



Um Estudo Sobre Métodos Numéricos Aplicados à Simulação de Reservatórios Petrolíferos

Luís H. C. da Cunha

Cristiane O. Faria

luish.henrique@hotmail.com

cofaria@ime.uerj.br

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Análise Matemática - IME
Rua São Francisco Xavier, 524, 6º andar, Bloco F, CEP:20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Sandra M. C. Malta

smcm@lncc.br

LNCC – Laboratório Nacional de Computação Científica

Av. Getúlio Vargas 333, CEP: 25651-075, Petrópolis, RJ, Brazil

Abstract. *A simulação computacional possui grande importância na Engenharia de Reservatórios, auxiliando no entendimento da geologia da rocha-reservatório e do escoamento de fluidos ali existentes; permitindo reproduzir (com certo grau de precisão) o comportamento de reservatórios de petróleo submetidos a diferentes estratégias de produção. O principal objetivo do estudo de reservatórios é prever comportamentos futuros deste, avaliando e otimizando os caminhos/trajetórias do fluido, almejando assim, o aumento na recuperação final de hidrocarbonetos. Por isso, soluções numéricas para simulação de reservatórios devem levar em conta a presença das características físicas relevantes, como meio heterogêneo e anisotrópico, geologias e processos físicos complexos. Estas características são bastante relevantes introduzindo dificuldades no desenvolvimento de técnicas numéricas apropriadas. Neste trabalho, apresentamos um estudo numérico detalhado da aplicação dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos, os mais utilizados nos simuladores de reservatórios, na solução do sistema de Darcy. Comparação entre as duas metodologias é discutida e ilustrada através de simulações numéricas considerando-se um problema unidimensional em um meio heterogêneo.*

Keywords: *Reservatórios, Diferenças Finitas, Volumes Finitos*

1 INTRODUÇÃO

A possibilidade de reproduzir o comportamento de certas características físicas dos reservatórios de petróleo a um custo relativamente muito mais baixo do que em testes de campo, prevendo performances futuras destes, torna a simulação de reservatórios muito atrativa. No entanto, escoamentos de fluidos em meios porosos quando são modelados matematicamente usando equações diferenciais parciais (EDPs) resultam em modelos extremamente complexos, e para serem resolvidos é necessário a aplicação de diversas técnicas matemáticas sofisticadas. No caso de um escoamento monofásico incompressível em um meio poroso, o problema modelado pela equação de conservação de massa e a lei de Darcy, juntos formam o que chamamos de sistema de Darcy, que relaciona a velocidade do fluido no meio poroso com o gradiente da pressão através do tensor de permeabilidade. Para resolver esse sistema vários métodos podem ser aplicados e encontrados na literatura. Em particular, neste trabalho consideraremos dois métodos numéricos: o método de Diferenças Finitas (DF) (LeVeque, 2007; Biezuner, 2007) e o método de Volumes Finitos (VF) (Rodrigues, 2015; Fortuna, 2000). Um estudo comparativo avaliando a influência da permeabilidade nas soluções aproximadas em um problema unidimensional é apresentado.

2 PROBLEMA MODELO

O princípio básico para a dedução do modelo aplicado ao escoamento monofásico em um meio poroso rígido saturado é a equação da lei de conservação da massa e a lei de Darcy, que relaciona a velocidade do escoamento de um fluido incompressível com o gradiente da pressão,

$$\frac{\partial(\phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{x}) f; \quad \mathbf{v} = \frac{-\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\mu} (\nabla p + \rho(\mathbf{x}) \mathbf{g}), \text{ em } \Omega.$$

Considerando-se, em particular, o caso unidimensional, onde o domínio é o intervalo $[0, L] \in \mathbb{R}$, com as propriedades $\phi(\mathbf{x}) = \phi$ (porosidade), $\rho(\mathbf{x}) = \rho$ (densidade) e μ (viscosidade) constantes, os efeitos gravitacionais desprezados ($\mathbf{g} = 0$) e o tensor de permeabilidade $\frac{\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\mu} = k$, obtém-se o seguinte sistema:

$$v' = f \text{ em } [0, L] \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$v = -k p' \text{ em } [0, L] \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

ao qual adiciona-se condições de contorno para a pressão. Uma abordagem para resolver o sistema é, substituir (2) em (1) e assim obter a equação de Laplace, onde a pressão é a variável de interesse, ou seja,

$$-k p''(x) = f(x) \text{ em } [0, L] \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$p(0) = a, p(L) = b, \quad (4)$$

onde foi considerado condição de contorno do tipo de Dirichlet. Após a obtenção da pressão por (3)-(4), a velocidade é calculada diretamente de (2).

3 TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÕES

3.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

A essência do Método das Diferenças Finitas (DF) é a discretização do contínuo tornando o problema “finito”, e isto o faz computável. Inicialmente, deve-se discretizar o domínio, ou

gerar uma *malha*. Este procedimento consiste em aproximar o domínio contínuo por pontos discretos contidos nele. Usando um espaçamento constante Δx , entre os pontos, o intervalo $[0, L]$ é subdividido em n subintervalos de comprimento $\Delta x = L/n$ e o domínio discreto é definido como $x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \dots, x_i = i\Delta x, \dots, x_n = n\Delta x = L$. As aproximações serão calculadas nos pontos desta malha. A discretização de (3) será obtida utilizando-se o esquema de diferença centrada para a derivada segunda. Para as condições de contorno, tem-se $p_0 = p(0) = a$ e $p_n = p(L) = b$. Desse modo, denotando $p_i = p(x_i)$, $k_i = k(x_i)$ e $f_i = f(x_i)$ os valores de $p(x)$ podem ser calculados a partir da resolução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_2 p_2 - (k_2 + k_1) p_1 & = -f_1 \Delta x^2 - k_1 a \\ k_3 p_3 - (k_3 + k_2) p_2 + k_2 p_1 & = -f_2 \Delta x^2 \\ & \vdots \\ k_{n-1} p_{n-1} - (k_{n-1} + k_{n-2}) p_{n-2} + k_{n-2} p_{n-3} & = -f_{n-1} \Delta x^2 \\ -(k_n + k_{n-1}) p_{n-1} + k_{n-1} p_n & = -f_n \Delta x^2 - k_n b \end{array} \right. \quad (5)$$

utilizando a técnica de eliminação gaussiana. Após a determinação do valor da pressão, a aproximação da velocidade é encontrada diretamente de (2) utilizando diferença central para a aproximação da derivada. Para os pontos da fronteira no cálculo de $v(x)$ foi necessário o uso de uma aproximação diferente, pois a diferença central emprega valores de $p(x)$ que não pertencem ao domínio considerado. Essa aproximação foi obtida através da técnica de Coeficientes Indeterminados (LeVeque, 2007), chegando às seguintes fórmulas:

$$v_0 = \frac{-1}{2\Delta x}(3p_0 - 4p_1 + p_2); \quad v_n = \frac{1}{2\Delta x}(3p_n - 4p_{n-1} + p_{n-2}). \quad (6)$$

3.2 MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

No método de Volumes Finitos (VF) a discretização é feita dividindo o domínio em Volumes de Controle (VC) (ou células da malha). Aqui, foi utilizada a malha centrada na célula uniforme, onde são definidas as fronteiras do VC de modo similar ao utilizado em diferenças finitas, e pontos x_i são colocados no ponto médio de cada VC ($x_i = \frac{x_i^* + x_{i+1}^*}{2}$). x_i^* é a posição da fronteira do VC e $\Delta x = x_i^* - x_{i-1}^*$, ou seja, $x_1^* = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}\Delta x$, $x_1^* = \Delta x$, $\dots$, $x_i^* = i\Delta x$, $x_i = (i + \frac{1}{2})\Delta x$, $\dots$, $x_n = (n + \frac{1}{2})\Delta x$, $x_{n+1}^* = n\Delta x = L$ (Veja Figura 1). A partir dessa

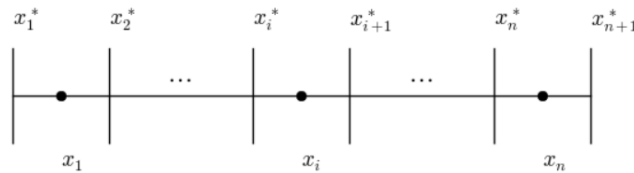


Figura 1: Representação dos volumes de controle (VC) em uma malha utilizada no método de VF.

discretização, integra-se (3) em cada VC, tendo que,

$$\int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} -k p''(x) dx = \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} f(x) dx = F(x_i). \quad (7)$$

Através do teorema fundamental do cálculo, o lado esquerdo de (7) é re-escrito como $k_i p'(x_i^*) - k_{i+1} p'(x_{i+1}^*)$. As derivadas $p'(x_i^*)$ são aproximadas por diferença central utilizando os pontos colocados em x_i^* , i.e., $p'(x_i^*) = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x}$, onde $p_i = p(x_i)$. Para as derivadas que estavam na fronteira, tem-se $p'(x_1^*) = \frac{p_1 - a}{\Delta x/2}$ e $p'(x_n^*) = \frac{b - p_n}{\Delta x/2}$. Sendo k_i a permeabilidade definida no ponto x_i^* , é possível calcular o valor da pressão nos pontos x_i , resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (k_2 + 2k_1)p_1 - k_2 p_2 & = F_1 \Delta x + 2k_1 a \\ -k_2 p_1 + (k_2 + k_3)p_2 - k_3 p_3 & = F_2 \Delta x \\ \vdots & \\ -k_{n-1} p_{n-2} + (k_{n-1} + k_n)p_{n-1} - k_n p_n & = F_{n-1} \Delta x \\ -k_n p_{n-1} + (k_n + 2k_{n+1})p_n & = F_n \Delta x + 2k_{n+1} b \end{cases} \quad (8)$$

A velocidade é calculada de forma similar apresentada na Seção 3.1. Os resultados da velocidade encontram-se distribuídos nas posições onde as fronteiras do VC estão definidas, e os resultados da pressão no ponto médio das células.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, um problema unidimensional foi construído com o intuito de avaliarmos as duas metodologias discutidas na seção anterior. O intervalo escolhido foi $[0, 1]$ com $n = 50$, $p(0) = 250$, $p(L) = -250$, $f(x) = 0$ e a permeabilidade é $k = 1$ para $0 \leq x < 1/2$ e $k = 10^{-3}$ para $1/2 < x \leq 1$. Para o método de Volumes Finitos, as integrais foram calculadas numericamente usando o método do Trapézio. Relembrando que a permeabilidade k foi definida nos pontos da malha, no método de Volumes Finitos foi necessário calcular a sua média nas fronteiras das células. E isso foi feito de duas formas, utilizando média aritmética e média harmônica.

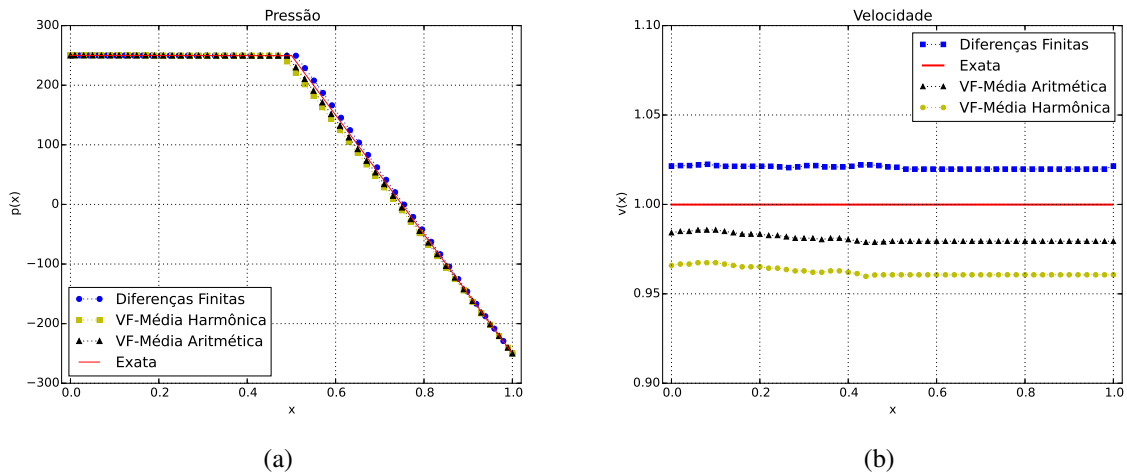


Figura 2: Estudo comparativo das soluções aproximadas (a) da pressão e (b) da velocidade utilizando os métodos de DF e VF.

Analisando os resultados, nas Figuras 2 (a) e (b) observa-se que as soluções para a pressão são bem reproduzidas por ambos os métodos; contudo, para o campo de velocidades a melhor

aproximação é dada pelo método VF com a permeabilidade calculada via média aritmética (Figura 2 (b)). Na Figura 3-(a) taxas de convergência para todos os métodos são mostradas. Outra forma de verificar a precisão dos métodos é analisar a sua capacidade de conservar massa dentro do domínio, isto é, se o método satisfaz a equação de conservação de massa (da Rosa, 2011). A Figura 3-(b) mostra que na interface da descontinuidade o método de VF com média aritmética apresenta os melhores resultados; portanto, o mais conservativo.

CONCLUSÃO

Neste trabalho concluímos que, embora com resultados bem similares, para o caso de um meio heterogêneo a estruturação do problema usando o método de VF surge naturalmente se comparamos com o método de DF, onde foi necessário um tratamento mais cuidadoso das condições de contorno. Confirmamos assim a maior aplicabilidade do método de VF na resolução de problemas na área de recuperação de reservatórios (Rodrigues, 2015).

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, o apoio recebido para o desenvolvimento deste trabalho.

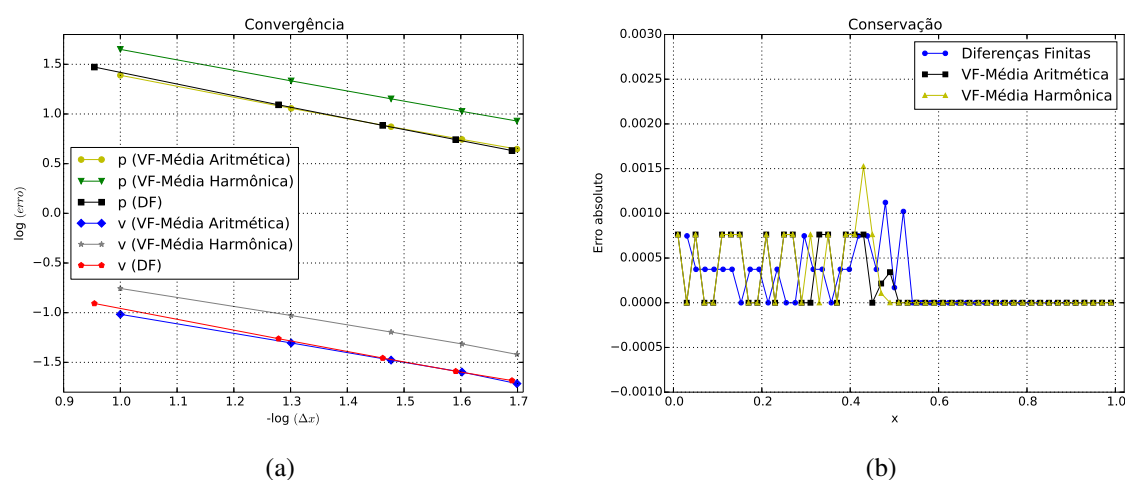


Figura 3: (a) Estudo de convergência e (b) conservação de massa.

REFERÊNCIAS

- Biezuner, R. J., 2007. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais Elípticas - Notas de Aula.
- da Rosa, V. S. D., 2011. Modelagem Computacional de Escoamentos de Fluidos em Solos Não-saturados. Master's thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC.
- Fortuna, A. O., 2000. Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações. Edusp.
- LeVeque, R. J., 2007. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations Steady-State and Time-Dependent Problems. SIAM.
- Rodrigues, J. R., 2015. Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos - Programa de Verão, LNCC 2015.