, mecânica, astronomia, geofísica, computação e comunicação. As aplicações baseiam-se nos efeitos conhecidos causados quando a onda percorre um meio, podendo ser refletida, absorvida e desviada por objetos. Essas características nos permitem conhecer como é a interação onda-objeto (onde o objeto pode ser o próprio meio de propagação), como em exames laboratoriais envolvendo campo de ondas eletromagnéticas onde o receptor recebe as respostas (frequências dos tecidos) dos pulsos eletromagnéticos criados por bobinas, ou ainda na área de levantamento sísmico onde as ondas de som permitem descobrir estruturas e materiais dentro da superfície da terra.

Matematicamente a onda pode ser modelada por uma equação diferencial parcial chamada equação de Helmholtz. Através desta equação é possível descrever os fenômenos de dispersão e propagação de ondas elásticas, acústicas e eletromagnéticas (Ihlenburg, 1998). No âmbito dos métodos numéricos, a estabilidade e precisão nas aproximações de ondas harmônicas reservam diversos desafios graças a sua natureza oscilatória (Babuska et al., 1995). O uso de aproximações por elementos finitos utilizando o método clássico de Galerkin, por exemplo, apresentam soluções que podem ser extremamente imprecisas dependendo da relação entre o número de onda k (constante relacionada a frequência) e o tamanho de malha h (Babuska and Ihlenburg, 1995). Todavia, esta relação para valores elevados de k não é o suficiente para o controle do erro. Este comportamento é chamado efeito de poluição numérica, que surge devido a diferença entre o número de onda aproximado e o número de onda exato.

Métodos de elementos finitos foram desenvolvidos para minimizar o problema de poluição numérica (Chang, 1990; Carmo et al., 2008). Nesta direção, Harari and Hughes (1992) e Monk and Wang (1999) contornam o problema em questão através de uma formulação de elementos finitos estabilizada pela introdução de resíduos de mínimos quadrados. Já Loula et al. (2007) apresentam um método baseado em Galerkin descontínuo usando bolhas inseridas em macro-elementos que reduz de forma significativa a poluição do erro, porém com o mesmo número de graus de liberdade do método de Galerkin contínuo. Em Carmo et al. (2008) foi desenvolvido um método capaz de aproximar com funções lineares que tem por objetivo minimizar a poluição no erro. Por outro lado, utilizando métodos de Petrov-Galerkin, Loula and Fernandes (2009) alcançaram resultados expressivos na redução do efeito de poluição.

Além das restrições citadas, em diversos casos, há ainda a necessidade de se utilizar técnicas adaptativas do tipo h e p visando a obtenção de resultados mais precisos em locais específicos do domínio do problema a fim de capturar de forma eficiente os fenômenos naquela região (Gomez-Revuelto et al., 2012; Giorgiani et al., 2013). Dessa forma, o desafio numérico, neste caso, se sustenta na ambição de criar novas metodologias capazes de tratar a deterioração da estabilidade, eliminando o efeito de poluição numérica, com soluções precisas em todo o domínio

do problema, porém objetivando baixo custo computacional e boa qualidade da solução aproximada. Neste contexto, os métodos de elementos finitos híbridos despontam como uma metodologia altamente flexível no tratamento de descontinuidades, adaptatividade h e p e na escolha dos espaços de aproximação devido a sua maneira de aproximar o problema que está relacionado à imposição da continuidade nas arestas dos elementos a partir da inclusão de uma nova variável ao sistema, os multiplicadores de Lagrange. Tal abordagem conduz a um problema local composto pelas variáveis de interesse definidas em cada elemento da malha e do multiplicador sobre as arestas dos elementos. A resolução destes problemas locais é feita usando a metodologia de condensação estática, que tem por finalidade eliminar as variáveis de interesse no nível do elemento em função dos multiplicadores de Lagrange, dando origem a um problema global que possui apenas os graus de liberdade da nova variável, reduzindo significativamente o custo computacional do problema, uma vez que o tempo necessário para resolver todos os problemas locais é desprezível se comparado àquele empregado na resolução do sistema global.

No contexto dos métodos híbridos, apresentamos uma formulação para o problema de Helmholtz caracterizada pela introdução de um multiplicador de Lagrange associado ao traço do campo de pressão nas arestas dos elementos, denominada MMHE (Método Misto Híbrido Estabilizado). Para o multiplicador adotamos aproximações polinomiais contínuas, neste caso o método é denominado MMHE-C, similar a metodologia empregada em Arruda et al. (2013) para o problema de Poisson, e aproximações polinomiais descontínuas, onde o método é chamado MMHE-D, de forma análoga a formulação desenvolvida por Núñez et al. (2012) para o problema do escoamento de Darcy em um meio poroso homogêneo e para um meio poroso heterogêneo por Igreja et al. (2014). Além disso, a formulação híbrida em questão é estabilizada através da introdução de resíduos de mínimos quadrados advindos do problema de Helmholtz e do balanço de massa que garantem a condição de compatibilidade entre os espaços dos problemas locais.

A partir da derivação do método proposto, usando multiplicadores contínuos ou descontínuos, desenvolvemos estudos numéricos que exploram a flexibilidade dos métodos híbridos no que diz respeito ao tratamento de descontinuidades através de simulações em meios heterogêneos que apresentam regiões com diferentes números de onda k e abordamos estes problemas utilizando p -adaptatividade com o intuito de alcançar soluções precisas em todo o domínio. A estratégia é aumentar o grau do polinômio iterativamente, em regiões que necessitam de um tratamento especial, até que seja atingida uma tolerância de erro previamente estipulada. Resultados numéricos destacam a eficiência do método proposto, bem como a melhora da precisão da solução aproximada quando empregada a estratégia de adaptatividade p . Além disso, os resultados mostram taxas ótimas de convergência para as variáveis de interesse.

Este trabalho segue a seguinte organização. Notações e definições são introduzidas na Seção 2. Na Seção 3, apresentamos o problema modelo. A formulação mista híbrida estabilizada MMHE é introduzida na Seção 4. A metodologia de resolução é desenvolvida na Seção 5. Na Seção 6 são apresentados estudos numéricos em meios homogêneo e heterogêneo com adaptatividade p . Finalmente, na Seção 7, apresentamos as conclusões deste trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Dado o domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, com contorno Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$, escrevemos $H^m(\Omega)$ para denotar o espaço usual de Sobolev equipado com a norma e semi-norma $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ e

$|\cdot|_{m,\Omega}$, respectivamente, com $m \geq 0$ (Adams and Fournier, 1975). Para $m = 0$, apresentamos $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ como o espaço das funções quadrado integráveis em Ω , definido como

$$L^2(\Omega) = \left\{ q : \int_{\Omega} q^2 dx < \infty \right\},$$

com norma dada por

$$\|q\|_0 = \|q\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} q^2 dx \right)^{1/2}.$$

Seja

$$H^1(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \nabla q \in [L^2(\Omega)]^d\},$$

com norma e seminorma definidas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \|q\|_1^2 &= \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|q\|_0^2 + \|\nabla q\|_0^2 \\ |q|_1^2 &= |q|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla q\|_0^2 \end{aligned}$$

e $H_0^1(\Omega)$ o subespaço de funções em $H^1(\Omega)$ com traço nulo sobre $\partial\Omega$, definidos como segue

$$H_0^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega) : q = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Para um espaço de funções $V(\Omega)$, denotamos $[V(\Omega)]^d$ e $[V(\Omega)]^{d \times d}$ como os campos vectoriais e tensoriais cujas componentes pertencem a $V(\Omega)$, respectivamente. Estes espaços são equipados com a norma usual do produto, a qual, por simplicidade, é denotada por $\|\cdot\|_{V(\Omega)}$. Restringindo o domínio Ω ao caso bidimensional ($d = 2$), definimos o escalar $q \in \mathbb{R}$ e vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ para apresentar os seguintes operadores:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right); \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad \nabla q = \left(\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right),$$

onde div , rot e ∇ denotam os operadores divergente, rotacional e gradiente, respectivamente.

Seja $\mathcal{T}_h$ uma partição regular de elementos finitos definida como

$$\mathcal{T}_h = \{K\} := \text{a união de todos os elementos } K$$

no domínio Ω . Para as arestas e dos elementos K definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{E}_h = \{e; e \text{ é uma aresta de } K \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h\}$$

que denota o conjunto de todas as arestas e de todos os elementos K ,

$$\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h; e \text{ é uma aresta interior}\}$$

é o conjunto das arestas interiores, e

$$\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h; e \subset \partial\Omega\}$$

o conjunto de arestas do bordo de Ω .

Assumindo o domínio Ω como um polígono e $\mathcal{T}_h$ uma partição regular de Ω , existe um $c > 0$ tal que $h \leq ch_e$, onde h_e é o diâmetro da aresta $e \in \partial\Omega$ e h , o parâmetro de malha, é o

diâmetro do elemento. Para cada aresta e associamos um vetor unitário normal $\mathbf{n}_e$ e para cada elemento K associamos um vetor unitário normal $\mathbf{n}_K$.

Para introduzir os métodos híbridos, definimos os seguintes espaços de dimensão finita sobre a partição de $\mathcal{T}_h$

$$\mathcal{V}_h^l = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2; \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{Q}_l(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{Q}_h^m = \{q \in L^2(\Omega); q_h|_K \in \mathbb{Q}_m(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2)$$

onde $\mathbb{Q}_j(K)$, $j = l$ ou $j = m$, denota o espaço de funções polinomiais de grau j associado a elementos quadriláteros. Sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h$ introduzimos os espaços de aproximações referentes aos multiplicadores de Lagrange. Neste caso, consideramos duas possibilidades de espaço de dimensão finita

$$\mathcal{D}_h^n = \{\mu \in L^2(\mathcal{E}_h) : \mu|_e = p_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \quad (3)$$

onde $p_n(e)$ expressa o espaço das funções polinomiais descontínuas de grau menor ou igual a n sobre cada aresta e , e para aproximações contínuas do multiplicador definimos o espaço

$$\mathcal{C}_h^n = \{\mu \in C^0(\mathcal{E}_h) : \mu|_e = p_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}. \quad (4)$$

Além disso, definimos o espaço de aproximação que contempla tanto multiplicadores contínuos quanto descontínuos, como segue

$$\mathcal{M}_h^n = \{\mathcal{D}_h^n, \mathcal{C}_h^n\}. \quad (5)$$

3 PROBLEMA MODELO

Neste trabalho consideramos o modelo linear de propagação de ondas acústicas em um fluido compressível e ideal governado pela equação de onda

$$-\Delta\varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

onde $\Delta = \text{div } \nabla$ denota o operador laplaciano, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ representa pequenas oscilações do campo de pressão e c é a velocidade do som no meio. Considerando soluções harmônicas no tempo com frequência circular ω , o campo de pressão pode ser escrito como $\varphi(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ e a amplitude da pressão p satisfaz a equação de Helmholtz

$$-\Delta p + k^2 p = 0, \quad (7)$$

onde o parâmetro $k = \omega/c$ conhecida como número de onda ou constante de propagação, caracteriza os comportamentos oscilatórios da solução φ . Esta constante é de grande importância numérica, pois para elevados valores de k surgem efeitos de ressonância numérica que podem deteriorar a qualidade da solução aproximada do problema.

O problema de Helmholtz Eq. (7) pode ser formulado em dois campos, velocidade e pressão. Para tanto, introduzimos o campo vetorial através da equação constitutiva $\mathbf{u} = -\nabla p$, que relaciona a velocidade com o gradiente da pressão, para reescrever a equação de Helmholtz na forma mista, como segue

Dado o número de onda k e a função f , encontrar o campo de velocidade $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ e a pressão $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$\mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{u} - k^2 p = f \quad \text{em } \Omega \quad (9)$$

O problema acima pode ser suplementado por condições de Dirichlet

$$p = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (10)$$

Tal condição não captura corretamente os efeitos oscilatórios nos bordos do domínio. Por conta disto, os efeitos de poluição são maiores no contorno de Dirichlet se compararmos com as condições de contorno de Robin, comumente utilizadas para este problema (Fernandes, 2009). Esta condição não demonstra ser tão afetada pela ressonância numérica e pode ser escrita como

$$-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + ikp = r \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (11)$$

onde r é uma função dada, $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal exterior a Γ e $i = \sqrt{-1}$.

4 MÉTODO MISTO HÍBRIDO ESTABILIZADO (MMHE)

Para introduzir a formulação híbrida para o problema de Helmholtz, consideramos as equações Eq. (8)-(9) multiplicadas por suas respectivas funções peso, $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^l$ e $q_h \in \mathcal{Q}_h^m$, sendo o segundo termo da primeira equação integrado por partes e o sinal da segunda equação invertido visando manter a simetria da formulação. Este procedimento é realizado para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, que nos conduz à seguinte aproximação local

$$\int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^l \quad (12)$$

$$- \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} + \int_K k^2 p_h q_h \, d\mathbf{x} = - \int_K f q_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h^m. \quad (13)$$

Para criar um elo entre as aproximações locais para o problema de Helmholtz, definidos em cada elemento K , introduzimos um multiplicador de Lagrange nas arestas dos elementos. Para isso, escolhemos o multiplicador λ como o traço do campo de pressão ($\lambda = p|_e$) sobre cada aresta $e \in \mathcal{E}_h$. Assim, na formulação Eq. (12)-(13) o multiplicador λ surge naturalmente da integração por partes do termo relativo ao gradiente da pressão. Dessa forma, tomando o somatório sobre todos os elementos da malha $\mathcal{T}_h$ podemos formular o seguinte problema

Encontrar $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$, tal que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta \int_{\partial K} (p_h - \lambda_h) q_h \, ds - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K k^2 p_h q_h \, d\mathbf{x} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f q_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall [\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m. \end{aligned} \quad (14)$$

Para fechar o sistema incluímos uma equação relacionada ao multiplicador de Lagrange definida para todo $\mu_h \in \mathcal{M}_h^n$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h \, ds - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta \int_{\partial K} (p_h - \lambda_h) \mu_h \, ds = 0, \quad (15)$$

onde o parâmetro de estabilização β é dado por:

$$\beta = \frac{\beta_0}{h} \quad (16)$$

Note que o primeiro termo da equação (15) impõe a continuidade da componente normal do campo de velocidade entre os elementos e o segundo termo tem por finalidade estabilizar o multiplicador de Lagrange.

Objetivando gerar uma formulação adjunta consistente e estável, que permita uma maior flexibilidade na escolha de funções de base dos espaços de aproximação para os campos de velocidade e pressão, adicionamos ao sistema (14)-(15) termos de estabilização associados às formas residuais de mínimos quadrados, vindas das equações (8) e (9) e do rotacional de Eq. (8), análogo ao realizado por Correa and Loula (2008) para o problema de Darcy, para derivar o método misto híbrido estabilizado (MMHE), que pode ser apresentado como

Achar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$ tal que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e $\mu_h \in \mathcal{M}_h^n$

$$A_{MMHE}([\mathbf{u}_h, p_h, \lambda_h]; [\mathbf{v}_h, q_h, \mu_h]) = F_{MMHE}(\mathbf{v}_h, q_h), \quad (17)$$

com

$$\begin{aligned} A_{MMHE}([\mathbf{u}_h, p_h, \lambda_h]; [\mathbf{v}_h, q_h, \mu_h]) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right. \\ & + \int_{\partial K} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds + \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h \, ds + \int_K k^2 p_h q_h \, d\mathbf{x} \\ & + \beta \int_{\partial K} (p_h - \lambda_h)(q_h - \mu_h) \, ds - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{\delta_1}{k^2} \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - k^2 p_h)(\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} \\ & \left. + \delta_2 \int_K (\mathbf{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x} + \frac{\delta_3}{k^2} \int_K \operatorname{rot} \mathbf{u}_h \operatorname{rot} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$F_{MMHE}(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\delta_1}{k^2} \int_K f (\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} - \int_K f q_h \, d\mathbf{x} \right]. \quad (19)$$

Os parâmetros adimensionais de estabilização δ_1 , δ_2 e δ_3 estão relacionados às formas residuais do tipo de mínimos quadrados definidos no interior de cada elemento K . As condições de contorno do tipo Dirichlet Eq. (10) são incluídas na definição dos espaços híbridos Eq. (5) e não no espaço das funções $\mathcal{V}_h^l$ como usualmente é feito. Em contrapartida, a condição de contorno de Robin (11) é incorporada ao sistema (17) através da multiplicação pela função peso $\mu_h \in L^2(\mathcal{E}_h)$, que dá origem a equação

$$\int_{\mathcal{E}_h^\partial} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h \, ds - \int_{\mathcal{E}_h^\partial} ik \lambda_h \mu_h \, ds + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} r \mu_h \, ds = 0$$

observando que $\lambda_h = p_h$ sobre o conjunto das arestas $\mathcal{E}_h^\partial$ que formam o contorno do domínio

Ω . Neste contexto, a forma bilinear $A_{MMHE}(\cdot, \cdot)$ pode ser reformulada como

$$\begin{aligned} A_{MMHE}([\mathbf{u}_h, p_h, \lambda_h]; [\mathbf{v}_h, q_h, \mu_h]) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right. \\ & + \int_{\partial K} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds + \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h \, ds - \int_{\mathcal{E}_h^\partial} ik \lambda_h \mu_h \, ds \\ & + \int_K k^2 p_h q_h \, d\mathbf{x} + \beta \int_{\partial K} (p_h - \lambda_h)(q_h - \mu_h) \, ds - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{\delta_1}{k^2} \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - k^2 p_h)(\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} \\ & \left. + \delta_2 \int_K (\mathbf{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x} + \frac{\delta_3}{k^2} \int_K \operatorname{rot} \mathbf{u}_h \operatorname{rot} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

e o funcional linear $F_{MMHE}(\cdot, \cdot)$ como

$$F_{MMHE}(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\delta_1}{k^2} \int_K f (\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} - \int_K f q_h \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{E}_h^\partial} r \mu_h \, ds \right]. \quad (21)$$

Neste caso, λ_h é tratado como uma incógnita sobre o conjunto de arestas $\mathcal{E}_h^\partial$. Por conta disso, o multiplicador de Lagrange quando descontínuo está restrito ao espaço $L^2(\mathcal{E}_h)$ e quando contínuo ao espaço $C^0(\mathcal{E}_h)$. Vale ressaltar que a introdução da condição de Robin não afeta a simetria do problema.

Uma vez que, $\mathbf{v}_h$ e q_h , pertencentes aos espaços de funções de dimensão finita $\mathcal{V}_h^l$ e $\mathcal{Q}_h^m$, respectivamente, são definidos independentemente em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, observamos que o sistema (17) pode ser dividido em um conjunto de problemas locais definidos em cada elemento K acoplado a um problema global definido sobre $\mathcal{E}_h$, como segue:

Problema local: Encontrar $\mathbf{u}_h|_K \in \mathcal{V}_h^l(K)$ e $p_h|_K \in \mathcal{Q}_h^m(K)$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$ tal que, para todo $\mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{V}_h^l(K)$ e $q_h|_K \in \mathcal{Q}_h^m(K)$

$$\begin{aligned} & \int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds \\ & + \int_K k^2 p_h q_h \, d\mathbf{x} + \beta \int_{\partial K} (p_h - \lambda_h) q_h \, ds - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{\delta_1}{k^2} \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - k^2 p_h)(\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} \\ & + \delta_2 \int_K (\mathbf{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x} + \frac{\delta_3}{k^2} \int_K \operatorname{rot} \mathbf{u}_h \operatorname{rot} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ & = \frac{\delta_1}{k^2} \int_K f (\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} - \int_K f q_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (22)$$

Problema global: Achar $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$ satisfazendo, para todo $\mu_h \in \mathcal{M}_h^n$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h \, ds - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta \int_{\partial K} (p_h - \lambda_h) \mu_h \, ds = 0, \quad (23)$$

5 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO

Para resolver a formulação proposta na Eq. (17) eliminamos os graus de liberdade das variáveis $\mathbf{u}_h$ e p_h no nível do elemento $K \in \mathcal{T}_h$ em favor dos graus de liberdade do multiplicador de Lagrange levando a um sistema global em função apenas de λ_h . Computacionalmente esta é uma ótima opção, já que o multiplicador é um escalar que está associado a apenas um dos campos das variáveis de interesse e assim a dimensão do sistema global apresenta uma redução considerável se comparado com o problema comumente formulado globalmente nas variáveis velocidade e pressão.

O primeiro passo é dividir o problema local Eq. (22) definido em cada elemento K nas formas bilineares $a_K(\cdot, \cdot)$, $b_K(\cdot, \cdot)$ e no funcional linear $f_K(\cdot)$, acoplado ao problema global Eq. (23) definido sobre $\mathcal{E}_h$ nas formas bilineares $b_K^T(\cdot, \cdot)$ e $c_K(\cdot, \cdot)$ dando origem ao seguinte problema

Encontrar $\mathbf{u}_h|_K \in \mathcal{V}_h^l(K)$ e $p_h|_K \in \mathcal{Q}_h^m(K)$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$, e $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$ tal que, para todo $\mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{V}_h^l(K)$ e $q_h|_K \in \mathcal{Q}_h^m(K)$ e para todo $\mu_h \in \mathcal{M}_h^n$

$$a_K([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) + b_K(\lambda_h, [\mathbf{v}_h, q_h]) = f_K([\mathbf{v}_h, q_h]) \quad (24)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} b_K^T([\mathbf{u}_h, p_h], \mu_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K(\lambda_h, \mu_h) = 0 \quad (25)$$

com

$$\begin{aligned} a_K([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_K k^2 p_h q_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \beta \int_{\partial K} p_h q_h \, ds - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{\delta_1}{k^2} \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - k^2 p_h)(\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \delta_2 \int_K (\mathbf{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x} + \frac{\delta_3}{k^2} \int_K \operatorname{rot} \mathbf{u}_h \operatorname{rot} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$b_K(\lambda_h, [\mathbf{v}_h, q_h]) = \int_{\partial K} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds - \beta \int_{\partial K} \lambda_h q_h \, ds, \quad (27)$$

$$c_K(\lambda_h, \mu_h) = \beta \int_{\partial K} \lambda_h \mu_h \, ds, \quad (28)$$

$$f_K([\mathbf{v}_h, q_h]) = \frac{\delta_1}{k^2} \int_K f (\operatorname{div} \mathbf{v}_h - k^2 q_h) \, d\mathbf{x} - \int_K f q_h \, d\mathbf{x}. \quad (29)$$

As equações (24) e (25) podem ser reescritas na seguinte forma matricial

$$\mathbf{A}_K \mathbf{U} + \mathbf{B}_K \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F}_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (30)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K^T \mathbf{U} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{C}_K \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

Dado que $\mathbf{A}_K$ é positiva definida, manipulamos o sistema (30) para obter

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_K^{-1}(\mathbf{F}_K - \mathbf{B}_K \boldsymbol{\Lambda}), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (32)$$

Substituindo (32) em (31), obtemos o sistema global em função apenas do multiplicador como

segue

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}_K - \mathbf{B}_K^T \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{B}_K) \boldsymbol{\Lambda} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K^T \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{F}_K. \quad (33)$$

Após resolver o sistema global (33), o vetor $\mathbf{U}$ é obtido para cada elemento K a partir de (32) com $\boldsymbol{\Lambda}$ encontrado em (33).

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção desenvolvemos experimentos numéricos com o objetivo de validar a formulação MMHE Eq. (17) e demonstrar a flexibilidade dos métodos híbridos para tratar meios heterogêneos empregando adaptatividade p . Para o método em questão apresentamos duas abordagens para os multiplicadores de Lagrange. A primeira utiliza aproximações polinomiais descontínuas que denominamos MMHE-D e a segunda, chamada MMHE-C, emprega aproximações contínuas. A segunda opção reduz ainda mais o custo computacional do problema por apresentar menos graus de liberdade que as aproximações descontínuas para o multiplicador de Lagrange. Neste contexto, apresentamos estudos de convergência para meios homogêneo e heterogêneo e utilizamos adaptatividade p para alcançar soluções mais acuradas em determinadas regiões do domínio que necessitam de um cuidado especial.

Os parâmetros de estabilização δ_1 , δ_2 , δ_3 e β representam um importante papel na estabilidade e precisão da solução obtida pela formulação proposta. Contudo, neste trabalho o foco não está em encontrar valores ótimos para estes parâmetros. Desta forma, nos resultados numéricos que vamos apresentar fixamos os seguintes valores

$$\delta_1 = 0,5; \quad \delta_2 = -0,5; \quad \delta_3 = 0,5; \quad \beta = 0, \quad (34)$$

de forma similar aos trabalhos de Correa and Loula (2008), Núñez et al. (2012) e Igreja et al. (2014) para o problema de escoamentos em meios porosos. Nas simulações adotamos aproximações polinomiais de igual ordem para os campos de velocidade, pressão e multiplicador de Lagrange ($l = m = n$). Além disso, o refinamento de malha adotado nas simulações obedece a relação entre o número de onda e o parâmetro de malha dado pela seguinte inequação (Babuska and Ihlenburg, 1995)

$$kh \leq 1, \quad (35)$$

que tem por objetivo reduzir os efeitos de poluição numérica.

6.1 Meio Homogêneo

Em um domínio quadrado $\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$ considerando $f(x, y) = 0$, ângulo de direção da onda $\theta = \pi/6$ e adotando condições de contorno de Dirichlet desenvolvemos a seguinte solução analítica

$$p(x, y) = \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta)] + i \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]. \quad (36)$$

As soluções aproximadas são obtidas utilizando elementos quadrilaterais $\mathbb{Q}_l \mathbb{Q}_m - p_n$ onde l , m e n denotam, respectivamente, o grau do espaço polinomial para a velocidade ($\mathbf{u}_h$), a

pressão (p_h) e o multiplicador de Lagrange (λ_h) e são computados empregando malhas uniformes de $j \times j$ elementos, com $j = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$, para o número de onda $k = 10$, para $k = 30$ temos $j = 30, 40, 50, 60, 70, 80$ e para $k = 50$ simulamos em malhas com $j = 50, 60, 70, 80$ elementos, estas escolhas objetivam satisfazer a relação Eq. (35). Visamos desta maneira analisar o comportamento das aproximações obtidas pelo método MMHE conforme o crescimento da frequência comparado a interpolante.

Um estudo de convergência h para as aproximações $\mathbf{u}_h$, p_h e λ_h obtidas pelo método MMHE com multiplicadores contínuos e descontínuos comparado a interpolante (Interp) utilizando combinações polinomiais do tipo $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$ para os números de onda $k = 10, 30, 50$ são apresentados nas Figuras 1, 2 e 3, respectivamente. Para a velocidade (Figs. 1(a), 2(a) e 3(a)), o método MMHE-C converge com taxa inferior ao MMHE-D e a interpolante, e este comportamento se agrava quando aumentamos o valor do número de onda. Para o campo de pressão, Figs. 1(b), 2(b) e 3(b), o método MMHE-D converge com taxa ótima e demonstra a mesma precisão da interpolante, já o método MMHE-C tem a precisão e a taxa de convergência comprometida a medida que k cresce. Nas Figuras 1(c), 2(c) e 3(c), podemos ver os resultados obtidos para o multiplicador de Lagrange pelos métodos híbridos e a interpolante. A taxa de convergência esperada é da ordem de $O(h^{n+0,5})$ que é atingida pela interpolante. No entanto, o que se observa é que os métodos MMHE-C e MMHE-D não atingem esta taxa. Este comportamento se deve a anulação do parâmetro β de estabilização desta variável. Porém é importante ressaltar que este resultado não influencia diretamente as variáveis de interesse, uma vez que a aproximação do multiplicador pelo método MMHE-C se mostra mais preciso que pelo método MMHE-D diferentemente do observado para os campos de velocidade e pressão.

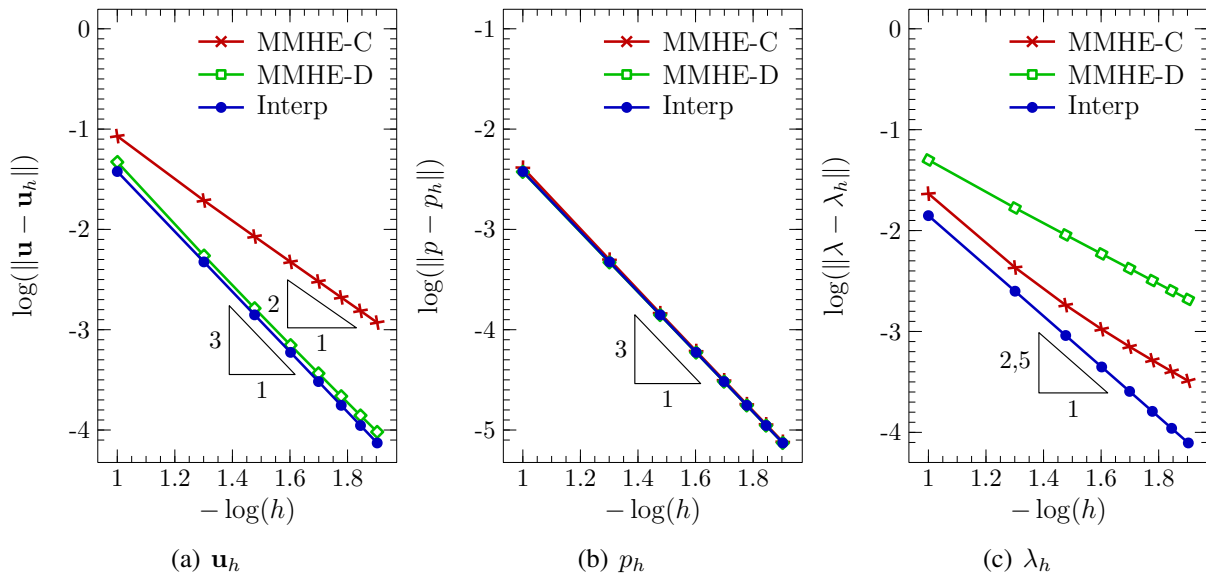


Figura 1: Convergência h para as aproximações $\mathbf{u}_h$, p_h e λ_h pelos métodos MMHE-D, MMHE-C e a interpolante (interp) em um meio homogêneo com número de onda $k = 10$ na norma $L^2(\Omega)$ para elementos quadrilaterais $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$.

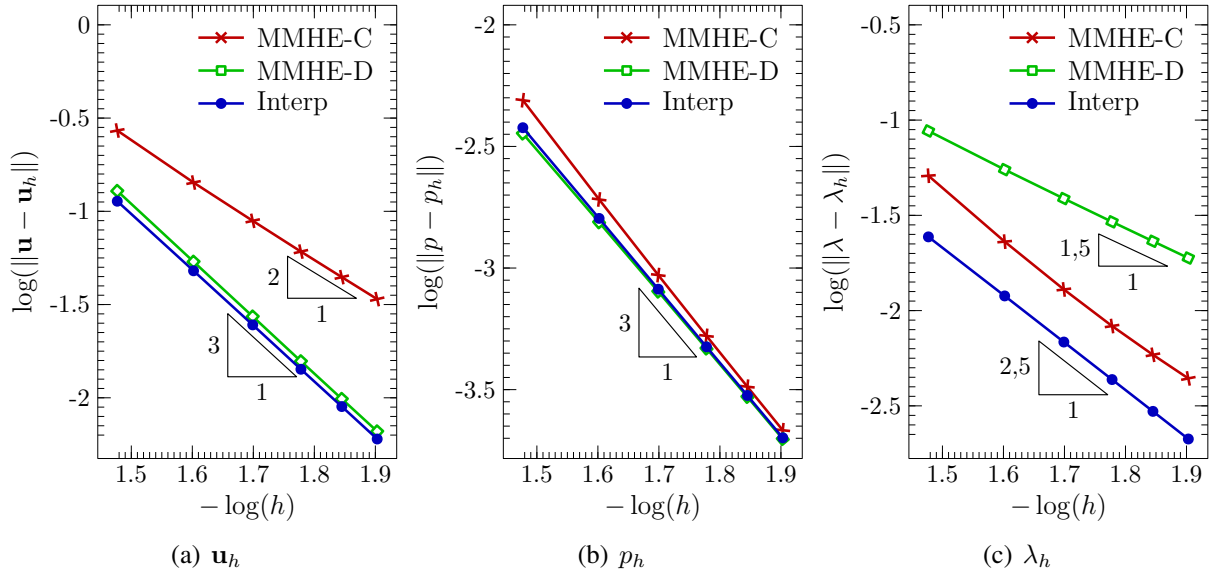


Figura 2: Convergência h para as aproximações u_h , p_h e λ_h pelos métodos MMHE-D, MMHE-C e a interpolante (interp) em um meio homogêneo com número de onda $k = 30$ na norma $L^2(\Omega)$ para elementos quadrilaterais $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$.

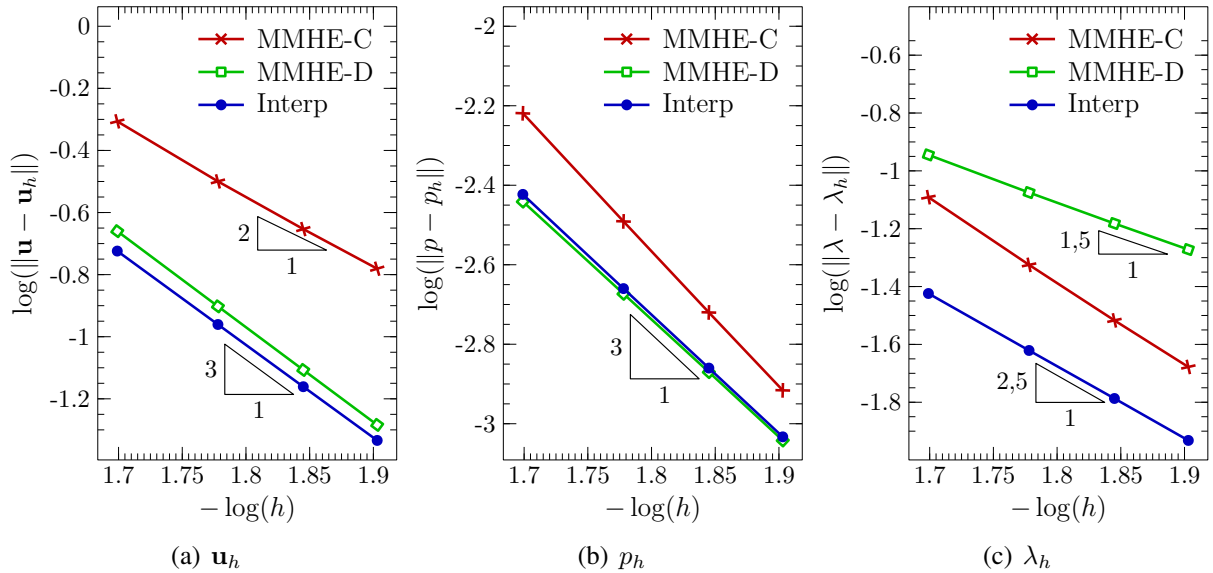


Figura 3: Convergência h para as aproximações u_h , p_h e λ_h pelos métodos MMHE-D, MMHE-C e a interpolante (interp) em um meio homogêneo com número de onda $k = 50$ na norma $L^2(\Omega)$ para elementos quadrilaterais $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$.

6.2 Meio Heterogêneo

No mesmo domínio da seção anterior, aqui, resolvemos a equação de Helmholtz com descontinuidade gerada por diferentes números de onda. Consideramos $k = k_1$ para $x < 0$ e $k = k_2$ para $x > 0$. Neste caso, devemos observar que quando a onda incide com um ângulo θ_1 em um meio k_1 e encontra um meio k_2 temos os efeitos de refração e difração dessa onda que ocorrem na interface entre os meios (ver Figura 4).

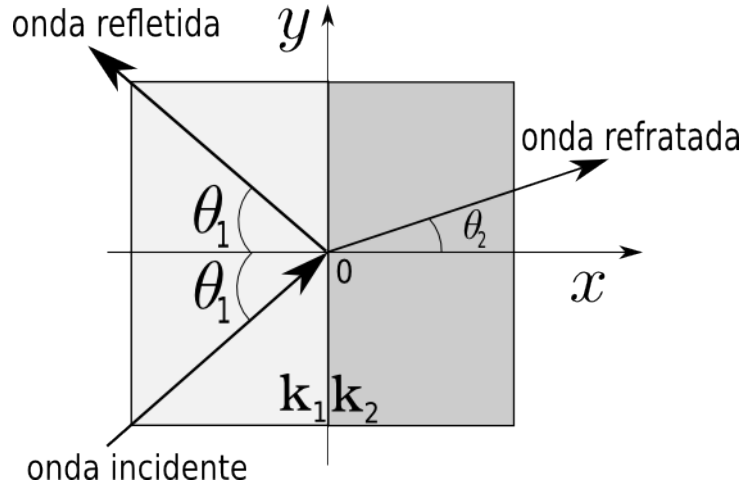


Figura 4: Esquema dos efeitos de refração e difração da onda em um meio heterogêneo.

Desta forma, impondo condições de contorno de Dirichlet e tomando $f(x, y) = 0$, derivamos a seguinte solução exata para este problema

$$\text{para } x < 0 : p(x, y) = \exp[-ik_1(x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)] + R \exp[-ik_1(-x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)]; \quad (37)$$

$$\text{para } x > 0 : p(x, y) = T \exp[-ik_2(x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2)]; \quad (38)$$

com

$$R = (k_1 \cos \theta_1 - k_2 \cos \theta_2) / (k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2),$$

$$T = 2k_1 \cos \theta_1 / (k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2),$$

$$k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1.$$

A Figura 5 apresenta a parte real da solução exata do campo de pressão Eq. (37)-(38) em um meio com valores de onda $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ e ângulo de incidência $\theta_1 = \pi/6$.

Os próximos estudos numéricos objetivam apresentar resultados para um meio heterogêneo com os seguintes pares de números de onda $k_1 = 10$ e $k_2 = 30$ na Figura 6, $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ na Figura 7 e $k_1 = 30$ e $k_2 = 50$ na Figura 8, fixando em todos os casos $\theta_1 = \pi/6$. Novamente, a mesma sequência de malhas uniformes, usada no exemplo anterior, é adotada nos estudos de convergência h desta seção com $l = m = n = 2$, respeitando a relação Eq. (35) em todo o domínio.

Os resultados para meios heterogêneos reforçam a superioridade do método que utiliza multiplicadores descontínuos em relação a formulação MMHE-C, como visto nos estudos realizados em meios homogêneos. As Figuras 6(a), 7(a) e 8(a) exibem o comportamento do campo

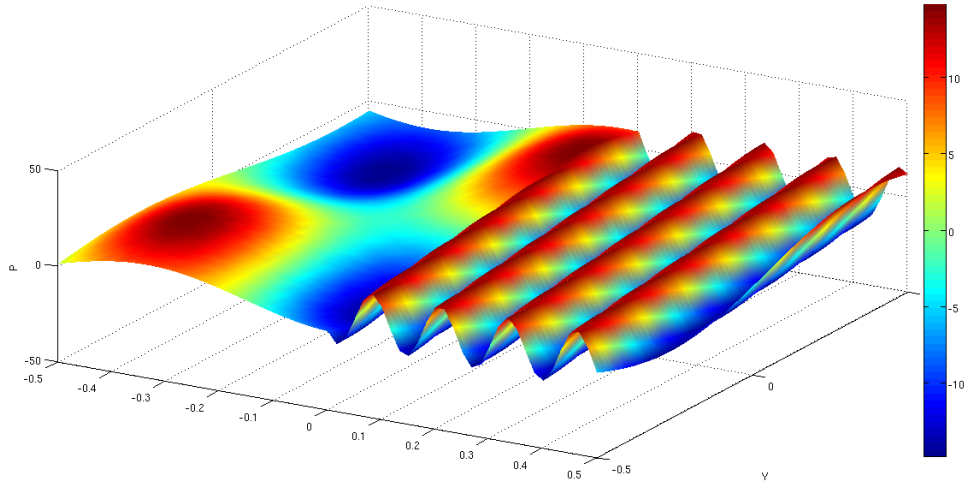


Figura 5: Parte real da solução exata do campo de pressão para $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$.

de velocidade, onde podemos ver que o método MMHE-D converge com taxa ótima para todas as combinações de valores de k e a formulação MMHE-C se mostra menos precisa e converge com taxa ótima apenas para a simulação com número de onda $k_1 = 30$ e $k_2 = 50$. Para o campo de pressão (Figs. 6(b), 7(b) e 8(b)) podemos observar que os métodos MMHE-C e MMHE-D convergem com taxa ótima, porém a formulação com multiplicador contínuo é menos acurada. Já o multiplicador de Lagrange, Figs. 6(c), 7(c) e 8(c), segue o caminho inverso dos resultados obtidos para os campos de velocidade e pressão, pois neste caso o método MMHE-C demonstra ser mais preciso e convergir com taxa superior ao método MMHE-D.

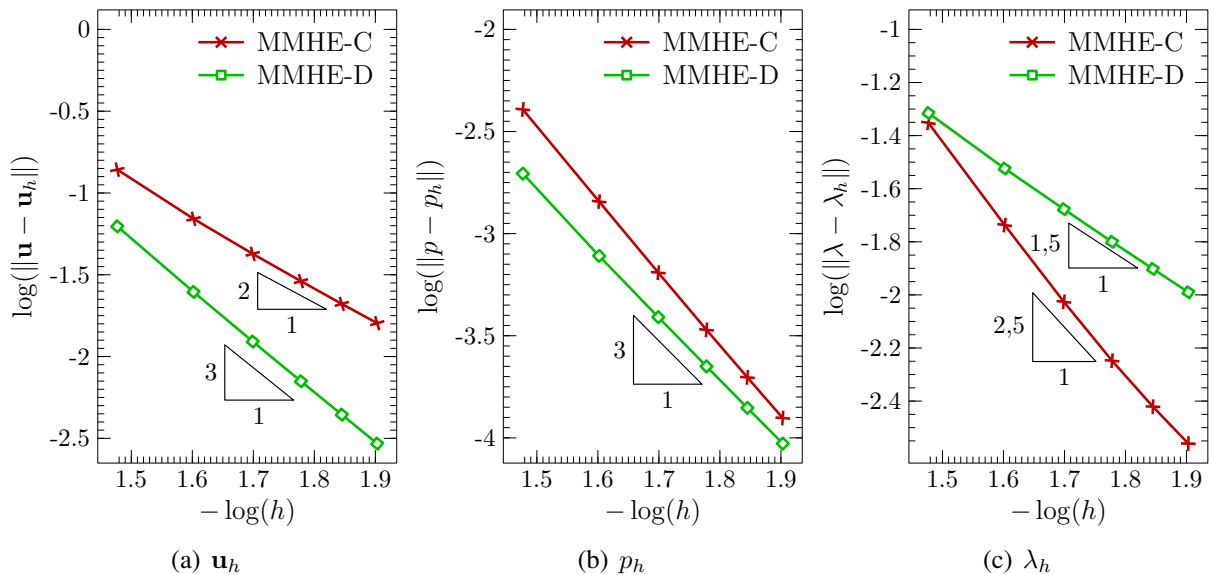


Figura 6: Convergência h para as aproximações u_h , p_h e λ_h pelos métodos MMHE-D e MMHE-C em um meio heterogêneo com números de onda $k_1 = 10$ e $k_2 = 30$ na norma $L^2(\Omega)$ para elementos quadrilaterais $Q_2Q_2 - p_2$.

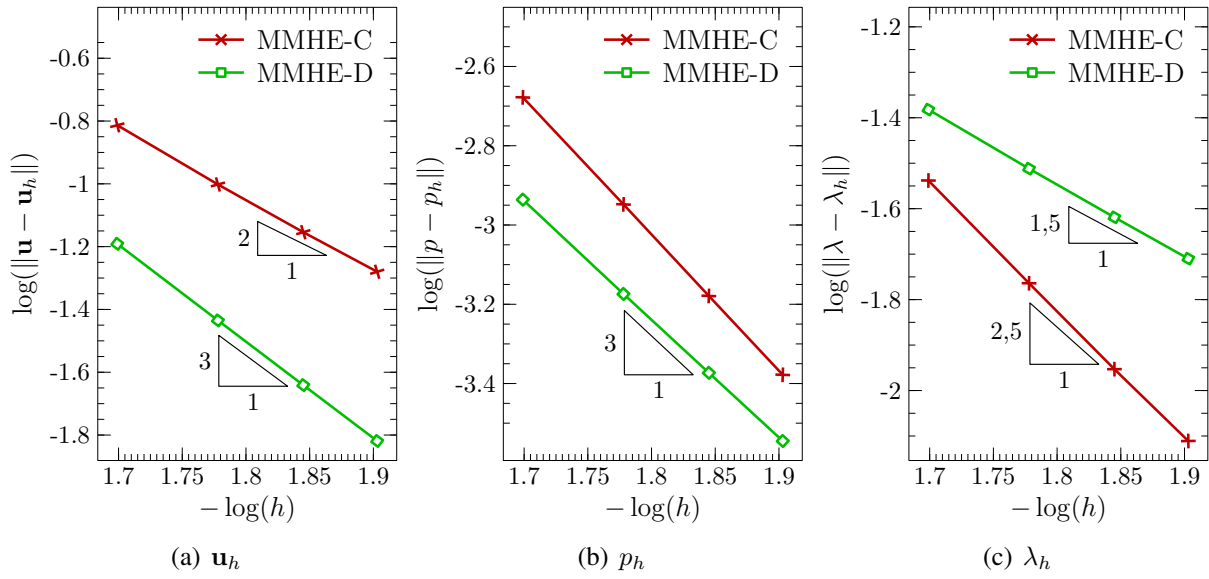


Figura 7: Convergência h para as aproximações u_h , p_h e λ_h pelos métodos MMHE-D e MMHE-C em um meio heterogêneo com números de onda $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ na norma $L^2(\Omega)$ para elementos quadrilaterais $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$.

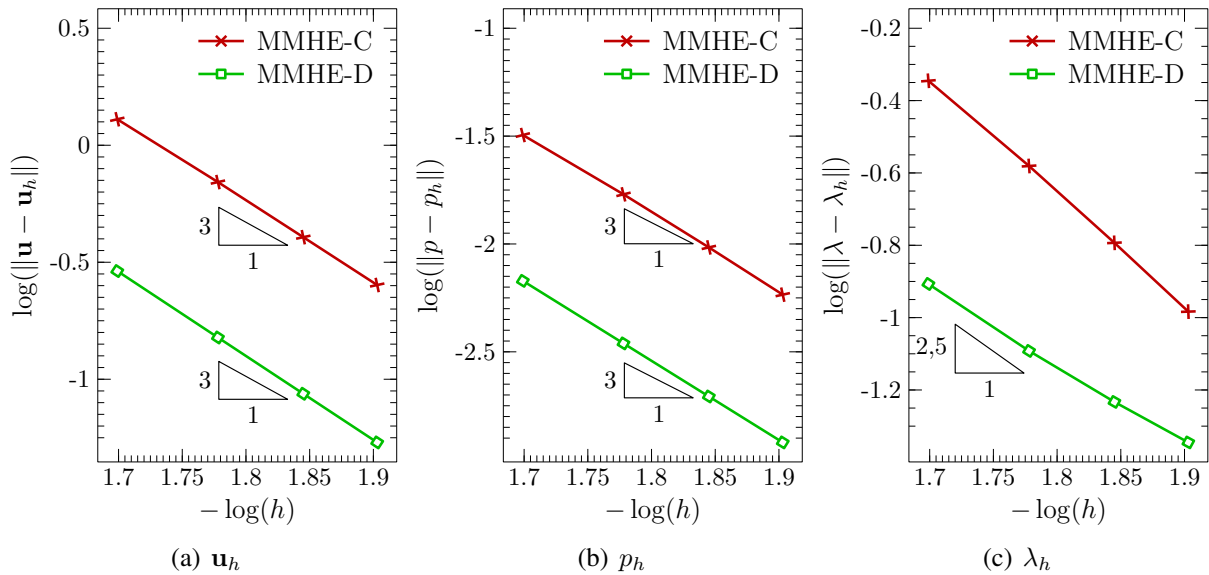


Figura 8: Convergência h para as aproximações u_h , p_h e λ_h pelos métodos MMHE-D e MMHE-C em um meio heterogêneo com números de onda $k_1 = 30$ e $k_2 = 50$ na norma $L^2(\Omega)$ para elementos quadrilaterais $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$.

6.3 Adaptatividade

A implementação da adaptatividade p em um algoritmo de aproximação por elementos finitos híbridos é feita de forma natural. Como as variáveis de interesse definidas em um elemento não exibem qualquer compromisso com os elementos adjacentes, estes problemas no nível do elemento ou locais são vistos como problemas descontínuos semelhante aos métodos de Galerkin descontínuo (DG). Dessa forma, apenas o multiplicador de Lagrange deve receber um tratamento especial para administrar a diferença polinomial entre os elementos, uma vez que a única restrição dos métodos híbridos é que λ seja unicamente determinado nas arestas dos elementos. Assim, nosso algoritmo impõe que, sobre a interface entre dois elementos, o elemento com o polinômio de maior grau prevaleça sobre o de menor grau devendo o multiplicador de Lagrange, nesta interface, ser aproximado pelo polinômio de maior ordem. O critério utilizado para que haja uma distribuição automática de graus polinomiais por elemento surge da comparação entre uma tolerância para o erro ε com o resultado da diferença entre o valor da aproximação do multiplicador λ_h na aresta e a pressão aproximada nos nós do elemento referentes a esta aresta, ou seja

$$\sqrt{\int_{\partial K} (p_h - \lambda_h)^2} \leq \varepsilon, \quad \forall \partial K \in \mathcal{T}_h. \quad (39)$$

Para cada elemento, enquanto não for alcançada esta tolerância em todas as arestas de $K \in \mathcal{T}_h$ o método eleva ao mesmo tempo o grau l , m e n em 1 unidade, caso contrário, o grau permanece o mesmo. Assim, aproveitamos a natureza oscilatória do problema de Helmholtz para detectar as regiões que necessitam de um maior refinamento obtido pelo aumento do grau do polinômio, uma vez que a ordem polinomial exigida é maior em meios com elevado valor de k ou com descontinuidades deste parâmetro.

Voltando ao problema no meio heterogêneo, desejamos obter uma mesma precisão em todo o domínio, ou ainda, uma melhor precisão da aproximação em certa região do domínio onde se desenvolve o problema. Assim, apresentamos resultados que aplicam a metodologia p -adaptativa ao problema de Helmholtz com condições de contorno de Dirichlet, estudado na Seção 6.2. Para este experimento consideramos a tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$ fixa para todos os elementos de uma malha 10×10 com número de onda $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ com ângulo de incidência $\theta_1 = \pi/6$. Vale ressaltar que para a malha escolhida a região do domínio caracterizada pelo número de onda $k_2 = 50$ não satisfaz a relação (35) dando origem a fortes efeitos de poluição numérica como mostra a Figura 9 para a aproximação p_h pelos métodos MMHE-C e MMHE-D. Já a Figura 5 mostra o resultado esperado, neste caso, para o campo de pressão.

Neste contexto, utilizamos o algoritmo p -adaptativo para contornar os efeitos de poluição numérica inerentes deste problema. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 10 e 11 que apresentam os três últimos passos da busca iterativa para atingir a tolerância ε em cada elemento da malha para a aproximação do campo de pressão pelos métodos MMHE-C e MMHE-D, respectivamente. Em ambos os casos fica claro que a região com número de onda igual a 50 exige maior ordem polinomial para aproximar com mesma precisão que a região com menor k , como pode ser visto nos mapas polinomiais Figuras 10(b), 10(d) e 10(f) para o método MMHE-C e Figuras 11(b), 11(d) e 11(f) para o método MMHE-D. Outra importante observação a ser feita é a respeito da distribuição polinomial, que no método que emprega multiplicadores contínuos a ordem polinomial exigida para atingir o valor estipulado para ε em $k_2 = 50$ se propaga para

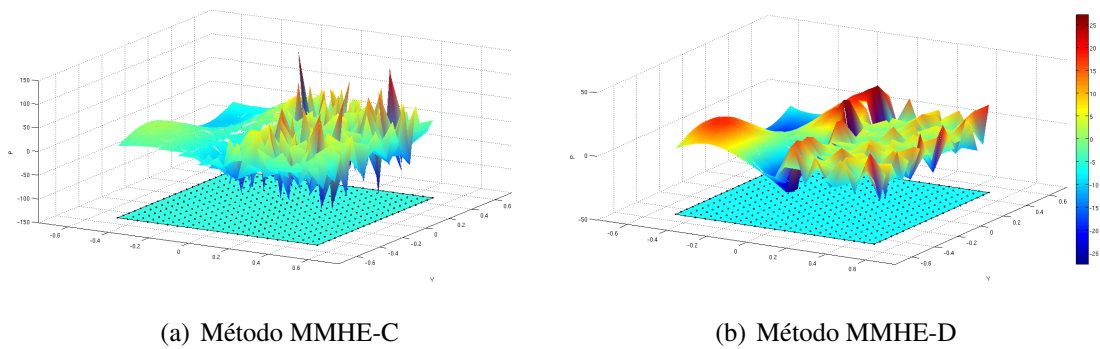


Figura 9: Demonstração da poluição numérica da aproximação p_h pelos métodos MMHE-C e MMHE-D em um meio heterogêneo com $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ em uma malha de 10×10 elementos $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$.

a região de baixo k , Figura 10(f). Por outro lado, o método MMHE-D apresenta uma divisão polinomial com proporções que condizem com k_1 e k_2 , Figura 11(f). Finalmente, alcançada a tolerância ε , vemos nas Figuras 10(e) e 11(e) que a metodologia p -adaptativa cumpriu seu papel de corrigir automaticamente a instabilidade gerada pela poluição numérica tanto para o método MMHE-C quanto para o método MMHE-D.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos uma formulação mista híbrida estabilizada para o problema de Helmholtz. A continuidade do método proposto é imposta via multiplicador de Lagrange identificado como o traço do campo de pressão nas arestas dos elementos conduzindo a um conjunto de problemas locais definidos no nível do elemento e um problema global em função apenas do multiplicador. Dessa forma, o problema global, envolvendo apenas os graus de liberdade do multiplicador é resolvido conduzindo à solução aproximada do multiplicador, que é ligado aos problemas locais para recuperar as aproximações descontínuas das variáveis. Esta metodologia permite tratar naturalmente descontinuidades e adaptatividades do tipo h e p como os métodos de Galerkin descontínuo. Todavia, o método MMHE é facilmente implementado usando a mesma estrutura de dados empregada nos métodos de elementos finitos de Galerkin contínuo.

Os resultados numéricos mostraram que tanto para meios homogêneos quanto heterogêneos o método MMHE com multiplicadores descontínuos são mais precisos e apresentam melhores taxas de convergência do que quando optamos por multiplicadores contínuos. Essa discrepância entre os métodos fica mais evidente quando aumentamos o valor referente ao número de onda k . Por outro lado, se o objetivo for reduzir o custo computacional o método MMHE-C surge como uma ótima alternativa. Além disso, resultados utilizando a metodologia p -adaptativa comprovam a eficiência dos métodos propostos para tratar meios heterogêneos com elevado valor do parâmetro k , que apresentam efeitos de poluição numérica, através da distribuição automática de graus polinomiais por elemento da malha realizada iterativamente que possibilita uma correta descrição do fenômeno estudado.

REFERÊNCIAS

Adams, R., Fournier, J., 1975. Sobolev spaces. Academic press New York.

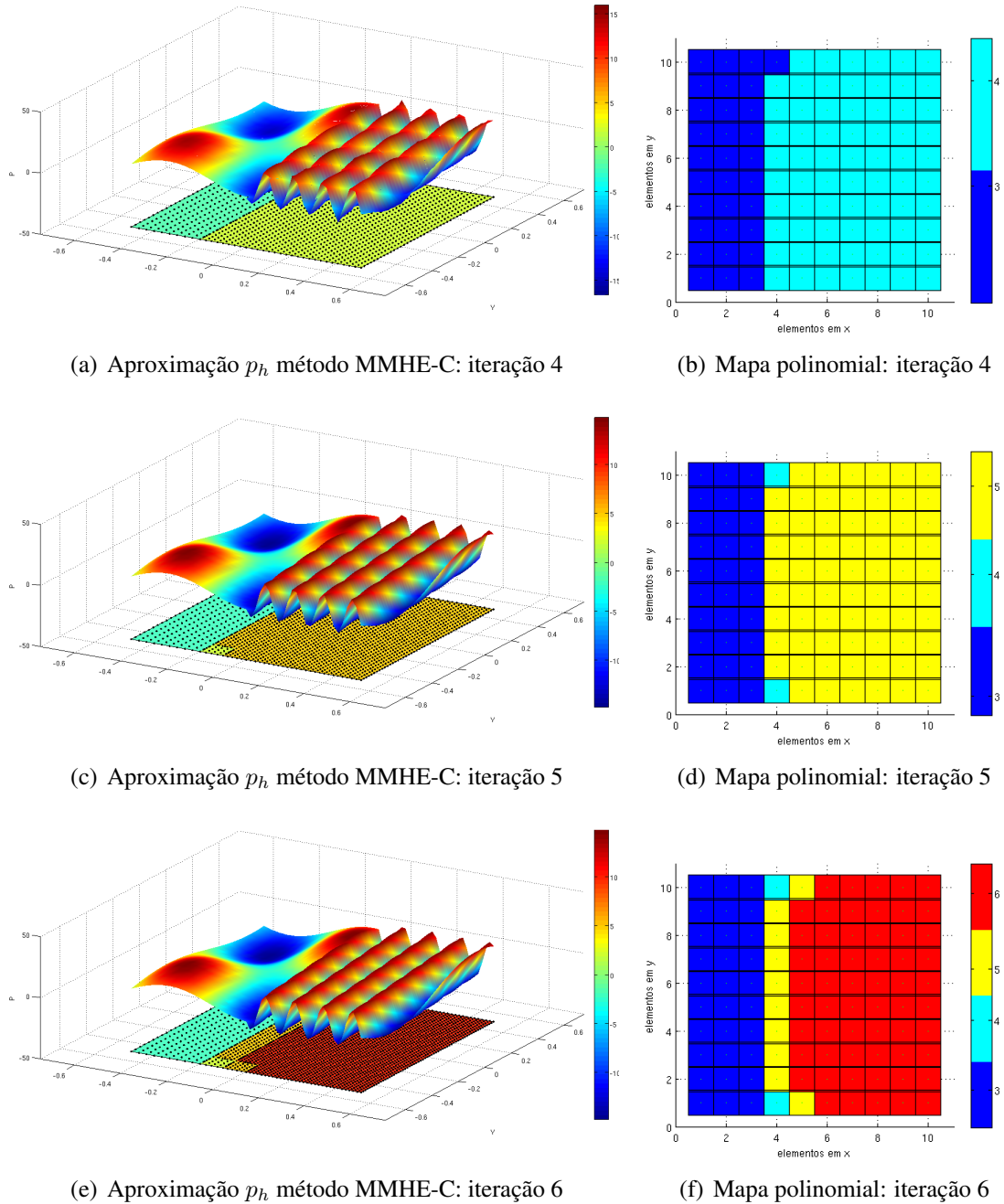


Figura 10: Aproximação do campo de pressão pelo método MMHE-C em um meio heterogêneo com $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ utilizando adaptatividade p iterativamente para atingir a tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$ (esquerda) e o respectivo mapa de cores que explicita a distribuição polinomial em cada elemento da malha (direita).

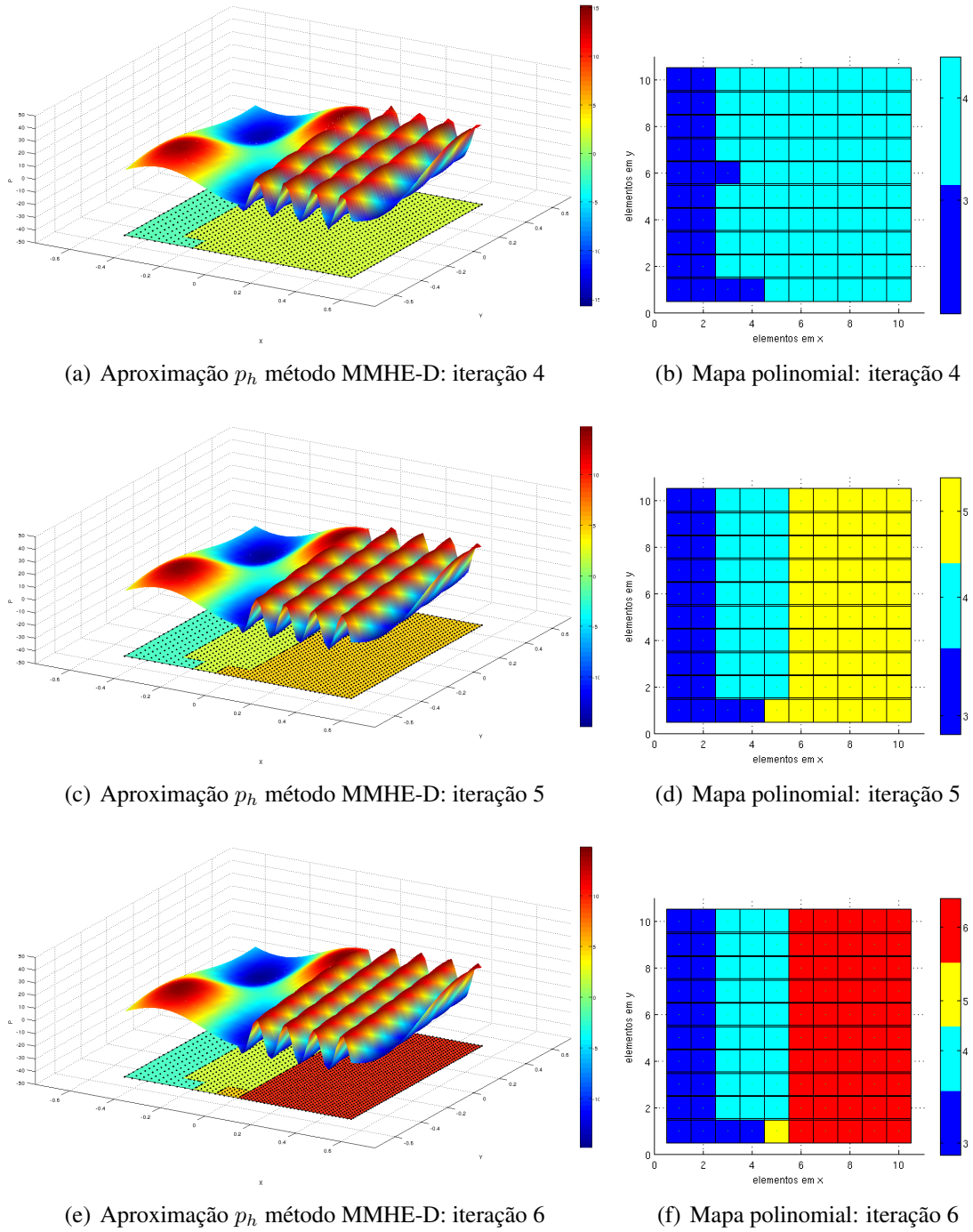


Figura 11: Aproximação do campo de pressão pelo método MMHE-D em um meio heterogêneo com $k_1 = 10$ e $k_2 = 50$ utilizando adaptatividade p iterativamente para atingir a tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$ (esquerda) e o respectivo mapa de cores que explicita a distribuição polinomial em cada elemento da malha (direita).

- Arruda, N. C. B., Loula, A. F. D., Almeida, R. C., 2013. Locally Discontinuous but Globally Continuous Galerkin methods for elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 255, 104–120.
- Babuska, I., Ihlenburg, F., 1995. Dispersion analysis and error estimation of galerkin finite element methods for helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 128, 325–359.
- Babuska, I., Ihlenburg, F., Paik, E., Sauter, S., 1995. A generalized finit element method for solving the helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 128, 325–359.
- Carmo, E., Alvarez, G., Loula, A., Rochinha, F., 2008. A nearly optimal galerkin projected residual finite element method for helmholtz problem 197, 1362–1375.
- Chang, C., 1990. A last-squares finite element method for helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 83, 1–7.
- Correa, M. R., Loula, A. F. D., 2008. Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197, 1525–1540.
- Fernandes, D., 2009. Métodos de elementos finitos e diferenças finitas para o problema de helmholtz. Ph.D. thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica / Brasil.
- Giorgiani, G., Fernández-Méndez, S., Huerta, A., 2013. Hybridizable discontinuous galerkin p-adaptivity for wave propagation problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 72, 1244–1262.
- Gomez-Revuelto, I., Garcia-Castillo, L. E., Llorente-Romano, S., Pardo, D., 2012. A three-dimensional self-adaptive hp finite element method for the characterization of waveguide discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 249–252, 62–74.
- Harari, I., Hughes, T., 1992. Galerkin/last-squares finite element methodsfor the reducedwave equations with nonreflecting bondery conditions in unbonded domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 98, 411–454.
- Igreja, I., Loula, A. F. D., Faria, C. O., 2014. A new hybridized mixed finite element method for heterogenous porous media flow. *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*.
- Ihlenburg, F., 1998. *Finit Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer-Verlag.
- Loula, A., Alvarez, G., do Carmo, E. D., Rochinha, F., 2007. A discontinuous finite element method at element level for helmholtz equation 196, 867–878.
- Loula, A. F. D., Fernandes, D., 2009. A quasi optimal petrov-galerkin method for helmholtz problem. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 80, 1595–1622.
- Monk, P., Wang, D., 1999. A least-squares method for the helmholtz equation. *Comput Method Appl Mech Eng* 175, 121–136.
- Núñez, Y. R., Faria, C. O., Loula, A. F. D., Malta, S. M. C., 2012. A mixed-hybrid finite element method applied to tracer injection processes. *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry* 6 (1), 51–59.