



FORMULAÇÕES AXISSIMÉTRICAS APLICADAS A ESCOAMENTOS MONOFÁSICOS EM MEIOS POROSOS HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS

Luciolo Victor Magalhães e Silva

Márcio Rodrigo de Araújo Souza

Darlan Karlo Elisiário de Carvalho

Paulo Roberto Maciel Lyra

luciolo_victor@hotmail.com

marciosouza@ct.ufpb.br

dkarlo@uol.com.br

prmlyra@padmec.org

UFPE

Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, 50670-901, Recife, Pernambuco, Brasil

Resumo. *Variações bruscas nas propriedades das rochas e elevadas razões de anisotropia, entre outros aspectos, tornam a modelagem e simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo uma tarefa complexa. Formulações clássicas do Método dos Volumes Finitos (MVF) com cálculo do fluxo através de dois pontos (TPFA – Two Point Flux Approximation), não são capazes de lidar com tais condições. Alternativamente, nas formulações do MVF, usualmente chamadas de Multi-Point Flux Approximation (MPFA), o fluxo de Darcy é aproximado por múltiplos pontos de modo que possíveis termos de difusão cruzada, provenientes do não alinhamento entre as direções principais do tensor de permeabilidade e a orientação da malha, sejam representados adequadamente. No presente trabalho duas variantes de esquemas MPFA são aplicados a problemas de escoamento monofásico em domínios axisimétricos. A variante mais popular (MPFA-O) e uma formulação mais robusta para lidar com elevadas razões de anisotropia (MPFA-Full Pressure Support), são modificadas para aplicações em escoamentos próximos de poços, onde variações relevantes de pressão e velocidade ocorrem predominantemente nas direções radial e axial. Para verificar a eficácia da adaptação proposta para os esquemas MPFA, problemas clássicos de difusão axisimétrica são resolvidos.*

Palavras-chave: *Escoamento axisimétrico, Reservatório de Petróleo, Volumes Finitos.*

1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas de interesse da engenharia de reservatórios consiste na determinação dos parâmetros estabelecidos no fluxo de fluidos nas proximidades dos poços. Em casos específicos, como por exemplo em reservatórios onde a heterogeneidade é dada em camadas horizontais, o fluxo em poços verticais pode ser considerado axissimétrico. Esse tipo de consideração possui algumas vantagens em relação às modelagens bi e tridimensionais. Em relação à modelagem bidimensional a abordagem axissimétrica leva em consideração que o fluxo é dado radialmente em termos de um eixo constituído no poço, representando de maneira mais realista a física do problema. Em relação ao modelo tridimensional a consideração axissimétrica permite que o problema seja modelado no plano (r,z) , deixando o problema mais eficiente tanto em termos de modelagem como em termos de processamento de dados.

Desta maneira, foram escolhidas formulações do MVF para a discretização da equação de pressões considerando-se o modelo axissimétrico, essa equação rege o escoamento monofásico em meios porosos e é obtida a partir das equações que representam a Lei da Conservação de Massa e a Lei de Darcy. Essa equação é uma equação diferencial parcial de caráter elíptico e possui um coeficiente de difusão que, em geral, pode variar em cada ponto do domínio, caracterizando assim um problema heterogêneo (CARVALHO, 2005). No contexto desse trabalho esse coeficiente é dado por um tensor de ordem dois e não há restrição quanto às suas componentes onde este pode ser cheio ou diagonal, representando a anisotropia do meio.

As formulações utilizam os esquemas numéricos com aproximação do fluxo por múltiplos pontos, também chamadas de *Multi-Point Flux Approximation* (MPFA), propostas de maneira independente por (AAVATSMARK *et al.*, 1998), (CRUMPTON *et al.*, 1995) e (EDWARDS & ROGERS, 1998). Essas diminuem os efeitos de orientação de malha e melhoram a acurácia das soluções quando comparadas com esquemas com aproximações por dois pontos ou *Two Point Flux Approximation* (TPFA) usados em simuladores comerciais (SOUZA *et al.*, 2013). Desta forma duas variantes das formulações MPFA foram adaptadas para o contexto axissimétrico, sendo essas a formulação do tipo MPFA-O (AAVATSMARK *et al.*, 1998) e a formulação *Full Pressure Support* (MPFA-FPS), proposta por (EDWARDS & ZHENG, 2008).

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação que rege o escoamento monofásico ou equação de pressão, como é chamada, é uma equação elíptica obtida através da combinação da *Lei de Darcy* e *Conservação de Massa*.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \text{ em } \Omega \quad (1)$$

onde Ω é o domínio computacional, $\vec{v}$ é a velocidade de escoamento do fluido e Q é o termo de fonte ou sumidouro, assumindo as seguintes hipóteses: fluido incompressível; meio indeformável, viscosidade e densidade unitária, além de validar todas as considerações que permitem adotar a Lei de Darcy (SILVA, 2004).

A Eq. (1) pode ser escrita em coordenadas cilíndricas para uma representação mais adequada do problema investigado. Dessa forma, obtemos (LYRA *et al.*, 2005):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = Q \text{ em } \Omega \quad (2)$$

onde v_r , v_θ e v_z são as componentes radial, angular e axial, respectivamente, do vetor velocidade. O parâmetro r representa o raio, definido em qualquer ponto do domínio de revolução, em relação a seu eixo de simetria. Dada a axissimetria dos problemas abordados no presente trabalho, a variação de qualquer parâmetro em θ é irrelevante e, portanto, desconsiderada. Para escoamento em meios porosos, sob diversas hipóteses simplificadoras (CARVALHO, 2005), o campo de velocidade é definido, de acordo com a lei de Darcy, da seguinte forma:

$$\vec{v} = -\mathbf{K} \vec{\nabla} p \quad (3)$$

Na Eq. (3) $\mathbf{K}$ é o tensor simétrico de permeabilidades com componentes k_{rr} , $k_{rz} = k_{zr}$ e k_{zz} . A permeabilidade da rocha pode ser representada por um tensor identidade multiplicado por um escalar (meio isotrópico), um tensor diagonal ($k_{rr} \neq 0$, $k_{zz} \neq 0$ e $k_{rz} = 0$) (meio ortotrópico) ou completo ($k_{rr} \neq 0$, $k_{zz} \neq 0$ e $k_{rz} \neq 0$) (meio anisotrópico), que deve satisfazer a condição de elipsidade, i.e., $k_{rr}k_{zz} \geq k_{rz}^2$ (CRUMPTON *et al.*, 2005). Ainda na Eq. (3), o parâmetro $\vec{\nabla} p$ representa o gradiente de pressão, que em coordenadas cilíndricas, para o problema axissimétrico, é definido como (REDDY, 2008):

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \quad (4)$$

onde $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_z$ são os vetores unitários e correspondem, respectivamente, às direções r e z .

O problema representado pela Eq. (1) está sujeito às condições de contorno que podem ser estabelecidas como:

a) Condição de Contorno de Dirichlet: pressão prescrita sobre o contorno Γ_D i.e.:

$$p = g_D, \quad \text{em} \quad \Gamma_D$$

b) Condição de Contorno de Neumann: fluxo prescrito sobre o contorno Γ_N i.e.:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \Gamma_N = g_N, \quad \text{em} \quad \Gamma_N$$

onde g_D e g_N são funções conhecidas, atribuídas às fronteiras de Dirichlet Γ_D e de Neumann Γ_N , respectivamente. $\vec{n}$ é o vetor unitário, normal à fronteira de Neumann Γ_N .

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS DO TIPO MPFA PARA PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS

Integrando a equação (2), obviamente já sem considerar o termo em θ , no domínio computacional axissimétrico Ω , temos:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \right] d\Omega = \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (5)$$

Discretizando o domínio computacional Ω em $\mathcal{N}_{VC}$ volumes de controle que não se sobrepõem (ver Fig. 2a) a integral da Eq. (5) pode ser reescrita através do somatório das integrais definidas em cada volume de controle, obtendo-se:

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_v} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \right] d\Omega_v = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_v} Q d\Omega_v \quad (6)$$

onde Ω_v corresponde ao volume de cada volume de controle axissimétrico que constitui o domínio discretizado.

Tomando a Eq. (6), definida apenas para um volume de controle genérico, cujo volume infinitesimal é definido por $rd\theta drdz$ (Fig. 1), obtemos:

$$\int_{\Omega_v} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \right] r dr d\theta dz = \int_{\Omega_v} Q r dr d\theta dz \quad (7)$$

A integração da Eq. (7) na direção θ e a axissimetria do domínio levam a uma abordagem bidimensional (r, z) do problema. Assim, a referida equação pode ser reescrita como:

$$2\pi \int_{\Omega_A} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \right] r d\Omega_A = 2\pi \int_{\Omega_A} r Q d\Omega_A \quad (8)$$

É importante notar que $d\Omega_A$ representa a área da superfície $drdz$ (ver Fig. 1).

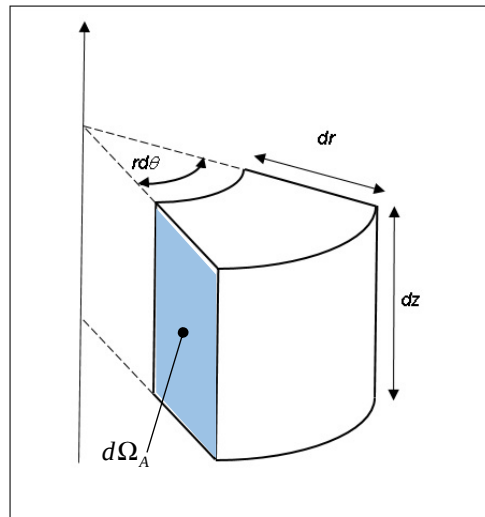


Figura 1. Volume de controle axissimétrico.

Após algumas simplificações e manipulações algébricas (SILVA, 2004), a Eq. (8) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_A} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) \right] d\Omega_A = \int_{\Omega_A} rQd\Omega_A \quad (9)$$

Utilizando o Teorema da Divergência no lado esquerdo da Eq. (9), temos:

$$\int_{\Gamma_A} (r\vec{v}) \cdot \vec{n} \Gamma_A = \int_{\Omega_A} rQd\Omega_A \quad (10)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário, orientado para fora do volume de controle no plano r, z . A fronteira do volume de controle genérico Ω_A é representada por Γ_A .

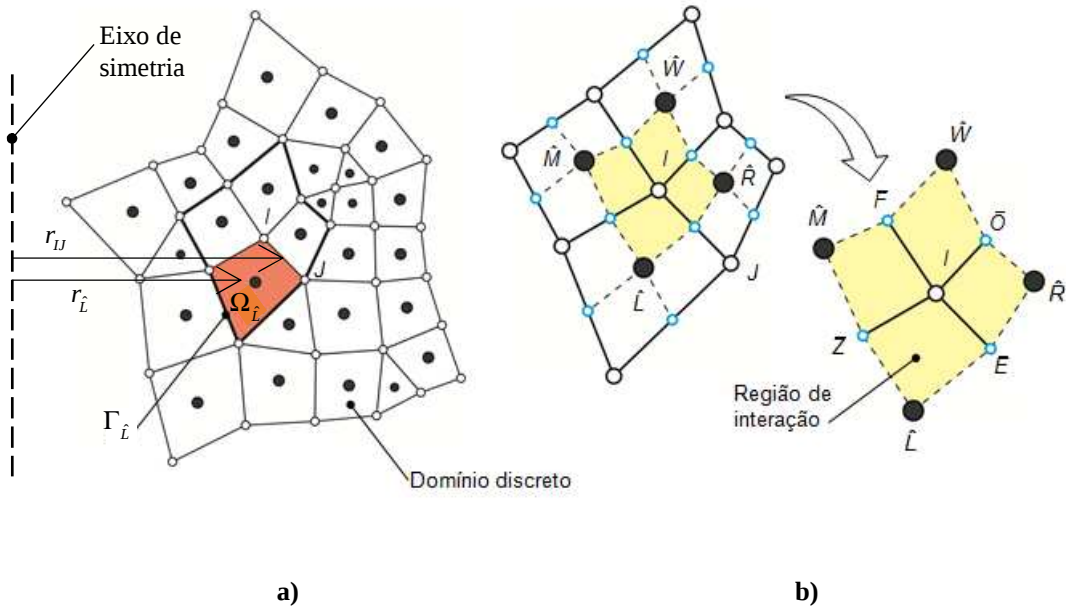


Figura 2. Domínio axissimétrico na forma discreta: a) Indicação do volume de controle $\Omega_{\hat{I}}$; b) Fragmento da malha com região de interação associada ao vértice I.

A equação de pressão na forma discretizada é, por fim, obtida a partir da Eq. (10) com a aplicação do Teorema do Valor Médio nas integrais de superfície e de volume. Dessa forma, tomando como referência o volume de controle genérico $\hat{L}$, com superfícies de controle IJ , destacado na malha ilustrada na Fig. 2a, temos:

$$\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{L}}} r_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = r_{\hat{L}} \bar{Q}_{\hat{L}} \Omega_{\hat{L}} \quad (11)$$

onde r_{IJ} , $\vec{v}_{IJ}$ e $\vec{N}_{IJ}$ são, respectivamente, o raio do eixo de simetria (ver Fig. 2a) até o ponto médio da superfície de controle genérica IJ , a velocidade de Darcy, definida nessa superfície de controle, tal como na Eq. (3), e o vetor normal cuja magnitude corresponde à área dessa face (comprimento da aresta, uma vez que tudo foi dividido por 2π , ver eq. (8)). No lado direito da Eq. (11), $r_{\hat{L}}$ representa o raio medido do eixo de simetria até o centroide do volume

de controle $\hat{L}$, tal como ilustrado na Fig. 2a. Os parâmetros $Q_{\hat{L}}$ e $\Omega_{\hat{L}}$ são, respectivamente, o termo de fonte e o volume (área, uma vez que tudo foi dividido por 2π , ver eq. (8)) associados ao volume de controle $\hat{L}$ (ver Fig. 2a).

Há na literatura diferentes formas de aproximar a Eq. (11). No presente trabalho dois, dentre os mais tradicionais, métodos com aproximação do fluxo por múltiplos pontos (MPFA) são empregados na aproximação da equação de pressão. Assim, a solução numérica obtida para problemas axissimétricos se torna mais robusta, especialmente para problemas com malhas distorcidas e tensores de permeabilidades completos. Essas características levam à soluções inconsistentes quando aproximações com diferenças de dois pontos ou *Two-Point Flux Approximation* (TPFA) são empregadas na discretização da referida equação. A adaptação para o contexto axissimétrico dos métodos MPFA abordados caracteriza a contribuição do presente trabalho. É relevante destacar que a diferença entre a Eq. (11) e a equação discretizada em uma base cartesiana (EDWARDS e ZHENG, 2008; SOUZA *et al.*, 2013) está na existência dos parâmetros r_{IJ} e $r_{\hat{L}}$. Vale ressaltar que para raios r tendendo ao infinito, o campo de solução obtido com coordenadas cilíndricas tende ao campo obtido com base cartesiana (SILVA, 2004; LYRA *et al.*, 2005). Na próxima seção as duas variantes de MPFA são sucintamente descritas.

3.1 Formulação MPFA-O

Na presente seção, a forma mais tradicional, dentre as formulações do tipo MPFA encontradas na literatura (AAVATMARK *et al.*, 1998; EDWARDS e ZHENG, 2008), é sucintamente descrita para problemas axissimétricos. Tomando o domínio discretizado da Fig. 2a como referência, temos que para satisfazer a Eq. (11), a vazão $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$ deve ser calculada em cada superfície de controle IJ dos volumes de controle poligonais que compõem a malha ilustrada. De modo a produzir soluções numéricas consistentes, mesmo para tensores de permeabilidade arbitrários e malhas distorcidas, os esquemas numéricos do tipo MPFA empregam múltiplos pontos na aproximação da vazão em cada superfície IJ . Dessa forma, seguindo a proposta de AAVATSMARK *et al.* (1998) e EDWARDS e ROGERS (1998), regiões de interação (RI) são definidas para cada vértice da malha como uma malha dual (ver Fig. 3a). Em cada RI, vazões são calculadas nas meias arestas com a contribuição dos volumes de controle à sua esquerda ($\hat{L}$, por exemplo) e à sua direita ($\hat{R}$, por exemplo). No caso do fragmento de malha ilustrado na Fig. 3, a vazão na aresta IJ é composta pelas vazões nas meias arestas $\bar{EI}$ (pertencente à RI associada ao vértice I) e $\bar{JE}$ (pertencente à RI associada ao vértice J).

Para entender como essas vazões são calculadas, tomemos novamente a RI associada ao vértice I na Fig. 2b, para a qual temos as meias arestas $\bar{FI}$, $\bar{ZI}$, $\bar{EI}$ e $\bar{OI}$. A vazão para a meia aresta $\bar{EI}$, por exemplo, é dada da seguinte forma:

$$r_{\bar{EI}} \vec{v}_{\bar{EI}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}} = -r_{\bar{EI}} \mathbf{K}_{\hat{L}} \vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}} \quad (12)$$

onde $r_{\bar{EI}}$ é o raio medido do eixo de simetria até o ponto médio da meia aresta $\bar{EI}$.

Devemos observar que dados associados ao volume de controle $\hat{L}$, à esquerda da meia aresta $\bar{EI}$, são utilizados na Eq. (12). O tensor de permeabilidade $\mathbf{K}_{\hat{L}}$ representa a propriedade da rocha associada ao referido volume de controle, que, inclusive, pode ser diferente da propriedade associada ao volume de controle $\hat{R}$ (meios heterogêneos). O gradiente de pressão

$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}$ é obtido a partir de uma aproximação linear da pressão, estabelecida na sub-região de interação $\Delta\hat{L}\bar{E}\bar{Z}$, conforme ilustrado na Fig. 3b (triângulos pintados em vermelho). Após manipulações algébricas, o referido gradiente pode ser escrito da seguinte forma (AAVATSMARK *et al.*, 1998):

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = -\frac{1}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} (p_{\hat{L}}\vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + p_{\bar{E}}\vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}} + p_{\bar{Z}}\vec{N}_{\hat{L}\bar{E}}) \quad (13)$$

onde $\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}$ representa a área do triângulo $\Delta\hat{L}\bar{E}\bar{Z}$ e os vetores $\vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}}$, $\vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}}$ e $\vec{N}_{\hat{L}\bar{E}}$ são as normais às arestas desse triângulo, com magnitudes iguais aos comprimentos das arestas, sempre orientadas para fora. É importante ressaltar que o gradiente de pressão, escrito para as coordenadas r e z pode ser discretizado tal como feito no sistema de coordenadas x, y . Como se vê em REDDY (2008), quando se utiliza coordenada cilíndricas, apenas a componente do gradiente na direção θ tem um parâmetro diferente ($1/r$) do encontrado em gradientes escritos na base cartesiana, porém no caso axissimétrico esta direção é eliminada integrando-se de 0 a 2π , como já mencionando. Obviamente, as variáveis independentes são diferentes em cada uma dessas bases. Maiores detalhes sobre a obtenção do gradiente de pressão na forma apresentada na Eq. (13) podem ser encontrados em SOUZA *et al.* (2013).

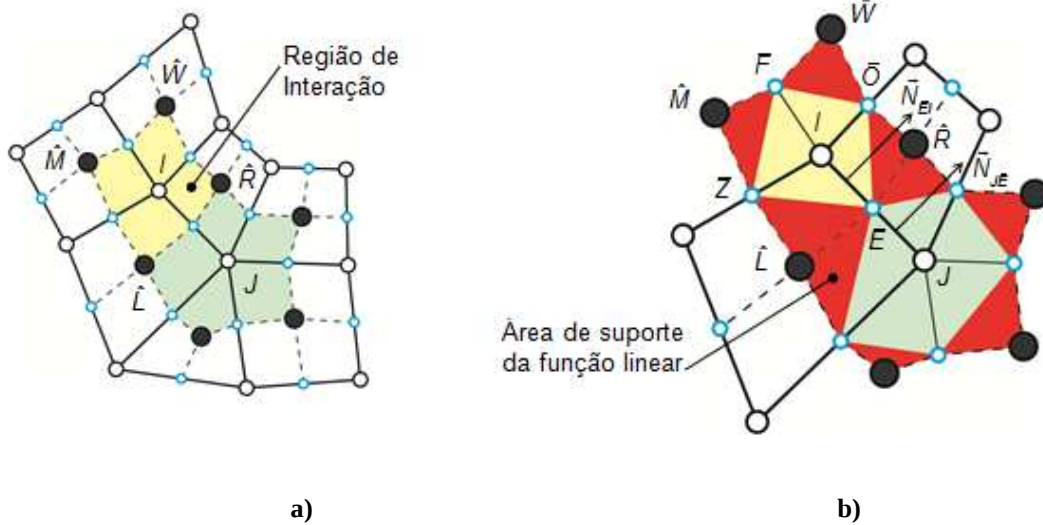


Figura 3 a) Regiões de interação. b) Área de suporte da função de forma que aproxima os gradientes.

Utilizando um raciocínio análogo ao desenvolvido para a meia aresta $\bar{E}I$, as vazões nas meias arestas $\bar{F}I$, $\bar{Z}I$ e $\bar{O}I$ também são escritas com a contribuição dos respectivos volumes de controle à esquerda. Essas quatro equações podem ser escritas na forma matricial, como apresentado na Eq. (14). Esse sistema algébrico local, referente à RI associada ao vértice I , é dependente das pressões nos pontos de colocação, indicados com “chapéu” ($\hat{L}, \hat{R}, \hat{W}, \hat{M}$), e pontos auxiliares, indicados com barra ($\bar{Z}, \bar{E}, \bar{O}, \bar{F}$).

$$\begin{Bmatrix} r_{\bar{E}I} \vec{v}_{\bar{E}I} \cdot \vec{N}_{\bar{E}I} \\ r_{\bar{O}I} \vec{v}_{\bar{O}I} \cdot \vec{N}_{\bar{O}I} \\ r_{\bar{F}I} \vec{v}_{\bar{F}I} \cdot \vec{N}_{\bar{F}I} \\ r_{\bar{Z}I} \vec{v}_{\bar{Z}I} \cdot \vec{N}_{\bar{Z}I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{O}} \\ p_{\bar{F}} \\ p_{\bar{Z}} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Analogamente, para os volumes de controle à direita das meias arestas que concorrem para o vértice I , temos um segundo sistema algébrico local:

$$\begin{Bmatrix} r_{I\bar{E}} \vec{v}_{I\bar{E}} \cdot \vec{N}_{I\bar{E}} \\ r_{I\bar{O}} \vec{v}_{I\bar{O}} \cdot \vec{N}_{I\bar{O}} \\ r_{I\bar{F}} \vec{v}_{I\bar{F}} \cdot \vec{N}_{I\bar{F}} \\ r_{I\bar{Z}} \vec{v}_{I\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{I\bar{Z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{3,4} \\ c_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & d_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} & d_{3,4} \\ d_{4,1} & 0 & 0 & d_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{O}} \\ p_{\bar{F}} \\ p_{\bar{Z}} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, na Eq. (14), bem como $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, na Eq. (15), têm como entradas coeficientes físicos e geométricos, que podem ser calculados em uma etapa de pré-processamento. As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ têm o número de linhas equivalente ao número de meias arestas pertencentes à RI e o número de colunas igual ao número de volumes de controle envolvidos pela RI. As matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ têm número de linhas e colunas equivalentes ao número de meias arestas pertencentes à RI, sendo, para o MPFA-O, sempre quadradas.

Impondo continuidade das vazões nas meias arestas da RI avaliada, escrevemos as pressões nos pontos auxiliares como função das pressões nos pontos de colocação. Dessa forma, temos que:

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq.} = -\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir.} \quad (16)$$

onde $\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq.}$ e $\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir.}$ representem, respectivamente, o valor de vazões nas meias arestas, definidos nas Eqs. (14) e (15).

Com a Eq. (16) obtemos um terceiro sistema algébrico de equações. Após manipulações algébricas para separar os termos associados aos pontos de colocação dos termos associados aos pontos auxiliares, temos:

$$\mathbf{G}\{\bar{p}\} = \mathbf{H}\{\hat{p}\} \quad (17)$$

onde $\{\bar{p}\}$ e $\{\hat{p}\}$ são vetores cujos termos são, respectivamente, as pressões nos pontos de colocação ($p_{\hat{L}}, p_{\hat{R}}, p_{\hat{W}}$ e $p_{\hat{M}}$) e nos pontos auxiliares ($p_{\bar{Z}}, p_{\bar{E}}, p_{\bar{O}}$ e $p_{\bar{F}}$). As matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ podem ser obtidas facilmente separando os termos associados aos pontos de colocação dos termos associados aos pontos auxiliares, como descrito anteriormente.

A solução desse sistema algébrico possibilita escrever as pressões nos pontos auxiliares como função das pressões no centro de cada volume de controle, onde associamos as incógnitas de formulações *cell-centered* (AAVATSMARK *et al.*, 1998). Invertendo a matriz $\mathbf{G}$, po-

demos escrever o sistema algébrico local apenas como função das pressões nos pontos de colocação, como:

$$\{\bar{p}\} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\{\hat{p}\} \quad (18)$$

Substituindo a Eq. (18) nas Eqs. (14) e (15), podemos escrever, em uma forma compacta, as vazões com contribuição à esquerda e à direita de cada meia aresta, respectivamente, como:

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq.} = \mathbf{A}\{\hat{p}\} + \mathbf{B}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\{\hat{p}\} \quad (19)$$

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir.} = \mathbf{C}\{\hat{p}\} + \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\{\hat{p}\} \quad (20)$$

Podemos, então, agrupar todos os parâmetros de natureza física e geométrica e reescrever as Eqs. (19) e (20), como:

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq.} = \mathbf{T}_{Esq.}\{\hat{p}\} \quad (21)$$

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir.} = \mathbf{T}_{Dir.}\{\hat{p}\} \quad (22)$$

onde $\mathbf{T}_{Esq.} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ e $\mathbf{T}_{Dir.} = \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$, pode ser interpretada como uma “matrizes de transmissibilidade”. As Eq. (21) e (22), representam a contribuição aos volumes de controle $\hat{L}$, $\hat{R}$, $\hat{W}$ e $\hat{M}$ por meio das vazões calculadas em suas meias arestas da RI associada ao vértice I . Repetindo o procedimento anterior para todos os volumes de controle da malha, podemos escrever a matriz global $\mathbf{\Lambda}$ do sistema, como:

$$\mathbf{\Lambda}\{\hat{p}\}_G = \{q\}_G \quad (23)$$

onde $\{q\}_G$ representa o vetor de “carregamento” global do sistema, cujas componentes são originados de termos fonte/sumidouro, i.e., poços de injeção e produção, e condições de contorno e $\{\hat{p}\}_G$ representa o campo de pressões nos pontos de colocação dos volumes de controle (aqui assumidos nos centroides dos elementos).

3.2 Formulação MPFA-FPS

Essa formulação é semelhante à anterior, porém ela fornece um Suporte Completo para a pressão, em cada região de interação, de modo que não haja zonas de extrapolação dessa variável.

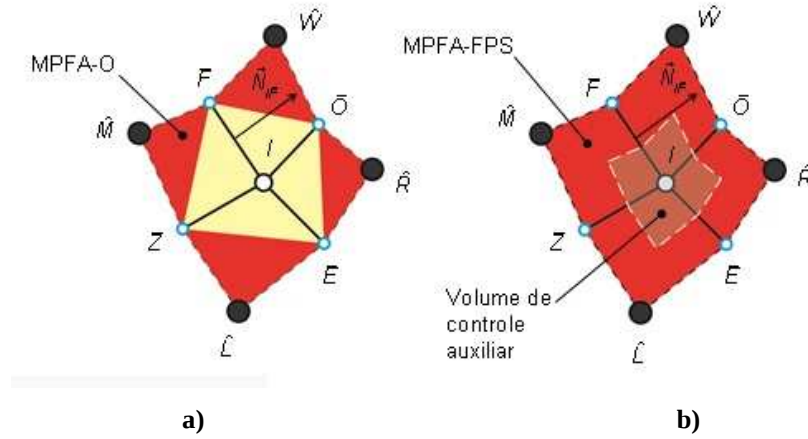


Figura 4. Áreas das sub-regiões de interação: a) linear (MPFA-O Axisimétrico); b) bilinear (MPFA-FPS Axisimétrico).

Devemos observar que, o uso de uma função de interpolação bilinear (quatro pontos) requer um grau de liberdade a mais, em relação à aproximação da pressão adotada no MPFA-O (três pontos), como ilustrado na Fig. 4. Nesse caso, o vértice I , comum aos volumes de controle “envolvidos” pela região de interação avaliada, passa a ser uma incógnita auxiliar nas formulações MPFA-FPS. Um balanço em um volume de controle auxiliar define a equação que complementa o sistema algébrico local.

Seguindo o procedimento adotado na descrição do MPFA-O, definimos a vazão $\vec{v} \cdot \vec{N}$ nas meias arestas dentro de cada região de interação associada a um nó I . A vazão calculada sobre o seguimento $\vec{EI}$, recebe contribuições dos volumes de controle $\hat{L}$ (à esquerda) e $\hat{R}$ (à direita). Comparada ao MPFA-O, a principal diferença das formulações enriquecidas consiste na forma como definimos o gradiente $\vec{\nabla}p$ no interior das regiões de interação.

O campo de pressão p e o vetor posição $\vec{d}$, que possui coordenadas r e z serão escritos em termos das coordenadas naturais (ξ, η) . Esse mapeamento de coordenadas está ilustrado na Fig. 5.

$$p(\xi, \eta) = (1-\xi)(1-\eta)p_1 + \xi(1-\eta)p_2 + (\xi\eta)p_3 + \eta(1-\xi)p_4 \quad (24)$$

$$\vec{d}(\xi, \eta) = (1-\xi)(1-\eta)\vec{d}_1 + \xi(1-\eta)\vec{d}_2 + (\xi\eta)\vec{d}_3 + \eta(1-\xi)\vec{d}_4$$

Dada a dependência entre as coordenadas r, z e ξ, η , podemos escrever as derivadas da função $p(\xi, \eta)$ como a seguir:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (25)$$

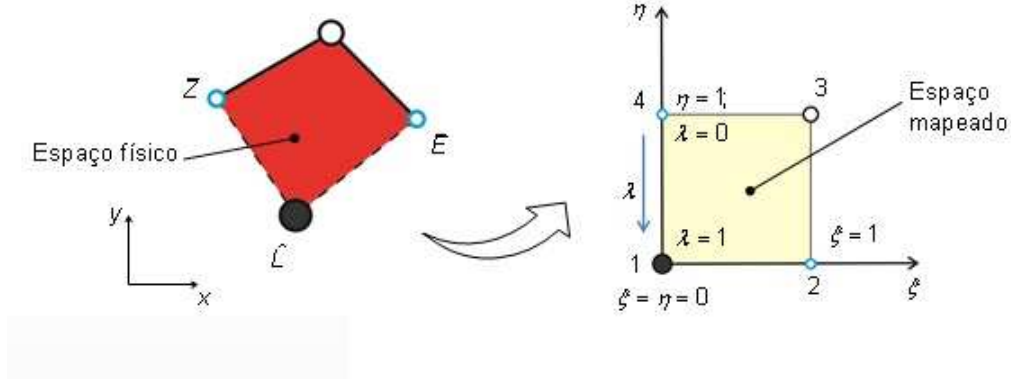


Figura 5. Sub-região de Interação apresentada no espaço físico e mapeado.

ou alternativamente na forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix}, \text{ onde } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (26)$$

A matriz jacobiana $\mathbf{J}$ define a transformação entre os sistemas de coordenadas. Manipulando algebricamente a Eq. (26), o gradiente no espaço físico pode ser dado, para a sub-região de interação $\square \hat{L}\bar{E}I\bar{Z}$, por exemplo, da seguinte forma:

$$\bar{\nabla} p_{\square \hat{L}\bar{E}I\bar{Z}} = \mathbf{J}_{\square \hat{L}\bar{E}I\bar{Z}}^{-1} \bar{\nabla} p(\xi, \eta) \quad (27)$$

Por fim, as coordenadas ξ e η são escritas de acordo com o ponto de quadratura onde cada fluxo é calculado. Tomando, por exemplo, a meia aresta $\bar{E}I$, a vazão $r_{\bar{E}I} \bar{\mathbf{v}}_{\bar{E}I} \cdot \bar{\mathbf{N}}_{\bar{E}I}$, ilustrada na Fig. 6, calculado em $\xi=1$ e $\eta=(1-\lambda)$, onde λ é um parâmetro normalizado, que pode variar continuamente ao longo da referida meia aresta ($0 \leq \lambda \leq 1$) (ver Fig. 6b).

A vazão $r_{\bar{E}I} \bar{\mathbf{v}}_{\bar{E}I} \cdot \bar{\mathbf{N}}_{\bar{E}I}$ é então computada com a contribuição dos dois volumes de controle que compartilham a meia aresta. Inicialmente, a contribuição do volume de controle $\hat{L}$ (à esquerda) é considerada. A vazão na meia aresta $\bar{E}I$ é aproximada como:

$$r_{\bar{E}I} \bar{\mathbf{v}}_{\bar{E}I} \cdot \bar{\mathbf{N}}_{\bar{E}I} = -r_{\bar{E}I} \mathbf{K}_{\hat{L}} \bar{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}I\bar{Z}} \cdot \bar{\mathbf{N}}_{\bar{E}I} \quad (28)$$

onde o gradiente de pressão $\bar{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}I\bar{Z}}$ é calculado de acordo com a Eq. (27).

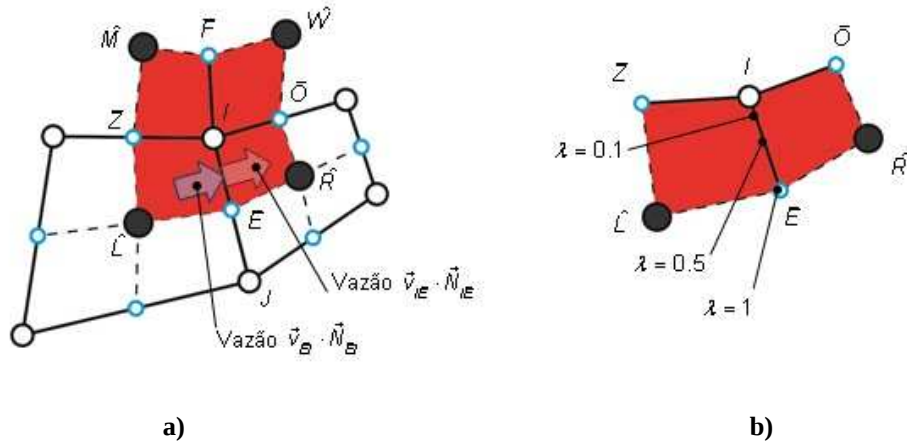


Figura 6. Ponto de quadratura onde a continuidade dos fluxos é imposta para a meia aresta (i.e., onde o fluxo utilizado no cálculo da vazão é obtido): a) Representação do fluxo/vazão calculada no ponto de quadratura da semi-aresta. b) Parâmetro λ .

Escrevendo a Eq. (28) para as outras meias arestas da região de interação, o sistema algébrico local com contribuição dos volumes de controle à esquerda das meias arestas é definido, tal como no MPFA-O, como:

$$\begin{Bmatrix} r_{\hat{E}\hat{I}} \vec{v}_{\hat{E}\hat{I}} \cdot \vec{N}_{\hat{E}\hat{I}} \\ r_{\hat{O}\hat{I}} \vec{v}_{\hat{O}\hat{I}} \cdot \vec{N}_{\hat{O}\hat{I}} \\ r_{\hat{F}\hat{I}} \vec{v}_{\hat{F}\hat{I}} \cdot \vec{N}_{\hat{F}\hat{I}} \\ r_{\hat{Z}\hat{I}} \vec{v}_{\hat{Z}\hat{I}} \cdot \vec{N}_{\hat{Z}\hat{I}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & b_{1,4} & b_{1,5} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 & b_{2,5} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 & b_{3,5} \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{E}} \\ p_{\hat{O}} \\ p_{\hat{F}} \\ p_{\hat{Z}} \\ p_{\hat{I}} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Analogamente, podemos obter a vazão com a contribuição do volume de controle $\hat{R}$ (à direita). Nesse caso, a sub-região de interação é definida pelo polígono $\square \hat{R}\hat{O}\hat{I}\hat{E}$. Sendo assim, é montado um sistema algébrico local para os volumes de controle à direita das meias arestas. Impondo continuidade da vazão sobre as meias arestas da região de interação avaliada, é possível separar a pressão nos pontos de colocação ($p_{\hat{L}}$, $p_{\hat{R}}$, $p_{\hat{W}}$ e $p_{\hat{M}}$) das pressões nos pontos auxiliares ($p_{\hat{E}}$, $p_{\hat{O}}$, $p_{\hat{F}}$, $p_{\hat{Z}}$ e $p_{\hat{I}}$). Seguindo o mesmo princípio utilizado para o MPFA-O, temos:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & c_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & c_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_{1,1} + d_{1,1}) & b_{1,2} & 0 & b_{1,4} & (b_{1,5} + d_{1,5}) \\ b_{2,1} & (b_{2,2} + d_{2,2}) & d_{2,3} & 0 & (b_{2,5} + d_{2,5}) \\ 0 & b_{3,2} & (b_{3,3} + d_{3,3}) & d_{3,4} & (b_{3,5} + d_{3,5}) \\ d_{4,1} & 0 & b_{4,3} & (b_{4,4} + d_{4,4}) & (b_{4,5} + d_{4,5}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{E}} \\ p_{\hat{O}} \\ p_{\hat{F}} \\ p_{\hat{Z}} \\ p_{\hat{I}} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Conforme mencionado anteriormente, o grau de liberdade no vértice I (p_I), característico dos esquemas FPS, requer uma equação a mais para permitir que o sistema algébrico descrito na Eq. (30) seja determinado. A equação adicional desse sistema é obtida a partir do balanço de massa no volume de controle auxiliar, conforme ilustrado na Fig. 7.

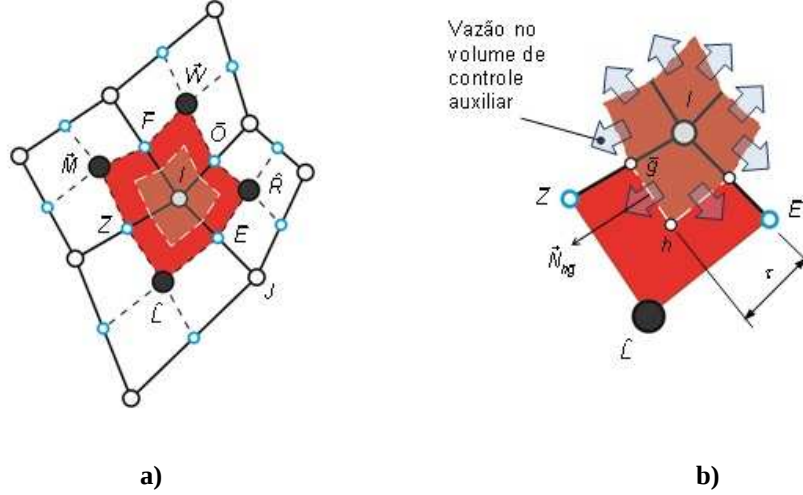


Figura 7. Volume de controle auxiliar no esquema MPFA-FPS: a) Fragmento de malha com região de Interação associada ao vértice I; b) Indicação dos fluxos através das superfícies deste VC auxiliar.

Utilizando a equação (11) para o volume de controle auxiliar Ω_{aux} , ilustrado nas Fig. 7, podemos obter a equação necessária à resolução do sistema algébrico local.

O fluxo na aresta $\bar{gh}$ é definido substituindo devidamente as coordenadas paramétricas de acordo com o ponto de quadratura desejado. Na aresta avaliada, os parâmetros ξ e η são dados da seguinte forma:

$$\xi = 1 - \tau; \quad \eta = 1 - \tau(1 - \gamma) \quad (31)$$

As constantes τ e γ representam, respectivamente, o tamanho do volume de controle auxiliar, $(0,1]$, como ilustrado na Fig. 8, e um ponto de quadratura definido ao longo da aresta onde a “vazão auxiliar” é calculada (aresta $\bar{gh}$). A orientação de γ (normalizada entre 0 e 1), é ilustrada na Fig. 8b (seta branca). É fácil verificar que $\gamma=1$ implica em $\eta=1$ e a “vazão auxiliar” é calculado no ponto $\bar{g}$.

A orientação de γ (normalizada entre 0 e 1) é ilustrada na Fig. 9a (seta branca). É fácil verificar que $\gamma=1$ implica em $\eta=1$ e a “vazão auxiliar” é calculado no ponto $\bar{g}$. Para $\gamma=0$, temos $\eta=1-\tau$, que equivale a um ponto de quadratura coincidente com o ponto h .

O fluxo na aresta avaliada é dado por:

$$r_{\bar{gh}} \vec{v}_{\bar{gh}} \cdot \vec{N}_{\bar{gh}} = -r_{\bar{gh}} \mathbf{K}_{\bar{L}} \vec{\nabla} p_{\bar{L}\bar{E}\bar{I}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{gh}} \quad (32)$$

Assim, a Eq. (30) pode ser reescrita de maneira compacta como:

$$\mathbf{H}_{FPS} \{ \hat{p} \} = \mathbf{G}_{FPS} \{ p_{aux} \} \quad (33)$$

onde os vetores $\{\hat{p}\}$ e $\{p_{aux}\}$ contém, respectivamente, as pressões nos pontos de colocação e nos pontos auxiliares, sendo, esses últimos, os pontos médios $\bar{p}$ e o vértice p_i da região de interação.

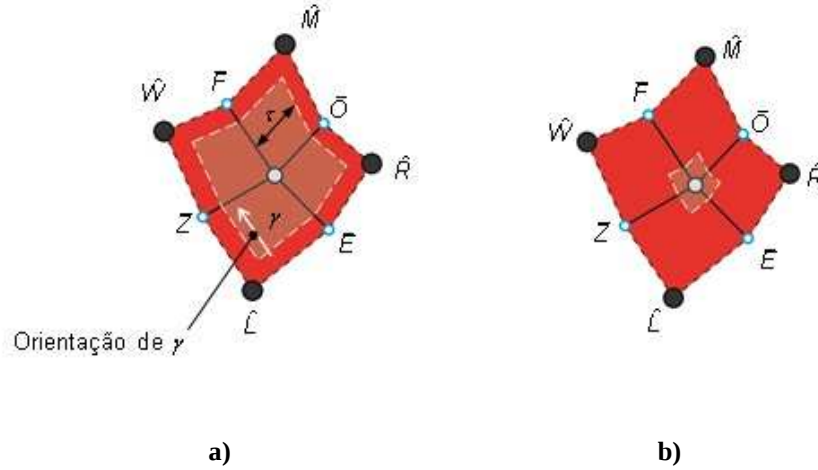


Figura 8. Parametrização do volume de controle auxiliar: a) Orientação do ponto de quadratura e definição do tamanho do volume de controle auxiliar ; b) Representação do volume de controle auxiliar.

As pressões nos pontos auxiliares são escritas como função dos pontos de colocação.

$$\{p_{aux}\} = \mathbf{G}_{FPS}^{-1} \mathbf{H}_{FPS} \{\hat{p}\} \quad (34)$$

As vazões nas meias arestas de cada RI são escritas com dependência apenas das pressões associadas aos pontos de colocação, tal como feito nas Eqs. (19) e (20) na descrição do MPFA-O.

Novamente, podemos escrever o sistema global, similar à Eq. (23), cuja solução fornece o campo de pressão nos pontos de colocação dos VC.

4 RESULTADOS

Nessa seção serão avaliados exemplos afim de avaliar o desempenho das formulações submetidas a problemas apresentados na literatura. Além da análise qualitativa será utilizado a norma apresentada na Eq. (41) para a quantificação dos erros.

$$E_p^{L_2} = \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} (p(\vec{x}) - \hat{p})^2 \Omega_{\hat{L}} / \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \Omega_{\hat{L}} \right]^{1/2} \quad (41)$$

onde $p(\vec{x})$ e $\hat{p}$ são os valores da pressão em cada ponto de colocação $\vec{x}$, obtidos por meio das soluções analítica e numérica, respectivamente. O termo de ponderação $\Omega_{\hat{L}}$ é o volume do elemento discreto (i.e., o volume finito) axissimétrico avaliado

As taxas de convergência nas aproximações numéricas dos campos de R_α com $\alpha = p(\text{pressão})$, são calculadas, como:

$$R_\alpha = \frac{\log[E_\alpha^{L_2}(h_2)/E_\alpha^{L_2}(h_1)]}{\log(h_2/h_1)}, \quad \alpha = p \quad (42)$$

onde h é o tamanho (uniforme) das subdivisões do domínio em cada direção coordenada (r e z).

4.1 Escoamento monofásico nas proximidades de um poço em reservatório homogêneo e isotrópico

Esse exemplo, obtido de KREITH e BOHN (2001), consiste na avaliação da distribuição de pressões em um reservatório de petróleo isotrópico e homogêneo avaliado nas proximidades de um poço. A geometria do problema consiste em um sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo $e_s = \{0, 0; 0, 1\}^T$, de um quadrado com dimensões unitárias $[0; 1]^2$. A distância entre o domínio e o eixo de simetria é $r_0 = 0, 2$. O reservatório está submetido a uma pressão unitária em $r = r_0 = 0, 2$ e uma pressão nula em $r = R = 1, 2$. Nas faces superiores e inferiores são estabelecidos condições de fluxo nulo. A Fig. 9 apresenta as condições de contorno e a geometria do problema.

O tensor de permeabilidades para o problema é dado por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

A solução analítica do problema é dada pela Equação 44.

$$p(r) = p_{r_0} + \left[\frac{\log(r/r_0)}{\log(R/r_0)} \right] (p_R - p_{r_0}) \quad (44)$$

onde r_0 e R representam, respectivamente, os raios correspondentes às faces mais próxima e mais distante do eixo de simetria. A posição radial em qualquer ponto do domínio é representada pelo parâmetro r . As pressões p_{r_0} , p_R e p_r correspondem aos raios mencionados.

O presente problema foi avaliado com uma malha quadrangular estruturada com 8x8, 16x16, 32x32 e 64x64 subdivisões.

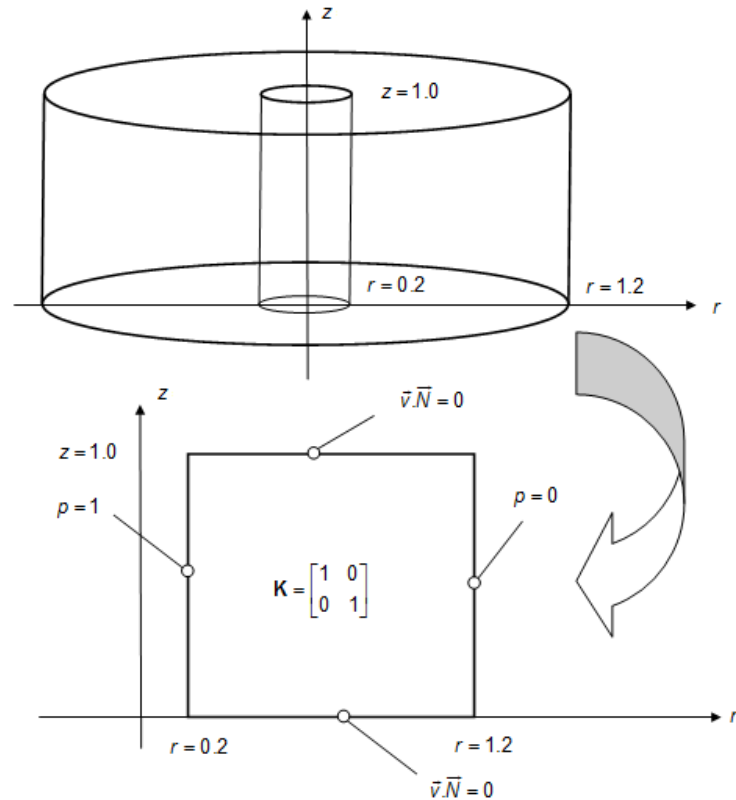


Figura 9. Geometria e condições de contorno do problema.

A Fig. 10 apresenta o perfil de pressões ao longo do eixo radial, sendo parte a) relativa ao MPFA-O Axissimétrico e a parte b) relativa ao MPFA-FPS-Axissimétrico.

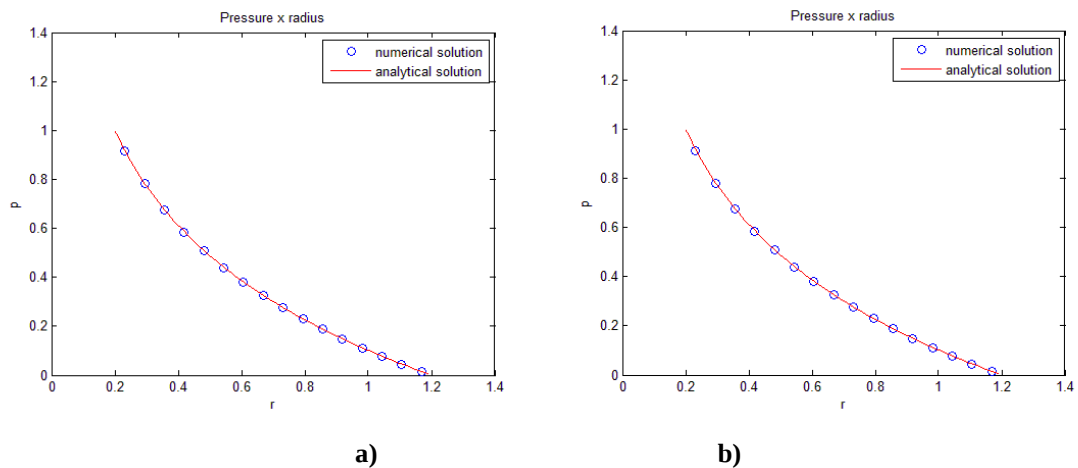


Figura 10. Perfil de pressões ao longo do eixo r: a) MPFA-O Axissimétrico; b) MPFA-FPS-Axissimétrico.

A Fig. 11 apresenta a distribuição de pressões no domínio utilizando uma malha com 64x64 elementos e a formulação MPFA-O Axissimétrica.

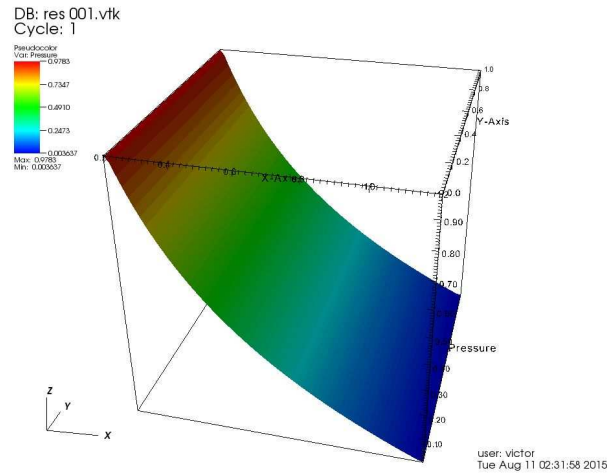


Figura11. Elevação do campo de pressão obtida com malha com 64x64 subdivisões utilizando MPFA-O.

Os resultados apresentados na Fig. 10 e Tabela 1 mostram excelente concordância entre as formulações numéricas abordadas e a solução analítica. Os erros diminuem com o refinamento da malha e a taxa de convergência obtida é próxima de 2, mesmo para malhas pouco refinadas, tal como esperado.

Na Tabela 1, erros na norma L_2 , e correspondentes taxas de convergência são apresentados para o campo de pressão com os métodos MPFA-O e MPFA-FPS. Os valores são os mesmos como esperado uma vez que temos malha cartesiana e meio homogêneo e isotrópico.

Tabela 1. Erros e taxas de convergências para o caso analisado.

Método	Norma / taxa de convergência	$1/h = 8$	$1/h = 16$	$1/h = 32$	$1/h = 64$
MPFA-O	$E_p^{L_2}$	$7,28 \times 10^{-3}$	$1,89 \times 10^{-3}$	$4,78 \times 10^{-4}$	$1,19 \times 10^{-4}$
	$R_p^{L_2}$	----	1,94	1,98	1,99
MPFA-FPS	$E_p^{L_2}$	$7,28 \times 10^{-3}$	$1,89 \times 10^{-3}$	$4,78 \times 10^{-4}$	$1,19 \times 10^{-4}$
	$R_p^{L_2}$	----	1,94	1,98	1,99

4.2 Escoamento monofásico nas proximidades o poço em “reservatório” isotrópico e homogêneo com termo fonte uniformemente distribuído

A geometria do problema consiste em um sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo de simetria $e_s = \{0,0;0,1\}^T$ com distância $r_0 = 0$, de um quadrado com dimensões $[0;5]^2$. As condições de contorno são definidas da seguinte forma: fluxo nulo é imposto

sobre a face esquerda (em $r = r_0$) do domínio. Isso representa a simetria do problema em relação ao eixo de revolução. Na face direita, $r = R = 5$, um valor nulo de pressão é atribuído. Nas faces superior e inferior, fluxo nulo também é atribuído, representando superfícies isoladas (SILVA, 2004). Foi admitida uma fonte uniformemente $\bar{Q}$, distribuída no domínio. Trata-se de mais um problema acadêmico para verificação da formulação axissimétrica. A Figura 12 apresenta as condições de contorno e a geometria do problema.

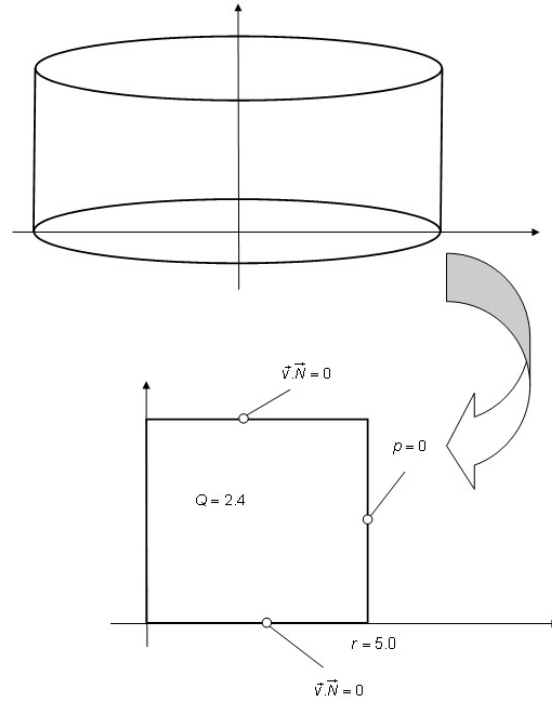


Figura 12. Geometria e condições de contorno do problema.

O tensor de permeabilidades é dado, ao longo de todo domínio, por:

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}, \quad \text{com} \quad k = 2 \quad (45)$$

Para esse problema foi utilizado uma malha estruturada quadrilateral com 8x8, 16x16, 32x32 e 63x63 subdivisões.

A Figura 13 mostra o perfil de pressões ao longo do eixo radial para o problema utilizando as formulações MPFA-O Axissimétrico (parte a), com malha 8x8, e a formulação FPS-Axissimétrica (parte b) para malha de densidade igual a 32x32. A solução analítica é dada em vermelho e a numérica em azul. Novamente os resultados com ambas as formulações são idênticos uma vez que o meio é novamente homogêneo e isotrópico. A solução analítica é dada pela expressão:

$$p(r) = \frac{Q}{4k}(R^2 - r^2) \quad (46)$$

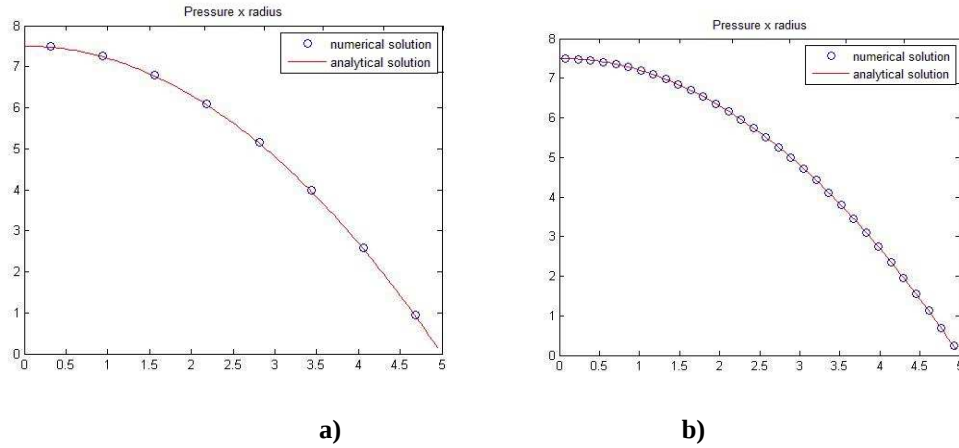


Figura 13. Perfil de pressões ao longo do eixo r : a) MPFA-O (malha 8x8); b) MPFA-FPS (malha 32x32).

Com os resultados obtidos julgamos que a formulação se mostrou capaz de reproduzir problemas desse tipo, lidando bem com a presença de meios com termos de fonte distribuída no domínio.

4.3 Escoamento monofásico nas proximidades do poço em reservatório anisotrópico e homogêneo com termo fonte uniformemente distribuído

Esse exemplo possui as mesmas características geométricas do problema 4.2, com exceção do tensor de permeabilidades que é anisotrópico e dado por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \quad (35)$$

As formulações MPFA-O e FPS foram testadas para esse caso, utilizando uma malha estruturada quadrangular com 8x8, 16x16, 32x32 e 64x64 subdivisões. Nas Fig. 14 e 15 o campo de pressão é ilustrado para malhas quadrangulares com diferentes densidades de malha.

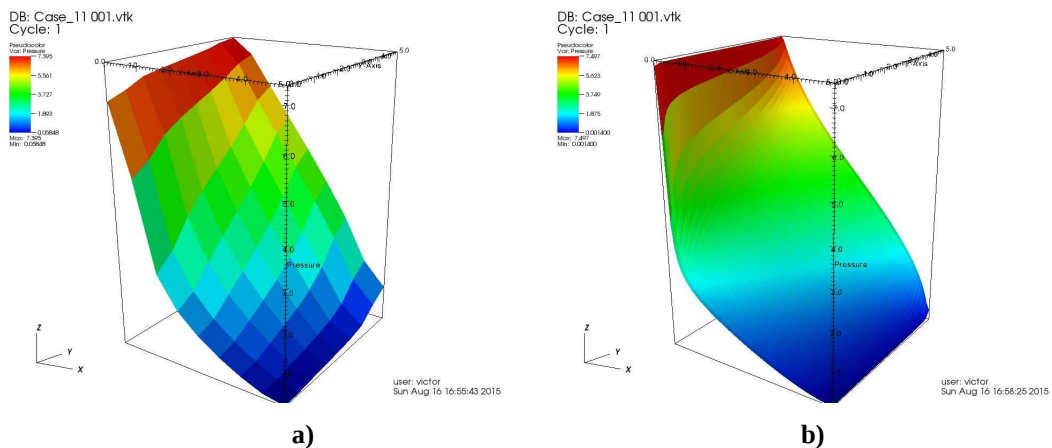


Figura 14. Distribuição de pressões no domínio, formulação MPFA-O: a) Malha com 8x8 volumes de controle; b) malha com 64x64 volumes de controle.

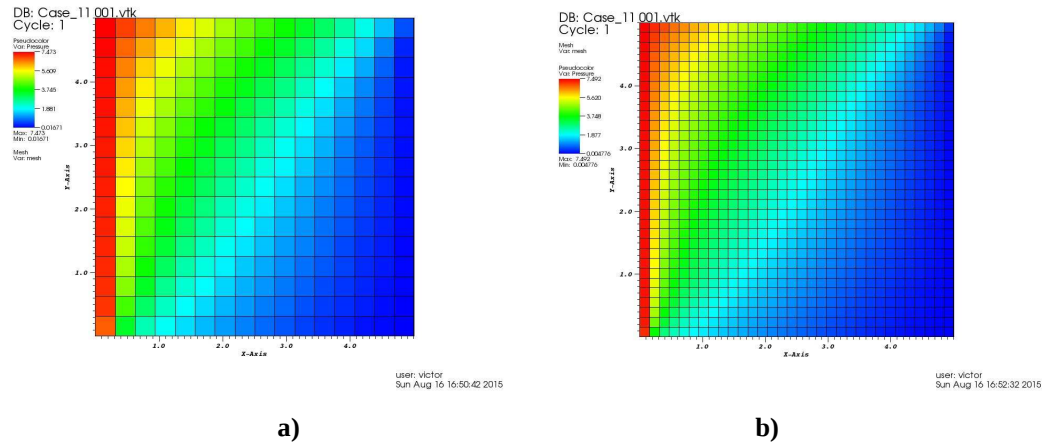


Figura 15. Distribuição de pressões no domínio, formulação MPFA-FPS: a) Malha com 16x16 volumes de controle; b) malha com 32x32 volumes de controle.

A Tabela 2 mostra os resultados em termos de pressões máximas e mínimas obtidas para o exemplo. Observamos que as formulações MPFA fornecem resultados consistentes quando submetida a problemas anisotrópicos. No que se refere à satisfação do Princípio do Máximo Discreto, verificamos que o valor mínimo admissível para pressão foi respeitado, i.e, valores negativos de pressão não foram observados para nenhuma das malhas adotadas. Embora o valor máximo não seja imposto, dado o termo de fonte, também verificamos uma convergência, em ambos os métodos, para uma pressão máxima de 7,5.

Tabela 2. Pressões máximas e mínimas dadas para o exemplo 4.3.

Método	Valores Max. e Min. de pressão	$1/h = 8$	$1/h = 16$	$1/h = 32$	$1/h = 64$
MPFA-O	$p_{máx}$	7,4020	7,4731	7,4917	7,4972
	$p_{mín}$	0,0569	0,0167	0,0048	0,0013
MPFA-FPS	$p_{máx}$	7,3949	7,4694	7,4902	7,4966
	$p_{mín}$	0,0585	0,0173	0,0050	0,0014

4.4 Escoamento monofásico nas proximidades o poço em reservatório isotrópico e heterogêneo com termo fonte uniformemente distribuído

Esse exemplo possui as mesmas características geométricas do exemplo 4.2, porém com tensores de permeabilidades distintos considerando camadas horizontais. Essas camadas são divididas pela reta em $z = 0,5$ e os tensores são dados de acordo com a Fig. 16.

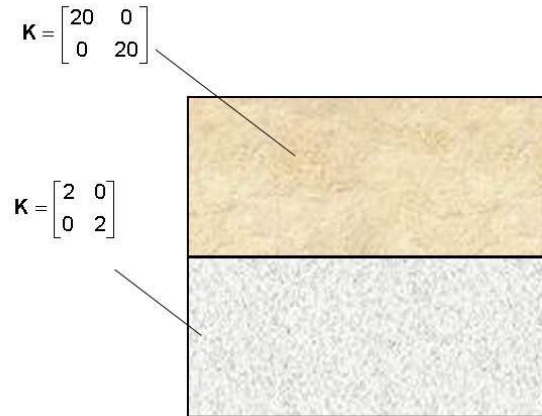
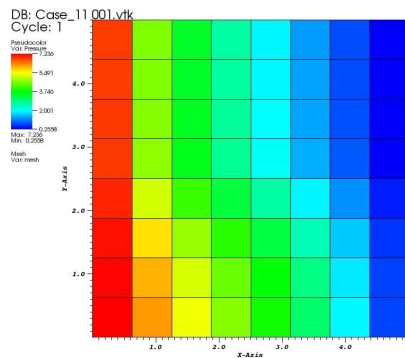


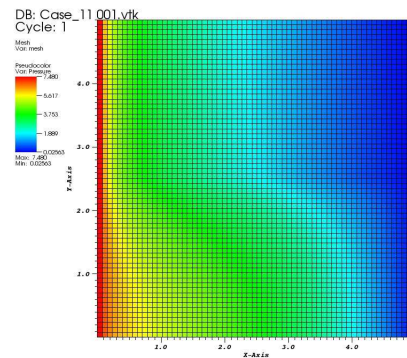
Figura 16. Tensores de permeabilidades nas regiões do domínio.

Na Fig. 17a o campo de pressão para a formulação MPFA-O é ilustrado para uma malha com 8x8 subdivisões. Na Fig. 17b o mesmo resultado, obtido com uma malha de 64x64 subdivisões é apresentado. O campo de pressão também é apresentado na Fig. 18 para malhas com 16x16 subdivisões (Fig. 18a) e 32x32 subdivisões (Fig. 18b).



user: victor
Sun Aug 16 17:00:26 2015

a)



user: victor
Sun Aug 16 17:06:33 2015

b)

Figura 17. Distribuição de pressões no domínio, formulação MPFA-O: a) Malha com 8x8 subdivisões; b) malha com 64x64 subdivisões.

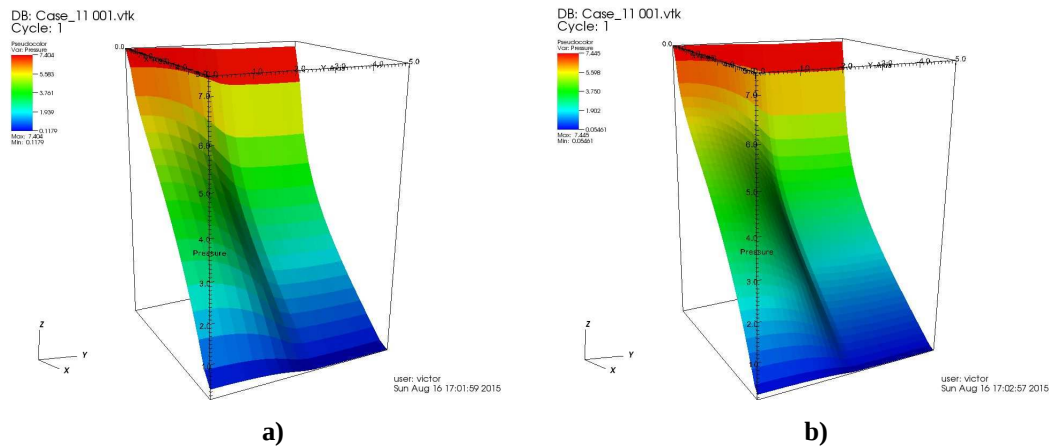


Figura 18. Distribuição de pressões no domínio, formulação MPFA-FPS: a) Malha com 16x16 subdivisões; b) malha com 32x32 subdivisões.

A Tabela 3 apresenta valores máximos e mínimos de pressão para as formulações MPFA-FPS e MPFA-O. Assim como observamos no exemplo anterior, o valor mínimo, estabelecido pela condição de contorno é honrado nas soluções numéricas obtidas para as várias densidades de malha.

Tabela 3. Pressões máximas e mínimas dadas para o exemplo 4.4.

Método	Valores Max. e Min. de pressão	$1/h = 8$	$1/h = 16$	$1/h = 32$	$1/h = 64$
MPFA-O	$p_{máx}$	7.2912	7.3794	7.4455	7.4754
	$p_{mín}$	0.2591	0.1176	0.0546	0.0257
MPFA-FPS	$p_{máx}$	7.2360	7.4041	7.4566	7.4805
	$p_{mín}$	0.2558	0.1179	0.0546	0.0256

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho as formulações numéricas do Método dos volumes finitos tipo MPFA-O e MPFA-FPS foram adaptadas para resolver a equação de pressão em problemas axissimétricos. Esse tipo de abordagem é de extrema relevância para avaliar, por exemplo, a distribuição de pressão nas proximidades de poços em reservatórios de petróleo. Quando o problema permite assumir axissimetria do modelo um problema tridimensional pode ser representado computacionalmente com uma discretização bidimensional viabilizando uma simulação muito mais econômica. As adequações feitas nas formulações do tipo MPFA leva-

ram a resultados coerentes com o esperado para alguns problemas axissimétricos *benchmark* simples encontrados na literatura. Nesses, a taxa de convergência esperada para as formulações investigadas foi obtida, mesmo para baixas densidades de malha. As formulações também foram hábeis para lidar com problemas com anisotropia, em malhas que não são k-ortogonal. Nesse caso, se obteve resultados coerentes com o esperado para o problema. Como se sabe, formulações mais tradicionais tipo TPFA, frequentemente utilizada em simuladores comerciais voltados para a indústria do petróleo, não é hábil para lidar adequadamente com esse tipo de problema.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq, PRH-26, ANP e Rede SIGER, obtido durante o desenvolvimento desse projeto.

REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I., BARKVE, T., BOE, O., & MANNSETH, T. (1998). Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, pp. 765-781.
- CRUMPTON, P. I., SHAW, G. J., & WARE, A. F. (1995). Discretization and Multigrid Solution of Elliptic Equations with Mixed Derivative Terms and Strongly Discontinuous Coefficients. *Journal of Computational Physics*, pp. 343-358.
- EDWARDS, M. G., & ROGERS, C. F. (1998). *Finite Volume Discretization with Imposed Flux Continuity for the General Tensor Pressure Equation*, pp. 259-290.
- EDWARDS, M. G., & ZHENG, H. (2008). A quasi-positive family of continuous Darcy-flux finite-volume schemes with full pressure support. *Journal of Computational Physics*, pp. 9333-9364.
- SILVA, G. M. L. L., LIMA, R. de C. F. de, & LYRA, P. R. M.. (2004). Análise da Biotransferência de Calor nos Tecidos Oculares Devido à Presença de Implantes Retinianos Através do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas. Recife.
- LYRA, P., SOUZA, M., & CARVALHO, D. (2013). *Relatório Técnico Siger 2 - SP9*. Recife.
- Maliska, R. C. (2012). *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. Livros Tecnicos e Científicos: Rio de Janeiro.
- LYRA, P.R.M., LIMA, R. DE C. F. DE, SILVA, G. M. L. L. DA & de Carvalho, D.K.E., "An Axisymmetric Finite Volume Formulation for the Solution of Heat Conduction Problems Using Unstructured Meshes", J. BRAZ. SOC. MECH. SCI. & ENG., OCT./DEC. 2005, VOL.27, NO.4, P.407- 414
- SOUZA, M.R.A., CARVALHO, D.K.E., LYRA, P.R.M., "A Higher-Resolution Finite Volume Method for the Solution of Oil-Water Displacement in Petroleum Reservoir on 2D Grids", XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods for Engineering, Pirinópolis, GO, Brasil, novembro de 2013, pg 25.
- REDDY, J. N. An introduction to continuum mechanics. Cambridge University Press. 2008.
- KREITH, F. & BOHN, M. Principles of heat transfer. Cengage learning, 2001.