



VIBRAÇÕES E ESTABILIDADE DE BARRAS ESBELTAS DE SEÇÃO ABERTA

Julio C. Coaquira

Paulo B. Gonçalves

jccoaquira@gmail.com

paulo@puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio

Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22451-900, RJ, Rio de Janeiro, Brasil

Eulher C. Carvalho

eulher.carvalho@ifg.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Gois, IFG

Rua Maria Vieira Cunha, 775, Residencial Flamboyant, 75804-714, GO, Jataí, Brasil

Resumo. Elementos estruturais com paredes finas e seções abertas são comumente encontrados nas estruturas metálicas e, cada vez com mais frequência, nas estruturas projetadas com novos materiais, sendo as seções I, L, C e T usuais na prática de engenharia. As vigas de paredes finas possuem, em geral, uma boa resistência à flexão, mas uma baixa rigidez a torção, condição suficiente para que instabilidades provoquem um acoplamento em flexão e torção. Muitas destas estruturas trabalham em regime não linear e uma formulação não linear, que leve em conta grandes deslocamentos e os acoplamentos inerentes, é necessária. Neste trabalho adota-se um modelo não linear para vigas de paredes finas e seção aberta, considerando grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento e acoplamentos em flexão e torção. Um estudo das frequências naturais, das cargas críticas e da relação frequência-carga axial é apresentado para perfis com diferentes condições de contorno. Com base nestes resultados, faz-se um estudo do comportamento dinâmico não linear de um perfil engastado e livre, destacando o efeito do acoplamento não linear na região de ressonância e sua influência na estabilidade dinâmica da estrutura.

Palavras-chave: Vigas, Seção aberta, Acoplamento, Instabilidade, Dinâmica não linear.

1 INTRODUÇÃO

Vigas de paredes finas e seções abertas são comumente encontradas na maioria dos ramos da engenharia estrutural, assim é importante garantir que o seu projeto seja confiável e seguro. Análises preliminares das estruturas de vigas com paredes finas também ajudam a aperfeiçoar o projeto e evitar futuros custos com reparos. É, portanto, essencial para engenheiros projetistas saber avaliar a estabilidade e as características dinâmicas destas estruturas com precisão, bem como a interação entre instabilidade e dinâmica. A maioria das estruturas com elementos estruturais de paredes finas têm seção aberta, resultando em uma baixa resistência à torção, e, em geral, com um ou nenhum eixo de simetria (Murray 1986; Mori e Munaiar Neto, 2009, Allen e Bulson 1980). A análise é complexa devido ao acoplamento entre as tensões de flexão e torção e ao empenamento.

Sabe-se que, quando as seções transversais das vigas têm dois eixos de simetria, o centro de cisalhamento e baricentro das seções transversais coincidem, e a flexão e torção são fenômenos independentes em uma análise linear. No entanto, para um grande número de vigas com seções de paredes finas encontradas na prática, o centroide e o centro de cisalhamento das seções transversais não são coincidentes. Quando as seções transversais têm um eixo de simetria, a vibração de flexão na direção do eixo de simetria é desacoplada, mas a vibração de flexão na direção perpendicular ao eixo de simetria é acoplada com o modo de vibração torcional, mesmo em uma análise linear. Esta característica tem estimulado pesquisas sobre o comportamento dinâmico de vigas com paredes finas. O acoplamento torna-se ainda mais importante quando se consideram, em perfis com paredes finas, os efeitos da não linearidade geométrica. Entretanto, apesar da extensa literatura sobre perfis com paredes finas, pouco se conhece sobre o comportamento dinâmico não linear destas estruturas.

As teorias sobre o acoplamento das vibrações de flexão com as de torção em vigas de paredes finas foram inicialmente desenvolvidas por Timoshenko e Young (1955), Gere e Lin (1958) e Vlasov (1961). Em particular a teoria de Vlasov tem desempenhado um papel importante na análise destas estruturas (Barsoum e Gallagher 1970; Wang e Kitipornchai 1986; Laudiero e Zaccaria 1988; Trahair 1993). Neste modelo, o momento de torção aplicado é equilibrado pelos momentos devidos ao cisalhamento de St-Venant e empenamento. Entretanto, Gregory (1961), Gobarah e Tso (1971) e Black (1967), estudando o comportamento de perfis de seção aberta sujeitos a grandes deslocamentos, verificaram que as equações contêm termos não lineares que são negligenciados na formulação de Vlasov, e que levam ao chamado “efeito de encurtamento”. Moore (1986) prova que este efeito é importante e leva a uma melhor correlação entre resultados teóricos e experimentais.

Para grandes ângulos de torção, vários modelos não lineares têm sido desenvolvidos, levando a sistemas de equações acopladas altamente não lineares (Gobarah e Tso 1971; Attard 1986; Ronagh, Bradford e Attard 2000). Em especial, Mohri, Azrar e Potier-Ferry (2001) desenvolveram uma formulação não linear onde os campos de deslocamento são expressos sem qualquer hipótese simplificadora quanto à magnitude do ângulo de torção, estabelecendo equações de equilíbrio que levam em conta os efeitos de encurtamento e o acoplamento entre torção e flexão, permitindo prever o comportamento das estruturas carregadas em flexão e em torção, bem como, submetidas a grandes deslocamentos. Esta formulação foi usada pelos autores para estudar a estabilidade e vibrações lineares de várias estruturas de paredes finas (Mohri, Brouki e Roth 2003; Mohri, Azrar e Potier-Ferry 2004, Mohri, Bouzerira e Potier-Ferry 2008, Mohri, Damil e Potier-Ferry 2010), assim como, por Mancilla, Gonçalves e Carvalho (2014, 2015) para estudar as vibrações não lineares de perfis simplesmente apoiados. Esta formulação é a base do presente trabalho.

Neste artigo, portanto, um modelo não linear para vigas de seção aberta e paredes finas, considerando grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento e acoplamentos em flexão e torção, é adotado. Um estudo das frequências naturais, das cargas críticas e da relação frequência-carga axial é apresentado para perfis com diferentes condições de contorno, a saber: simplesmente apoiado, engastado, engastado apoiado e bi engastado. Com base nestes resultados, faz-se um estudo detalhado do comportamento dinâmico não linear de um perfil engastado, destacando o efeito do acoplamento não linear na região de ressonância e sua influência na estabilidade dinâmica da estrutura. Para isto são usadas diversas ferramentas de dinâmica não linear, tais como diagramas de bifurcação, respostas no tempo, planos de fase e seções de Poincaré. Os resultados mostram que a consideração dos acoplamentos não lineares é essencial para se avaliar o nível de segurança destas estruturas.

2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA ESTRUTURAL

Considera-se, pois, um perfil C de material linear isotrópico, comprimento L e massa por unidade de comprimento m . Um segmento indeformado da viga é mostrado na Fig. 1, juntamente com o sistema de referências adotado, as definições geométricas da seção transversal do perfil e as forças nele atuantes. Na Fig. 1, X , Y e Z definem o sistema retangular de coordenadas globais, localizado no centro de gravidade CG da seção transversal, onde Y e Z são os eixos principais de inércia e X o eixo longitudinal da viga.

Como o perfil adotado possui apenas um eixo de simetria, o centro de cisalhamento SC não coincide com o centro de gravidade CG da seção transversal. Na Fig. 1b, as coordenadas do centro de cisalhamento SC , no sistema de referências adotado, são y_{sc} e z_{sc} . Em adição, na Fig. 1b, h é a altura do perfil, b a sua base, t_f a espessura da mesa, t_w a espessura da alma e M é um ponto ao longo do contorno da seção transversal com coordenadas y , z e ζ , onde ζ é a coordenada setorial usada no modelo de Vlasov para torção não uniforme (Vlasov, 1961). O sistema é solicitado por uma força lateral uniformemente distribuída denominada Q_y , com direção horizontal (eixo Y), atuando no centro de cisalhamento SC do perfil.

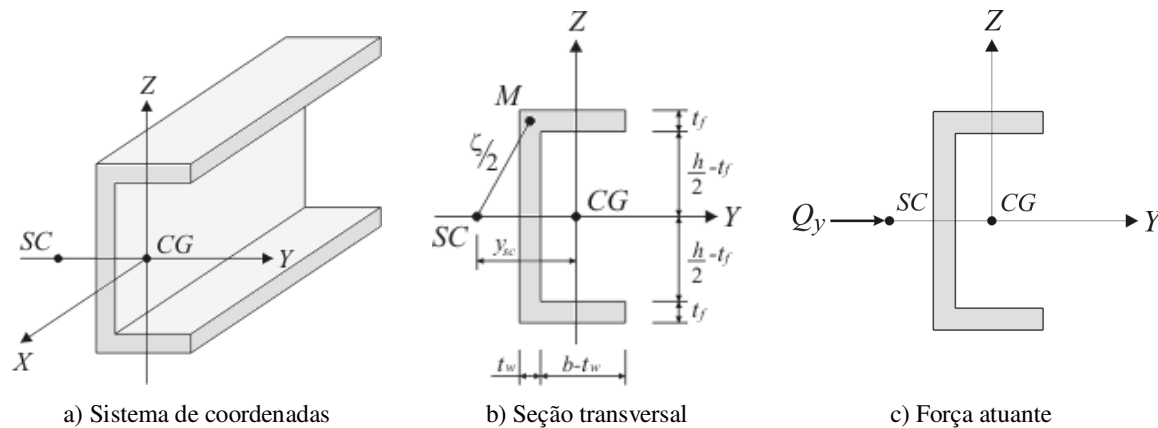


Figura 1. Perfil C – características geométricas e sistema de referência.

3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento, considerando os termos não lineares até a terceira ordem, são dadas por (Mancilla, 2014):

$$-\frac{dN}{dx} = q_x \quad (1)$$

$$m \left(\frac{d^2 v}{dt^2} + z_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + EI_z \left(v^{(4)} + 3v' v'' v''' + v''^3 + \frac{v^{(4)} v'^2}{2} \right) - N \left(v'' + z_c \theta_x'' + y_c (\theta_x' \theta_x'' + \theta_x'^2) \right) + (EI_z - EI_y) (v^{(4)} \theta_x + 2w''' \theta_x' + w'' \theta_x'' - v^{(4)} \theta_x^2 - 4v''' \theta_x' \theta_x' - 2v'' \theta_x' \theta_x'' - 2v' \theta_x'^2) = q_y \quad (2)$$

$$m \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - y_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + EI_y \left(w^{(4)} + 3w' w'' w''' + w''^3 + \frac{w^{(4)} w'^2}{2} \right) - N \left(w'' - y_c \theta_x'' + z_c (\theta_x' \theta_x'' + \theta_x'^2) \right) + (EI_z - EI_y) (v^{(4)} \theta_x + 2v''' \theta_x' + v'' \theta_x'' + w^{(4)} \theta_x^2 + 4w''' \theta_x' \theta_x' + 2w'' \theta_x' \theta_x'' + 2w' \theta_x'^2) = q_z \quad (3)$$

$$m \left(I_o \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + z_c \frac{d^2 v}{dt^2} - y_c \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + EI_\omega \theta_x^{(4)} - GJ \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_t \theta_x'^2 \theta_x'' - N (I_o \theta_x'' - y_c (w'' - v'' \theta_x) + z_c (v'' + w'' \theta_x)) + (EI_z - EI_y) (v'' w'' - v''^2 \theta_x + w''^2 \theta_x) = m_x \quad (4)$$

onde v e w são, respectivamente os deslocamentos transversais devidos à flexão nas direções Y e Z , θ é a rotação em torno do eixo x , N é o esforço normal devido a uma carga axial P , $(.)' = \partial(.) / \partial X$, $(.)^{(4)}$ é a derivada de ordem quatro em função de X , E o módulo de Young, G o módulo de elasticidade transversal e J é a constante de torção de St-Venant, I_y e I_z são os momentos de inércia em torno dos eixos Y e Z , respectivamente, I_o o momento polar de inércia; I_t a constante de torção de maior ordem, sendo:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (5)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (6)$$

$$J \cong \frac{1}{3} (b t_f^3 + h t_w^3 + b t_f^3) \quad (7)$$

$$I_t = I_R - A I_0^2 \quad (8)$$

onde, I_R é o momento de inércia de quarta ordem, A é a área da seção transversal, sendo:

$$I_R = \int_A (y - y_{sc})^4 dA + \int_A 2 (y - y_{sc}) (z - z_{sc}) dA + \int_A (z - z_{sc})^4 dA \quad (9)$$

As três componentes das cargas distribuídas aplicadas ao longo do elemento são denotados por q_x , q_y , q_z e m_x é a um momento tursor adicional resultante da excentricidade das cargas com relação ao centro de cisalhamento. Detalhes da formulação podem ser encontrados em Mohri, Azrar e Potier-Ferry (2004) e Mancilla (2014). Adicionalmente, ξ é a taxa de amortecimento e ω_0 é a menor frequência natural de vibração.

Por meio do método de Galerkin, as equações diferenciais parciais de movimento podem ser reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias no domínio do tempo. As equações discretizadas de movimento são obtidas, para cada uma das condições de contorno, usando apenas o primeiro modo de flexão e de torção no método de Galerkin, a saber:

$$v(x, t) = v_o(t) f(x) \quad (50)$$

$$w(x, t) = w_o(t) g(x) \quad (11)$$

$$\theta(x, t) = \theta_o(t) h(x) \quad (12)$$

onde $v_o(t)$, $w_o(t)$, e $\theta_o(t)$ são as amplitudes modais dependentes do tempo, associadas com os três graus de liberdade, $f(x)=g(x)$ é o primeiro modo de vibração a flexão da viga e $h(x)$ é o primeiro modo de torção, no presente trabalho considera-se $h(x) = \sin(\pi x / L)$. As expressões analíticas para as funções $f(x)$ e $g(x)$ são apresentadas por Blevins (1979) para todas as combinações de contorno clássicas de vigas esbeltas. A seguir são apresentadas as equações discretizadas para as condições de contorno consideradas na análise paramétrica. No caso da viga engastada e livre as funções $f(x)$ e $g(x)$ para a estrutura carregada devem ser alteradas para levar em conta o cortante não nulo na extremidade livre (Allen e Bulson, 1980).

3.1 Equações de movimento para a viga simplesmente apoiada nas duas extremidades

$$\begin{aligned} & 0.5 m L \left(\ddot{v}_0 + z_{sc} \ddot{\theta}_0 \right) + (2 \xi \omega_0) \dot{v}_0 + E I_z \left(\frac{\pi^4 v_0}{2 L^3} + \frac{\pi^6 v_0^3}{16 L^5} \right) \\ & + N \left(-\frac{\pi^2 v_0}{2 L} - \frac{\pi^2 z_{sc} \theta_0}{2 L} - \frac{2 \pi y_{sc} \theta_0^2}{3 L} \right) \\ & + (E I_z - E I_y) \left(\frac{4 \pi^3 w_0 \theta_0}{3 L^3} - \frac{3 \pi^4 v_0 \theta_0^2}{8 L^3} \right) - \frac{2 q_y L}{\pi} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & 0.5 m L \left(\ddot{w}_0 - y_{sc} \ddot{\theta}_0 \right) + (2 \xi \omega_0) \dot{w}_0 + E I_y \left(\frac{\pi^4 w_0}{2 L^3} + \frac{\pi^6 w_0^3}{16 L^5} \right) + N \left(-\frac{\pi^2 w_0}{2 L} \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2 y_{sc} \theta_0}{2 L} - \frac{2 \pi z_{sc} \theta_0^2}{3 L} \right) + (E I_z - E I_y) \left(\frac{4 \pi^3 v_0 \theta_0}{3 L^3} + \frac{3 \pi^4 w_0 \theta_0^2}{8 L^3} \right) - \frac{2 q_y L}{\pi} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 & 0.5mL(I_0 \ddot{\theta}_0 + z_{sc} \ddot{v}_0 - y_{sc} \ddot{w}_0) + (2\xi \omega_0) \dot{v}_0 + \frac{\pi^4 E I_w \theta_o}{2L^3} + \frac{\pi^2 G J \theta_o}{2L} + \frac{3\pi^4 E I_t \theta_o^3}{16L^3} \\
 & + N \left(-\frac{\pi^2 I_0 \theta_0}{2L} + y_{sc} \left(\frac{\pi^2 w_0}{2L} - \frac{4\pi v_0 \theta_0}{3L} \right) + z_{sc} \left(-\frac{\pi^2 v_0}{2L} - \frac{4\pi w_0 \theta_0}{3L} \right) \right) \\
 & + (EI_z - EI_y) \left(\frac{4\pi^3 v_0 w_0}{3L^3} - \frac{3\pi^4 v_0^2 \theta_0}{8L^3} + \frac{3\pi^4 w_0^2 \theta_0}{8L^3} \right) + \frac{q_z L (\theta_0 \pi e_z - 4e_y)}{2\pi} = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

3.2 Equações de movimento para a viga engastada e livre

$$\begin{aligned}
 & mL(0.25 \ddot{v}_0 + 0.2347 z_{sc} \ddot{\theta}_0) + (2\xi \omega_0) \dot{v}_0 + EI_z \left(\frac{3.09 v_0}{L^3} + \frac{0.63 v_0^3}{L^5} \right) \\
 & + (EI_z - EI_y) \left(\frac{1.5244 w_0 \theta_0}{L^3} - \frac{1.0516 v_0 \theta_0^2}{L^3} \right) - 0.3915 q_y L = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & mL(0.25 \ddot{w}_0 - 0.2347 y_{sc} \ddot{\theta}_0) + (2\xi \omega_0) \dot{v}_0 + EI_y \left(\frac{3.09 w_0}{L^3} + \frac{0.63 w_0^3}{L^5} \right) \\
 & + (EI_z - EI_y) \left(\frac{1.5244 v_0 \theta_0}{L^3} + \frac{1.0516 w_0 \theta_0^2}{L^3} \right) - 0.39 q_z L = 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 & mL(0.23 z_{sc} \ddot{v}_0 - 0.23 y_{sc} \ddot{w}_0 + 0.50 I_0 \ddot{\theta}_0) + (2\xi \omega_0) \dot{\theta}_0 \\
 & + \frac{48.70 EI_w \theta_0}{L^3} + \frac{4.9348 G J \theta_0}{L} + \frac{18.26 EI_t \theta_o^3}{L^3} \\
 & + (EI_z - EI_y) \left(-\frac{1.5244 v_0 w_0}{L^4} - \frac{1.0516 \theta_0 v_0^2}{L^3} + \frac{1.0516 \theta_0 w_0^2}{L^3} \right) + 0.16 q_z L (\pi \theta_0 e_z - 4e_y) = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

3.3 Equações de movimento para a viga engastada e apoiada

$$\begin{aligned}
 & mL(\ddot{v}_0 + 0.69 z_{sc} \ddot{\theta}_0) + (2\xi \omega_0) \dot{v}_0 + EI_z \left(\frac{237.72 v_0}{L^3} + \frac{660.83 v_0^3}{L^5} \right) \\
 & + N \left(-\frac{11.51 v_0}{L} - \frac{6.81 z_{sc} \theta_0}{L} - \frac{3.21 y_{sc} \theta_0^2}{L} \right) \\
 & + (EI_z - EI_y) \left(\frac{148.74 w_0 \theta_0}{L^3} - \frac{122.32 v_0 \theta_0^2}{L^3} \right) - 0.86 q_y L = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 & mL(\ddot{w}_0 - 0.69 y_{sc} \ddot{\theta}_0) + (2\xi \omega_0) \dot{v}_0 + EI_y \left(\frac{237.72 w_0}{L^3} + \frac{660.84 w_0^3}{L^5} \right) + N \left(-\frac{11.51 w_0}{L} \right. \\
 & \left. + \frac{6.81 y_{sc} \theta_0}{L} - \frac{3.21 z_{sc} \theta_0^2}{L} \right) + (EI_z - EI_y) \left(\frac{148.74 v_0 \theta_0}{L^3} + \frac{122.32 w_0 \theta_0^2}{L^3} \right) - 0.86 q_z L = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 & mL(0.69z_{sc}\ddot{v}_0 - 0.69y_{sc}\ddot{w}_0 + 0.50I_0\ddot{\theta}_0) + (2\xi\omega_0)\dot{\theta}_0 \\
 & + \frac{\pi^4 EI_\omega \theta_0}{2L^3} + \frac{\pi^2 GJ \theta_0}{2L} + \frac{3\pi^4 EI_t \theta_0^3}{16L^3} \\
 & + N\left(-\frac{\pi^2 I_0 \theta_0}{2L} + y_{sc}\left(\frac{6.81w_0}{L} - \frac{6.42v_0\theta_0}{L}\right) + z_{sc}\left(-\frac{6.81v_0}{L} - \frac{6.42w_0\theta_0}{L}\right)\right) \\
 & + (EI_z - EI_y)\left(\frac{148.74079v_0 w_0}{L^3} - \frac{122.32\theta_0 v_0^2}{L^3} + \frac{122.32\theta_0 w_0^2}{L^3}\right) + \frac{q_z L(\theta_0 \pi e_z - 4e_y)}{2\pi} = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

3.4 Equações de movimento para a viga bi-engastada

$$\begin{aligned}
 & mL(0.39\ddot{v}_0 + 0.44z_{sc}\ddot{\theta}_0) + (2\xi\omega_0)\dot{v}_0 + EI_z\left(\frac{198.46v_0}{L^3} + \frac{223.73v_0^3}{L^5}\right) + N\left(-\frac{4.88v_0}{L}\right. \\
 & \left. - \frac{4.33z_{sc}\theta_0}{L} - \frac{2.44y_{sc}\theta_0^2}{L}\right) + (EI_z - EI_y)\left(\frac{98.82w_0\theta_0}{L^3} - \frac{80.91v_0\theta_0^2}{L^3}\right) - 0.52q_y L = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 & mL(0.40\ddot{w}_0 - 0.44y_{sc}\ddot{\theta}_0) + (2\xi\omega_0)\dot{w}_0 + EI_y\left(\frac{198.46w_0}{L^3} + \frac{223.73w_0^3}{L^5}\right) + N\left(-\frac{4.88w_0}{L}\right. \\
 & \left. + \frac{4.33y_{sc}\theta_0}{L} - \frac{2.44z_{sc}\theta_0^2}{L}\right) + (EI_z - EI_y)\left(\frac{98.82v_0\theta_0}{L^3} + \frac{80.91w_0\theta_0^2}{L^3}\right) - 0.52q_z L = 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 & mL(0.44z_{sc}\ddot{v}_0 - 0.44y_{sc}\ddot{w}_0 + 0.50I_0\ddot{\theta}_0) + (2\xi\omega_0)\dot{\theta}_0 \\
 & + \frac{48.70EI_\omega \theta_0}{L^3} + \frac{4.93GJ \theta_0}{L} + \frac{18.26EI_t \theta_0^3}{L^3} \\
 & + N\left(-\frac{4.93I_0\theta_0}{L} + y_{sc}\left(\frac{4.33w_0}{L} - \frac{4.89v_0\theta_0}{L}\right) + z_{sc}\left(-\frac{4.33v_0}{L} - \frac{4.89w_0\theta_0}{L}\right)\right) \\
 & + (EI_z - EI_y)\left(\frac{98.8229v_0 w_0}{L^3} - \frac{80.91\theta_0 v_0^2}{L^3} + \frac{80.91\theta_0 w_0^2}{L^3}\right) + 0.5q_z L\theta_0 e_z - 0.64q_z L e_y = 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos, considerando as diferentes condições de contorno, correspondem a uma viga com módulo de Young $E = 210,00$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e densidade $\rho = 7800,00$ kgf/m³. Como propriedades geométricas têm-se comprimento $L = 400$ cm, base $b = 10,00$ cm, altura $h = 20,00$ cm, espessura da mesa $t_f = 0,50$ cm, espessura da alma $t_w = 0,50$ cm, coordenadas do centro de cisalhamento $y_{sc} = -6,0818$ cm e $z_{sc} = 0,00$ cm, área da seção transversal $A = 19,50$ cm², momentos de inércia $I_y = 1236,60$ cm⁴, $I_z = 193,45$ cm⁴ e $I_R = 350530,00$ cm⁶ e constante de torção de St-Venant $J = 1,67$ cm⁴. No Item 4.1, as frequências naturais e cargas críticas da viga são estudadas. No Item 4.2, para a condição engastada e livre, uma carga harmônica com direção Y é aplicada no centro de cisalhamento SC do perfil e as vibrações não lineares são estudadas.

4.1 Análise linear: frequências naturais e cargas críticas

Para a determinação das frequências naturais de vibração da estrutura, bem como, das cargas críticas de flambagem, uma linearização das Equações (13) a (24) é necessária. Deste processo, omitido neste trabalho, é possível verificar, justamente, que os acoplamentos estão associados com os parâmetros geométricos y_{sc} e z_{sc} , isto é, são impostos pela geometria da seção transversal (monossimétricas ou assimétricas), pois o centro de cisalhamento não coincide com o centro de gravidade da seção (Fig. 1).

Resolvendo o problema de autovalor, obtido a partir do sistema de equações linearizado, calculam-se as três menores frequências naturais e os respectivos modos de vibração, a saber: Tab. 1, para a viga simplesmente apoiada nas extremidades, Tab. 2, para a viga engastada e livre, Tab. 3, para a viga engastada e apoiada e Tab. 4, para a viga engastada nas extremidades.

Tabela 1. Frequências e modos de vibração para a viga simplesmente apoiada

Modo	ω_0 (rad/s)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
v	100,811	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	102,408	0,000	-0,987	0,160
$w - \theta$	322,515	0,000	-0,999	0,012

Tabela 2. Frequências e modos de vibração para a viga engastada e livre

Modo	ω_0 (rad/s)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
v	35,914	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	82,058	0,000	0,993	0,116
$w - \theta$	126,643	0,000	-0,969	0,246

Tabela 3. Frequências e modos de vibração para a viga engastada e apoiada

Modo	ω_0 (rad/s)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
$w - \theta$	104.434	0,000	-0,992	-0,124
v	157.486	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	488.349	0,000	-0,999	0,003

Tabela 4. Frequências e modos de vibração para a viga bi-engastada

Modo	ω_0 (rad/s)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
$w - \theta$	105,076	0,000	-0,980	-0,198
v	228,528	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	707,685	0,000	-0,999	0,002

Por sua vez, as três menores cargas e os respectivos modos de bifurcação são mostrados nas Tabelas 5 a 8 para as mesmas condições de contorno.

Tabela 5. Cargas crítica, P_{cr} , e modos de flambagem para a viga simplesmente apoiada

Modo	P_{cr} (kN)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
v	250,592	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	258,594	0,000	-0,987	0,160
$w - \theta$	2564,773	0,000	-0,999	0,012

Tabela 6. Cargas crítica, P_{cr} , e modos de flambagem para a viga engastada e livre

Modo	P_{cr} (kN)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
v	62,648	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	194,857	0,000	0,5008	0,8655
$w - \theta$	1002,201	0,000	0,9915	0,1298

Tabela 7. Cargas crítica, P_{cr} , e modos de flambagem para a viga engastada e apoiada

Modo	P_{cr} (kN)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
$w - \theta$	268,855	0,000	-0,999	0,003
v	524,282	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	4725,992	0,000	-0,992	-0,124

Tabela 8. Cargas crítica, P_{cr} , e modos de flambagem para a viga bi-engastada

Modo	P_{cr} (kN)	Direção v (eixo Y)	Direção w (eixo Z)	Direção θ (em torno no eixo Z)
$w - \theta$	272,217	0,000	-0,999	0,002
v	1033,071	1,000	0,000	0,000
$w - \theta$	9042,787	0,000	-0,980	-0,198

Para a viga simplesmente apoiada, verifica-se que o perfil possui duas frequências naturais próximas, o que pode provocar uma ressonância interna, algo mais difícil de ocorrer, no entanto, para as demais condições de contorno. De igual forma, para a viga simplesmente apoiada, observa-se que a segunda carga de bifurcação é próxima da carga crítica da estrutura, o que pode gerar uma interação modal. Sendo a seção em C monossimétrica, nota-se que o modo de flexão em v é desacoplado, mas há um acoplamento entre a flexão em z e a torção. Assim a carga crítica para o modo desacoplado é igual à respectiva carga de Euler.

Comparando os resultados obtidos, verifica-se que o incremento das forças reativas, ou seja, do grau de hiperestaticidade da estrutura, leva ao aumento da rigidez do elemento e, consequentemente, ao aumento da frequência de vibração da estrutura (períodos de vibração menores), assim como, ao aumento da capacidade portante do perfil, refletido na sua carga crítica de flambagem.

Para fins de comparação, verifica-se na Fig. 2 e Fig.3 que tanto a frequência de vibração quanto a carga crítica decrescem de forma não linear com o comprimento L da viga. Em particular, na Fig. 3b, verifica-se a possibilidade de uma interação modal, pelas razões expostas, quando $L \approx 3.6$.

Em adição, verifica-se na Fig. 4 que, para as condições de contorno estudadas, à medida que a carga axial de compressão P cresce, a rigidez efetiva do perfil decresce, decrescendo também o valor das frequências de vibração.

4.2 Análise dinâmica não linear – carregamento harmônico q_y

Considera-se aqui que o perfil está submetido a um carregamento harmônico uniforme q_y aplicado no centro de cisalhamento do perfil, descrito por $Q_y \sin(\Omega_y t)$ onde Q_y é a magnitude da carga harmônica e Ω_y é a frequência de excitação e t é o tempo. As equações não lineares que governam o movimento forçado da estrutura para o perfil monossimétrico C considerado neste trabalho são dadas por:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)v_o + 1289.7940 v_o + 16.4815 v_o^3 - 3430.6226 w_o \theta_o + 2366.4987 v_o \theta_o^2 - 0.10295 Q_y \sin(\Omega_y t) + 0.87869 \left(\frac{d}{dt}v_o\right) = 0 \quad (25)$$

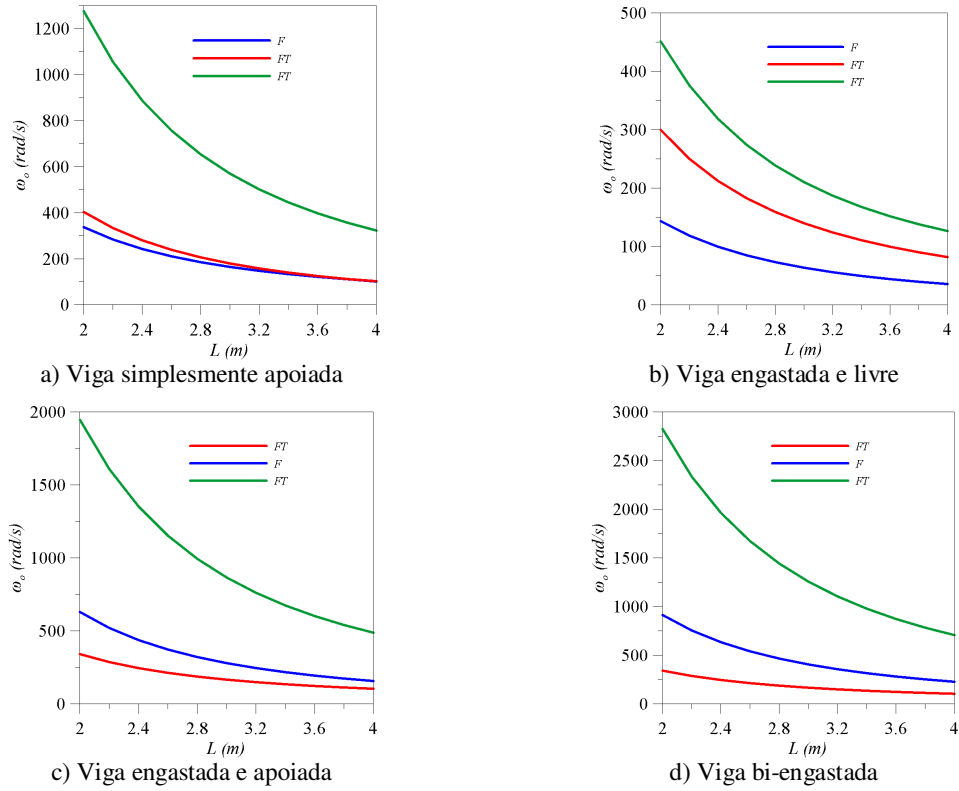


Figura 2. Variação das três menores frequências naturais com o comprimento da viga.

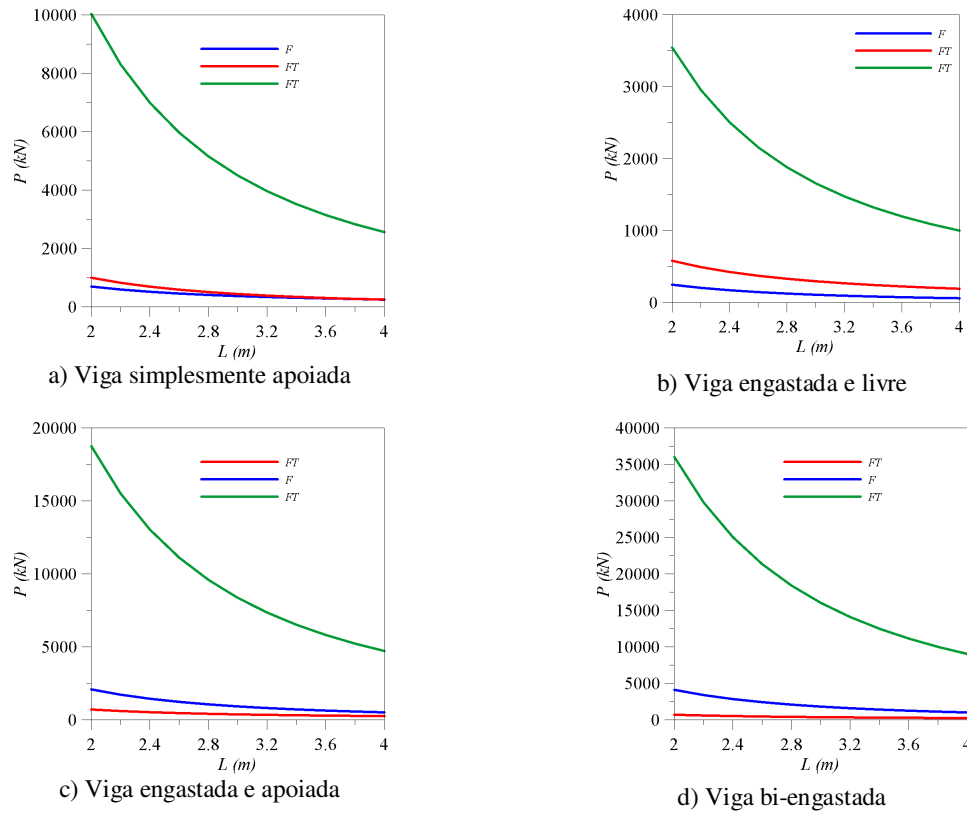
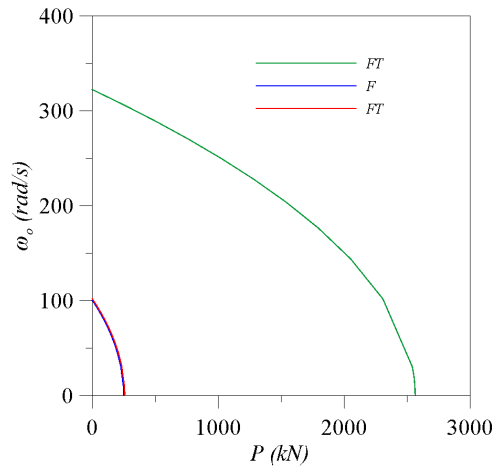
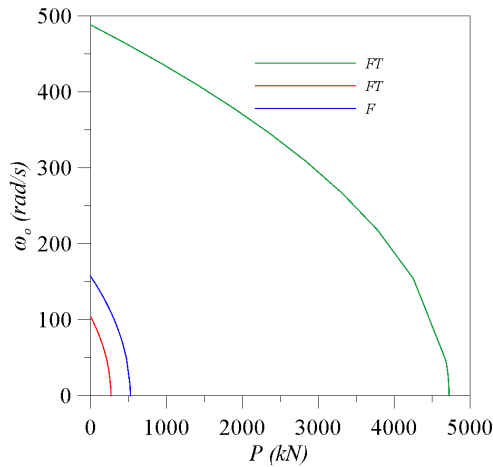


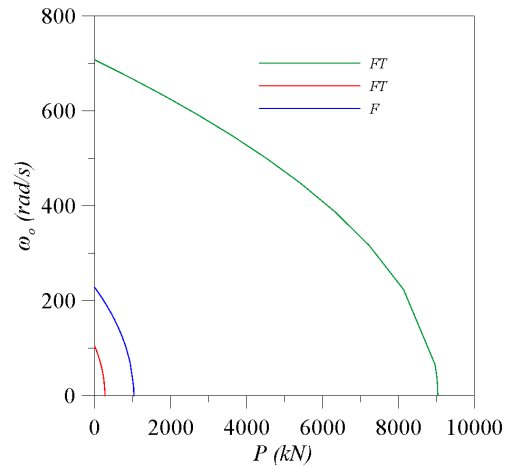
Figura 3. Variação das três menores cargas de bifurcação com o comprimento da viga.



a) Viga simplesmente apoiada



b) Viga engastada e apoiada



c) Viga bi-engastada

Figura 4. Variação das três menores frequência naturais com a carga axial

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} w_o \right) + 0.057096 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_o \right) + 1289.7940 w_o + 16.4815 w_o^3 \quad (26)$$

$$- 3430.6226 v_o \theta_o - 2366.4987 \theta_o^2 w_o + 0.87869 \left(\frac{d}{dt} w_o \right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_o \right) + 2.5876 \left(\frac{d^2}{dt^2} w_o \right) + 11160.0018 \theta_o + 20212.3963 \theta_o^3 \quad (27)$$

$$+ 91606.4363 v_o w_o + 107252.0337 v_o^2 \theta_o - 107252.0337 w_o^2 \theta_o + 39.823391 \left(\frac{d}{dt} \theta_o \right) = 0$$

Na Fig. 5 apresenta-se a relação não linear frequência (Ω_y) vs. amplitude dos deslocamentos (v_o), na qual se verifica que a curva, com início na frequência natural de vibração ω_b , devido à não linearidade geométrica, inclina-se para direita, ou seja, apresenta

um comportamento com ganho de rigidez ou *hardening*. Este comportamento é esperado para estruturas unidimensionais altamente flexíveis (Carvalho *et al.*, 2013).

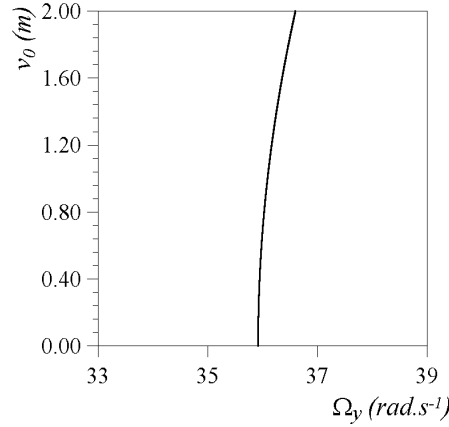


Figura 5. Relação frequência vs. amplitude dos deslocamentos.

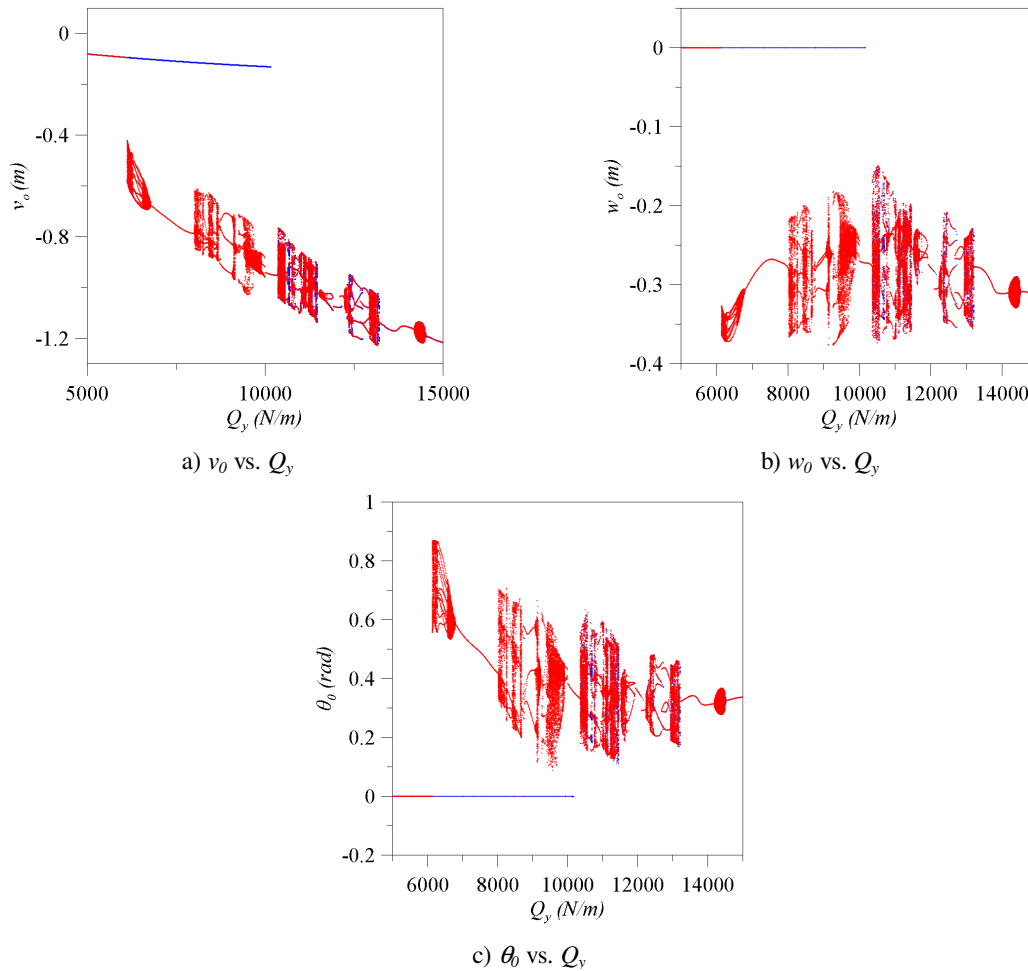


Figura 6. Diagramas de bifurcação da estrutura para a frequência de excitação $\Omega_y = 30 \text{ rad.s}^{-1}$.

Na Fig. 6 apresentam-se os diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a magnitude da carga harmônica Q_y (incrementando a carga em vermelho e decrescendo em azul) para uma frequência de excitação $\Omega_y = 30 \text{ rad.s}^{-1}$. Verifica-se que inicialmente os deslocamentos $w_o(t)$ e $\theta_o(t)$ são nulos (vibrações planares). Para certo valor da magnitude da excitação ($Q_y \approx 6 \text{ kN}$) ocorre a instabilidade dinâmica e a estrutura passa a apresentar vibrações de flexo-torção caracterizada pelo surgimento de vibrações $w_o(t)$ e $\theta_o(t)$.

Estas vibrações coexistem, até $Q_y \approx 10 \text{ kN}$, com as vibrações planares. Para magnitudes mais elevadas, apenas vibrações de flexo-torção foram detectadas. A resposta da estrutura, devido ao acoplamento flexo-torção, é complexa, com a presença de janelas de soluções periódicas entre faixas de soluções quase periódicas ou caóticas.

5 CONCLUSÕES

Neste artigo um modelo não linear para vigas com seção aberta e paredes finas, considerando grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento e acoplamentos entre flexão e torção, foi adotado. O exemplo numérico escolhido mostra a influência das condições de contorno nas frequências de vibração da estrutura e na carga crítica de flambagem de uma seção monossimétrica em C, bem como indicam configurações com maior probabilidade de ocorrência de ressonâncias internas e interações modais.

O efeito do acoplamento flexão-torção acentua-se na análise não linear dinâmica do perfil excitado lateralmente por uma carga harmônica uniformemente distribuída, mostrando a possibilidade de instabilidade dinâmica com o aparecimento de vibrações complexas de flexo-torção. Este é um trabalho em desenvolvimento e pesquisas futuras constarão de uma análise paramétrica das vibrações forçadas no regime não linear.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da CAPES, CNPq, FAPERJ, FAPEG, PUC-Rio e IFG.

REFERENCES

- Allen H.G. and Bulson P.S., 1980. *Background to buckling*. London: McGraw-Hill.
- Attard, M.M., 1986. Nonlinear theory of non-uniform torsion of thin-walled open beams. *Thin-walled Structures*, vol. 4, pp. 101-134.
- Barsoum, R.S. and Gallagher, R.H., 1970. Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, pp. 335-352.
- Black, M.M., 1967. Non-linear behaviour of thin-walled unsymmetric beam sections subject to bending and torsion. *Thin-walled structures*. London: Chatto and Windus.
- Bleviss, R.D., 1979. *Formulas for natural frequency and mode shape*. London: Van Nostrand Reinhold Company.
- Carvalho, E.C., Gonçalves, P.B., Rega, G., Del Prado, Z.J.G.N., 2013. Influence of axial loads on the nonplanar vibrations of cantilever beams. *Shock and Vibration*, n. 20, pp. 1073-1092. DOI 10.3233/SAV-130823
- Gere, J.M. and Lin, Y.K., 1958. Coupled vibrations of thin-walled beams of open-cross section. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 80, pp. 373-378.

- Gobarah, A.A. and Tso, W.K., 1971. A non-linear thin-walled beam theory. *International Journal of Mechanical Science*, vol. 13, pp. 1025-1038.
- Gregory, M. (1961). Elastic torsion of members of thin open cross section. *Australian Journal of Applied Science*, v. 12, n. 2, p. 174-193
- Laudiero, F. and Zaccaria, D., 1988. Finite element analysis of stability of thin-walled beams of open section. *International Journal of Mechanical Science*, vol. 30, n. 8, pp. 543-557.
- Mancilla, R.C., Gonçalves, P.B., Carvalho, E.C., “Non-linear dynamics analysis and stability of thin-walled beams with monosymmetric channel-section”. In: *Eighth International Conference on Advanced in Steel Structures - ICASS 2015*, 2015, Lisbon - Portugal. Proceedings of ICASS 2015, 2015.
- Mancilla, R.C., Gonçalves, P.B., Carvalho, E.C., “Vibrações não lineares de perfis esbeltos com seção aberta”. In: *XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2014*, 2014, Fortaleza - CE - Brasil. Proceedings of CILAMCE 2014, 2014.
- Mohri, F., Azrar, L. and Potier-Ferry, M., 2001. Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. *Thin-walled structures*, vol. 39, n. 11, p. 907-938.
- Mohri, F., Azrar, L. and Potier-Ferry, M., 2004. Vibration Analysis of buckled thin-walled beams with open sections. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 275, pp. 434-446.
- Mohri, F., Bouzerira, C. and Potier-Ferry, M., 2008. Lateral buckling of thin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads. *Thin-Walled Structures*. vol. 46, n. 3, pp. 290-302.
- Mohri, F., Brouki, A. and Roth, J.C., 2003. Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, n. 1, pp. 63-90.
- Mohri, F., Damil, N. and Potier-Ferry, M., 2008. Large torsion finite element model for thin-walled beams. *Computers and Structures*, n. 86, pp. 671-683.
- Mohri, F., Damil, N. and Potier-Ferry, M., 2010. Linear and non-linear stability analyses of thin-walled beams with monosymmetric I sections. *Thin-Walled Structures*, vol. 48, n. 4, pp. 299-315.
- Mohri, F., Damil, N. and Potier-Ferry, M., 2013. Buckling and lateral buckling interaction in thin-walled beam-column elements with mono-symmetric cross sections. *Applied Mathematical Modelling*, n. 37, pp. 3526-3540.
- Moore, D.B., 1986. A non-linear theory for the behaviour of thin-walled sections subjected to combined bending and torsion. *Thin-walled Structures*, vol. 4, pp. 449-466.
- Mori, D.D. and Munaiar, N.J., 2009. *Flexo torção: barras de seção delgada aberta*, EESC-USP.
- Murray, N.W., 1986. *Introduction to the theory of thin-walled structures*. Oxford: Clarendon Press.
- Ronagh, H.R., Bradford, M.A. and Attard, M.M., 2000. Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory. *Computers and Structures*, vol. 77, pp. 285-299.
- Seydel, R., 1988. *From equilibrium to chaos: practical bifurcation and stability analysis*, Elsevier Science Publishing, New York.
- Timoshenko, S. and Young, D.H., 1955. *Vibration problems in engineering*. New Jersey: Van

Nostrand.

Trahair, N.S., 1993. *Flexural-torsional buckling of structures*. London: Chapman and Hall.

Vlasov, V.Z., 1961. *Thin-walled elastic beams*. Israel Prog. for Scientific Translations, Jerusalem.

Wang, C.M. and Kitipornchai, S., 1986. On stability of monosymmetric cantilevers. *Engineering Structures*, vol. 8, pp. 169-180.