



MODELOS DE PLASTICIDADE COMPUTACIONAL DO SISTEMA INSANE

Danilo Bento Oliveira

Samuel Silva Penna

Roque Luiz da Silva Pitangueira

dboliveira00@ufmg.br

spenna@dees.ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

Universidade Federal de Minas Gerais

Avenida Antônio Carlos, 6627, Pampulha 31270-901, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil

Resumo. Entender o comportamento real de uma estrutura é algo muito complexo, devido a variação das tensões atuantes no corpo que por vezes extrapolam os limites do domínio elástico. É nesse âmbito que surge a teoria da plasticidade, uma extensão necessária da teoria da elasticidade, que fornece uma abordagem mais realista acerca do comportamento do material e consequentemente da estrutura. Tal complexidade existente é devida aos diferentes comportamentos observados nos diversos materiais. A teoria matemática da plasticidade provê um conjunto de equações que descrevem, a partir de hipóteses físicas, o comportamento de materiais elastoplásticos, permitindo assim, a análise fisicamente não linear de estruturas. Neste sentido, este trabalho abordada o arcabouço teórico necessário à implementação de modelos constitutivos elastoplásticos com “hardening” isotrópico e cinemático no ambiente computacional INSANE, um software livre para análise estrutural, criado a partir do paradigma da programação orientada a objetos. Uma formulação geral para modelos de plasticidade computacional é descrita de forma detalhada em sua versão baseada em tensão, dando ênfase aos critérios de von Mises e Drucker-Prager, confrontando as expressões de ambos os critérios. Finalmente, são apresentadas simulações numéricas do comportamento fisicamente não linear de modelos estruturais via Método dos Elementos Finitos.

Palavras Chave: Plasticidade Computacional, Modelos Constitutivos, Análise Não Linear, Método dos Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

O constante crescimento de pesquisas na área da mecânica dos sólidos tem se sustentado no avanço das técnicas computacionais, alimentado pelo aumento da capacidade de processamento dos computadores e pelo surgimento de softwares capazes de realizar análises sofisticadas. Estes estudos são desenvolvidos com o objetivo de se determinar, da maneira mais realista possível, o comportamento mecânico de materiais aplicados na engenharia.

A solução para um problema estrutural está relacionada à capacidade do engenheiro de compreender as simplificações físicas representadas por modelos matemáticos, notadamente aquelas referentes ao comportamento constitutivo do meio. As pesquisas com foco na modelagem constitutiva dos materiais vêm proporcionando formulações sofisticadas, como a teoria matemática da plasticidade.

Uma das funções do modelo constitutivo é prever a existência de um domínio elástico delimitado por uma função matemática. Tratando-se de modelos elastoplásticos, tal função é escrita em termos das tensões e delimita a uma região dentro da qual o material tem comportamento puramente elástico, sem o surgimento de deformações permanentes. Dois dos critérios mais conhecidos e utilizados são: o critério proposto por von Mises, para descrever o escoamento plástico em metais e materiais cujo comportamento não dependam da pressão hidrostática e o critério de Drucker-Prager, que consiste numa modificação do primeiro, no qual um termo extra é incluído para que o modelo se torne sensível ao efeito da pressão hidrostática.

Outra importante função do modelo constitutivo é prever como o material se comporta na ocorrência de deformação plástica, associada ao fenômeno de encruamento do material, ou seja, à possibilidade de haver aumento da tensão de escoamento acompanhando a evolução das deformações inelásticas. Os modelos de von Mises e Drucker-Prager podem ser utilizados considerando regras de encruamento isotrópico, cinemático ou misto.

Este artigo apresenta o arcabouço teórico e computacional usado para a implementação de modelos constitutivos elastoplásticos no ambiente computacional INSANE (Interactive Structural ANalysis Environment). Maiores detalhes sobre as implementações do sistema podem ser vistos em Almeida (2005), Fonseca (2006), Fonseca (2008), Fuina (2009) e Penna (2011).

2 FORMULAÇÃO GERAL PARA MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTOPLÁSTICOS

Visando a implementação de modelos constitutivos no sistema INSANE, Penna (2011) apresentou uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol et al. (1994), capaz de contemplar vários modelos constitutivos (elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico), partindo de hipóteses comuns a modelos elastoplásticos e de degradação elástica para a descrição do meio material, criando assim, o hoje denominado Arcabouço Teórico e Computacional para Modelos Constitutivos do INSANE.

Segundo o aludido Arcabouço Teórico, as equações das variações de tensão podem ser escritas como

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^0(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad (1)$$

com

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \dot{\lambda} m_{kl} \quad (2)$$

onde E_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de rigidez elástico, $\dot{\lambda}_m$ é o multiplicador plástico, m_{kl} é o gradiente das funções de potenciais plásticos Q (com $m_{kl} = \partial Q / \partial \sigma_{kl}$), que geometricamente, representa a direção da regra de fluxo e $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ é a variação das deformações plásticas.

Ao longo dos anos muitos critérios de escoamento foram sendo propostos para a definição de superfícies de plastificação, à medida que se estudavam as diversas classes de materiais. A Equação (3) representa a forma linearizada da condição de consistência a partir da superfície de escoamento $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$ onde os argumentos da função são o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e o vetor das variáveis internas $\mathbf{p}$.

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \dot{\sigma}_{ij} + \left. \frac{\partial F}{\partial p_k} \right|_\sigma \dot{p}_k = 0 \quad (3)$$

Podendo ser escrita como

$$n_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (4)$$

com

$$n_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \quad (5)$$

e

$$H = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_\sigma = - \left. \frac{\partial F}{\partial p_i} \right|_\sigma \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon_{kl}^p} m_{kl} \quad (6)$$

onde n_{ij} representa as derivadas de F para valores constantes do multiplicador plástico λ e H é o módulo linear isotrópico de endurecimento/amolecimento, obtido a partir de derivadas de F para valores constantes de $\boldsymbol{\sigma}$, sendo positivo para o caso de endurecimento (expansão da superfície de escoamento), zero para o caso de plasticidade perfeita (sem alteração da superfície de escoamento) e negativo para o amolecimento (contração da superfície de escoamento).

Geometricamente, n_{ij} representa um vetor normal à superfície de carregamento atual no espaço de tensões como apresentado na Fig. 1. Em um modelo associativo, a função de carregamento F e a regra de fluxo são definidas de tal modo que n e m são totalmente proporcionais (ou seja $Q = F$).

O multiplicador plástico ($\dot{\lambda}$) apresentado na Eq. (2) é um escalar, cujo valor é positivo em caso de deformações plásticas, e tem como papel ajustar o tamanho dos incrementos

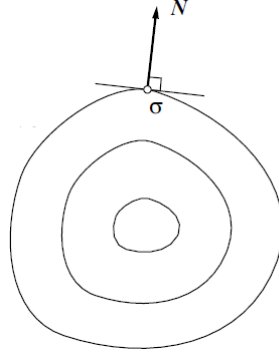


Figura 1: Vetor de fluxo. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

plásticos. Substituindo as Eqs. (1) e (2) na Eq. (3) tem-se o clássico formato para o multiplicador plástico, dado por

$$\dot{\lambda} = \frac{n_{cd}E_{cdkl}^0\dot{\epsilon}_{kl}}{H + n_{pq}E_{pqrs}^0m_{rs}} \quad (7)$$

As derivadas apresentadas fornecem as fórmulas básicas para o operador tangente, que relaciona as variações de deformação com variações de tensão e é necessário para a montagem do tensor de rigidez tangente. Assim, a equação constitutiva pode ser dada por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (8)$$

Substituindo as Eqs. (1) e (7) na Eq. (8), tem-se tensor E_{ijkl}^t que é denominado módulo tangente elastoplástico e é dado por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl}^0 - \frac{E_{ijab}^0 m_{ab} n_{cd} E_{cdkl}^0}{H + n_{pq} E_{pqrs}^0 m_{rs}} \quad (9)$$

O módulo tangente elastoplástico no entanto, não garante convergência quadrática na resolução dos métodos incrementais iterativos. Uma maneira de se obter taxas de convergência superior a esta limitação é a substituição do módulo tangente elastoplástico pelo módulo tangente consistente, conforme visto adiante (seção 4).

2.1 Critério de von Mises

O critério proposto por von Mises em 1913 (Chen e Han, 1988) estabelece que a plastificação tenha início quando o valor crítico da energia de distorção por unidade de volume é atingido. Este pressuposto equivale a considerar que o segundo invariante do tensor desviador ou tensor anti-esférico, J_2 , atinge um valor crítico. A superfície do escoamento de von Mises no espaço de tensões, representada por um cilindro, é mostrada na Fig.2.

A representação matemática do critério de escoamento é dada por

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}))} - (\sigma_y + \mathcal{H}\alpha) \quad (10)$$

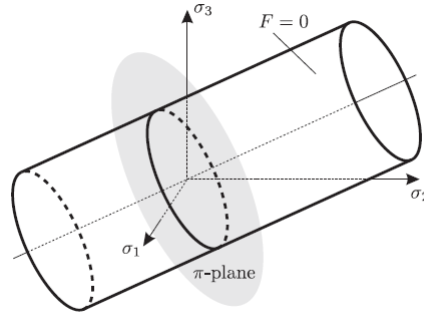


Figura 2: Superfície de escoamento de von Mises. Adaptado de Kossa (2011).

onde $\mathcal{H}$ é o módulo inelástico isotrópico generalizado, α é a função das deformações plásticas acumuladas e $\boldsymbol{\eta}$ é o tensor de tensões, dado por

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = s(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta} \quad (11)$$

e definido como sendo a diferença entre o tensor desviador e o tensor de tensões $\boldsymbol{\beta}$, conhecido como "*back-stress*" e cuja lei de evolução é dada por

$$\boldsymbol{\beta} = \mathcal{H} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (12)$$

onde $\mathcal{H}$ é o módulo de encruamento cinemático e $\boldsymbol{\beta}$ é o tensor relativo às variáveis termodinâmicas associadas ao encruamento cinemático.

O tensor $\boldsymbol{\beta}$ representa a evolução da posição do centro da superfície de plasticidade no espaço de tensões. Quando $\boldsymbol{\beta} = 0$ tem-se $\boldsymbol{\eta} = s$, e a superfície de escoamento é a de von Mises com encruamento isotrópico e tensão de escoamento σ_y .

Ainda na Eq. (10), tem-se o segundo invariante do tensor anti-esférico dado por:

$$J_2(\boldsymbol{\eta}) = -I_2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \text{tr}[\boldsymbol{\eta}^2] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \quad (13)$$

Assim, tem-se

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_{ij}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (14)$$

Onde $\|\boldsymbol{\eta}\| = \sqrt{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}$.

Em um modelo associado:

$$n_{ij} = m_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad (15)$$

O módulo inelástico, associado aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento, é dado por

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \quad (16)$$

com

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{kl}^p} = \mathcal{H} + \mathcal{K} \quad (17)$$

2.2 Critério de Drucker-Prager

O critério proposto por Drucker-Prager em 1952 (Chen e Han, 1988) é uma generalização do critério de von Mises, consistindo numa modificação do critério, na qual um termo extra é incluído para que o modelo se torne sensível ao efeito da pressão hidrostática. Enquanto o critério de von Mises é interpretado em termos do tensor de tensões octaédrico, o critério de Drucker-Prager impõe que o escoamento plástico ocorre quando o invariante da tensão desviadora J_2 e a tensão hidrostática atingem uma combinação crítica.

A superfície de escoamento no espaço de tensões principais é representada por um cone circular cujo eixo de simetria é o eixo da pressão hidrostática. A superfície de escoamento de Drucker-Prager está ilustrada na Fig. 3.

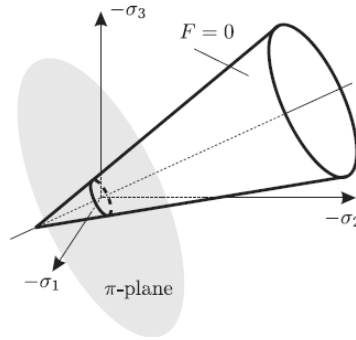


Figura 3: Superfície de escoamento de Drucker-Prager. Adaptado de Kossa (2011).

O critério de Drucker-Prager é dado pela função:

$$F(\sigma, \alpha) = \sqrt{J_2(s(\sigma))} + \eta p(\sigma) - k \quad (18)$$

onde $p = \text{tr}[\sigma]/3$ é o invariante do tensor hidrostático, η é uma constante relacionada ao material e a função k , define o tamanho da superfície de escoamento. Para o caso do material sofrer encruamento isotrópico, a função k relaciona-se com a curva tensão-deformação uniaxial (Chen e Han, 1988) e pode ser definido por:

$$k = \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sigma(\alpha) \quad (19)$$

onde $\sigma(\alpha)$ representa a curva de encruamento, que, para o caso linear é dada por

$$\sigma(\alpha) = \sigma_y + \mathcal{H} \alpha \quad (20)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento inicial, α é o fluxo plástico acumulado e $\mathcal{H}$ é o módulo de encruamento.

Uma das principais diferenças na formulação do modelo de Drucker-Prager em relação ao modelo de von Mises é que agora trata-se de um modelo não associado ($F \neq Q$), e a função de potencial plástico, similar à função de escoamento é dada por

$$Q(\sigma, \sigma_y) = \sqrt{J_2(s(\sigma))} + \bar{\eta}p(\sigma) \quad (21)$$

em que $\bar{\eta}$ é uma constante adicional do material.

Portanto, os gradientes de F e Q para valores constantes do multiplicador plástico, representado pelos tensores $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, são dados por:

$$m_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{s:s}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} + \frac{\bar{\eta}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{s:s}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} + \frac{\eta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

O módulo inelástico, obtido a partir de uma lei associada aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento, é dado por

$$H = -\frac{1}{3}tr(\sigma)\mathcal{H} \quad (24)$$

A aplicação do modelo de Drucker-Prager deve levar em consideração a singularidade existente na superfície de escoamento, seu vértice. Portanto, é necessário que seja utilizada uma estratégia de solução alternativa durante a aplicação do algoritmo de integração das relações constitutivas. No contexto de superfícies de escoamento com singularidades tais como cantos e vértices, vários métodos já foram propostos, como os de Simo e Hughes (1998) e Souza Neto et al. (2008). Quando o retorno ocorre no vértice, as funções de escoamento (Eq. (18)) e de potencial de fluxo plástico (Eq. (21)) devem ser alteradas para (Hofstetter e Taylor, 1991 apud Szabó e Kossa, 2011):

$$F(\sigma, \alpha) = \eta p(\sigma) - k \quad (25)$$

$$Q(\sigma, \sigma_y) = \bar{\eta}p(\sigma) \quad (26)$$

3 ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO DAS TENSÕES

Durante a análise elastoplástica é necessário que seja realizada a integração da lei constitutiva, para que as parcelas elástica e plástica do incremento de deformação total sejam obtidas, sendo este um processo iterativo, devido ao fato do módulo elastoplástico ser função da deformação plástica. Pelo caráter incremental dos modelos numéricos de plasticidade, deve-se utilizar um algoritmo da classe de mapeamento de retorno capaz de

obter a atualização das tensões necessária ao equilíbrio das forças internas na análise não linear.

O desenvolvimento de esquemas eficientes para a integração das relações constitutivas, no contexto numérico, ainda é alvo de pesquisas recentes em todo o mundo, principalmente por sua importância nos problemas de engenharia que envolvam deformação plástica. Existe uma grande variedade de métodos de integração, com diferentes níveis de complexidade (Taqieddin, 2008).

Atualmente o sistema INSANE conta com dois algoritmos de retorno, o método da projeção do ponto mais próximo ("Closest-Point Projection") e o método do plano de corte ("Cutting-Plane").

3.1 Closest-Point Projection

Do ponto de vista físico, o algoritmo "*Closest-Point Projection*" é um processo implícito sistemático, que considera um resíduo de fluxo plástico para garantir que a função de escoamento no passo atual " $n+1$ " seja igual a zero. Conceitualmente, a ideia do algoritmo é bastante simples e consiste numa aplicação sistemática do método de Newton para o sistema de equações dado pelas Eqs. (27), que resulta no cálculo da projeção a partir do ponto mais próximo de um estado de tensão de tentativa sobre a superfície de escoamento. O algoritmo é explicado abaixo em um contexto generalizado utilizando as notações propostas por Simo and Hughes (1998).

(1) Supor a existência de um carregamento plástico, isto é, $f_{n+1}^{trial} > 0$, de modo que $\lambda > 0$. Definir o fluxo plástico residual R_{n+1} e a condição de escoamento.

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} := \begin{Bmatrix} -\varepsilon_{n+1}^{p(k)} + \varepsilon_n^p \\ -\alpha_{n+1}^{(k)} + \alpha_n \end{Bmatrix} + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad f_{n+1}^{(k)} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}) \quad (27)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} := \nabla W(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p(k)})$, $\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} := -\nabla H(\alpha_{n+1}^{(k)})$ e W representa a energia elástica acumulada.

(2) Calcular o módulo elástico e o módulo tangente consistente:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(k)} = \nabla^2 W(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p(k)}) \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{n+1}^{(k)} := -\nabla^2 H(\alpha_{n+1}^{(k)}) \quad (28)$$

$$[\mathbf{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{n+1}^{(-1)} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1}] & \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}}^2 f_{n+1} \\ \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\mathbf{q}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1} & [\mathbf{D}_{n+1}^{(-1)} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 f_{n+1}] \end{bmatrix}^k \quad (29)$$

onde $[\mathbf{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1}$ é uma matriz cujos argumentos referem-se aos módulos de elasticidade e tangente.

(3) Obter incrementos dos parâmetros consistentes

$$\Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k)} - [\partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1} \partial \mathbf{q} f_{n+1}]^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{[\partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1} \partial \mathbf{q} f_{n+1}]^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1} \\ \partial \mathbf{q} f_{n+1} \end{Bmatrix}^k} \quad (30)$$

(4) Obter incrementos da deformação plástica e das variáveis internas

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{n+1}^{p(k)} \\ \Delta \alpha_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{n+1}^{(-1)} + \Delta \gamma_{n+1} \partial_{\sigma\sigma}^2 f_{n+1}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{D}_{n+1}^{(-1)} + \Delta \gamma_{n+1} \partial_{qq}^2 f_{n+1}] \end{bmatrix}^k \cdot \mathbf{A}_{n+1}^k \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1} \\ \partial \mathbf{q} f_{n+1} \end{Bmatrix}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

(5) Atualizar as variáveis de estado e os parâmetros consistentes

$$\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)} = \varepsilon_n^{p(k)} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{p(k)} \quad (32a)$$

$$\alpha_{n+1}^{p(k+1)} = \alpha_n^{p(k)} + \Delta \alpha_{n+1}^{p(k)} \quad (32b)$$

$$\Delta \gamma_{n+1}^{p(k+1)} = \Delta \gamma_n^{p(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{p(k)} \quad (32c)$$

A principal desvantagem associada ao processo iterativo descrito é a necessidade de se computar os gradientes da regra de fluxo e da lei de encruamento (Eq. 33), pois esta tarefa pode ser extremamente trabalhosa para modelos de plasticidade mais complexos.

$$\begin{bmatrix} \partial_{\sigma\sigma}^2 f(\sigma, q) & \partial_{\sigma q}^2 f(\sigma, q) \\ \partial_{q\sigma}^2 f(\sigma, q) & \partial_{qq}^2 f(\sigma, q) \end{bmatrix} \quad (33)$$

3.2 Cutting-Plane

O método Cutting-Plane, analisado em Ortiz e Simo (1986), é um processo explícito, que integra primeiro as equações elásticas a partir da tensão no passo anterior para obter a tensão de tentativa para o passo atual. O principal objetivo deste algoritmo é ignorar a necessidade de computar os gradientes contidos na Eq. (33). O caso geral deste esquema envolve as seguintes etapas:

(1) Supor a existência de um carregamento plástico, isto é, $f_{n+1}^{trial} > 0$, de modo que, $\lambda > 0$. Definir o fluxo plástico residual R_{n+1} e a condição de escoamento.

$$f_{n+1}^{(k)} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}) \quad (34)$$

(2) Obter incrementos dos parâmetros consistentes

$$\Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k)}}{[\partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1} : \mathbf{C}_{n+1}^k : \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1}^k + \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1}^k \cdot \mathbf{h}_{n+1}^k]} \quad (35)$$

(3) Atualizar as variáveis de estado e os parâmetros consistentes.

$$\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)} = \varepsilon_n^{p(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \partial \sigma f_{n+1}^k \quad (36a)$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{h}_{n+1}^k \quad (36b)$$

$$\Delta \gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \quad (36c)$$

A convergência do algoritmo para o valor final das variáveis de estado é obtida a uma taxa quadrática. Essas taxas quadráticas de convergência são alcançadas aqui apesar da simplicidade apresentada pelo método, o que, acabam tornando o algoritmo de plano de corte muito atraente para os cálculos de grande escala em modelos mais elaborados, principalmente nos códigos explícitos, que não requerem a solução de um sistema global de equações de equilíbrio.

4 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Para se obter a taxa de convergência quadrática durante a aplicação do método de Newton-Raphson na solução de algoritmos como o "*Closest-Point-Projection*", um passo crucial é utilizar o tensor tangente consistente (Simo e Hughes, 1998). O conceito de módulo tangente consistente foi formalizado por Simo e Taylor (1985) e, posteriormente, rerepresentado por diversos autores.

O procedimento para se obter o tensor constitutivo tangente, envolve o cálculo da derivada da tensão σ_n relacionada à deformação final, ε_{n+1} . Por esta razão, as derivadas de todas as variáveis internas que aparecem no procedimento de atualização de tensão correspondente têm que ser avaliadas (Szabó e Kossa, 2011). O módulo tangente consistente é definido como

$$E_{ep_{n+1}}^{(k)} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} \quad (37)$$

Como já discutido anteriormente, cada modelo tem suas particularidades e pode conter tantas variáveis quanto necessário para a descrição adequada do comportamento do material e, dependendo do modelo, tais variáveis podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais (Souza Neto et al., 2008).

4.1 Operador Tangente Consistente para o modelo de von Mises

O tensor tangente consistente para o modelo de von Mises com encruamento misto é dado por:

$$\mathbf{E}_{ijkl}^t = \mathbf{E}_{ijkl}^0 - \frac{\dot{\lambda} 6G^2}{\bar{q}_{n+1}^{trial}} \mathbf{I}_{d_{ijkl}} + 6G^2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{\bar{q}_{n+1}^{trial}} - \frac{1}{3G + \mathcal{H} + \mathcal{K}} \right) \bar{\mathbf{N}}_{n+1_{ij}} \bar{\mathbf{N}}_{n+1_{kl}} \quad (38)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, $\mathbf{I}_d$ é a projeção do tensor desviador, $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$ é o vetor de fluxo unitário e $\bar{q}_{n+1}^{trial}$ é a função da deformação elástica teste dada por:

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{3J_2(s_{n+1}^{trial})} \quad (39)$$

4.2 Operador Tangente Consistente para o modelo de Drucker-Prager

Para o modelo de Drucker-Prager existem duas possibilidades para o módulo elasto-plástico consistente: um módulo para quando o retorno ocorre na parte suave do cone e outro para quando o retorno acontece no vértice.

O módulo tangente consistente para o retorno na parte suave do cone é dado por:

$$\mathbf{E}_{ijkl}^t = 2G \left(1 - \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^{etrial}\|} \right) \mathbf{I}_{dijkl} + 2G \left(\frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^{etrial}\| - GA} \right) \mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{kl} - \sqrt{2} GAK (\eta \mathbf{D}_{ij} \delta_{kl} + \bar{\eta} \delta_{ij} \mathbf{D}_{kl}) + K(1 - K\eta\bar{\eta}A) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (40)$$

em que K é o módulo volumétrico dado por

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (41)$$

o tensor de segunda ordem $\mathbf{D}$ é:

$$\mathbf{D} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^{etrial}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{dn+1}^{etrial}\|} \quad (42)$$

e A é definido por

$$A = \frac{1}{G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H} \quad (43)$$

sendo η , ξ e $\bar{\eta}$ constantes relacionadas ao material.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de validar as implementações são apresentadas duas simulações numéricas realizadas com os Modelos Elastoplásticos de von Mises e Drucker-Prager implementados no INSANE. Para tanto, os resultados obtidos são comparados com resultados existentes na literatura.

5.1 Viga Engasta em Balanço

Este exemplo trata do colapso de uma viga engastada em uma das extremidades. As características geométricas, as condições de contorno e as malhas utilizadas nos modelos estão ilustradas na Figs. 4 e 5.

As propriedades adotadas para o material estão na Tabela 1.

Lubliner (1990) fornece de forma detalhada a solução analítica para a carga limite de colapso da viga apresentada neste problema, que pode ser obtida por

$$F_{limite} = \frac{\sigma_y b h^2}{4L} \quad (44)$$

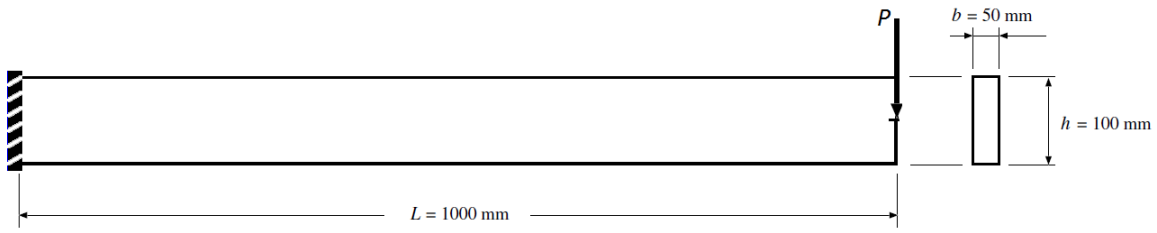


Figura 4: Geometria da viga em balanço submetida a carregamento na extremidade livre.

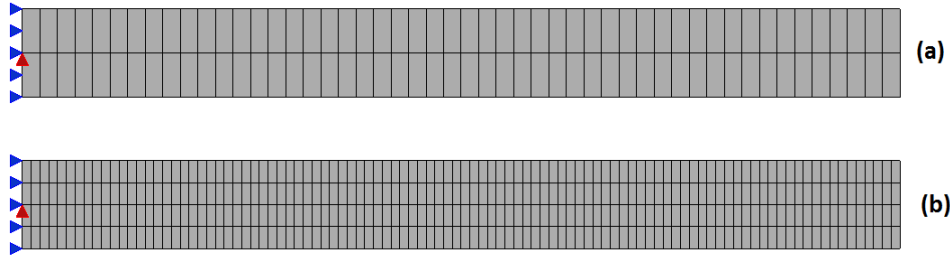


Figura 5: Malha de elementos finitos para a viga em balanço submetida a carregamento na extremidade livre (a) Malha de elementos Q8. (b) Malha de elementos Q4.

Tabela 1: Parâmetros do Material

Módulo de Elasticidade	$E = 210GPa$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensão de escoamento	$\sigma_y = 0.24GPa$

em que b e h são a largura e a altura da seção transversal, respectivamente, e L o comprimento total da viga. Para a geometria e propriedades do material apresentados, o limite de carga analítico é

$$F_{limite} = \frac{0,24 \times 0,05 \times (0,1)^2}{4 \times 1,0} = 30kN \quad (45)$$

A partir destas informações, procedeu-se com o ajuste dos parâmetros para a obtenção da solução numérica utilizando o modelo elastoplástico de von Mises, considerando plasticidade perfeita, análise sob condições de Estado Plano de Tensão (EPT), método de controle de deslocamento generalizado com incremento de $0,015mm$ e tolerância de 1×10^{-3} . Foram feitas duas simulações, adotando-se a malha com 2×50 elementos quadriláteros de oito nós e 4×100 elementos quadriláteros de 4 nós como visto na Fig. 5.

A Figura 6 mostra a solução numérica obtida, apresentado o deslocamento vertical resultante a partir da carga aplicada para cada incremento. Para o modelo de elementos finitos de quatro nós, a carga alcançada no último passo foi de $F = 31,23kN$, apresentando um erro relativo de $4,11\%$. O modelo de elementos finitos de oito nós apresentou um nível de carga de $F = 30,47kN$, resultado que está em concordância com o limite teórico estabelecido, com um erro relativo de $1,57\%$.

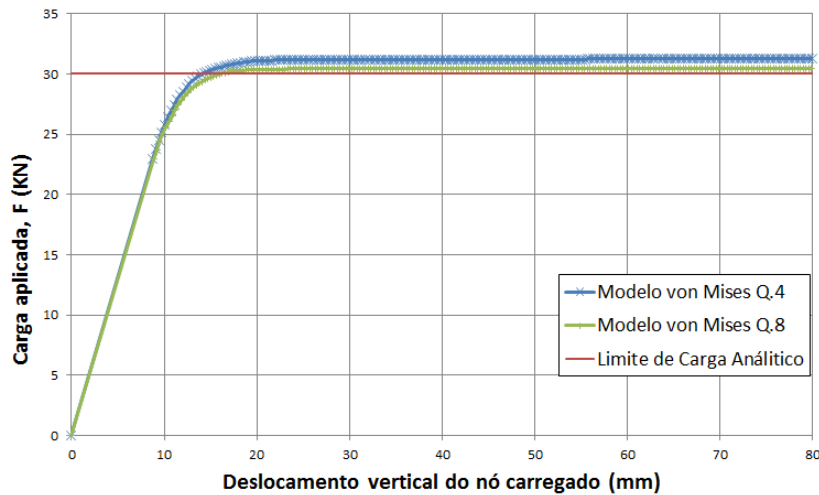


Figura 6: Curva Carga x Deslocamento Vertical para a viga em balanço.

5.2 Sapata Corrida

O colapso de uma sapata corrida foi analisado por Souza Neto et al. (2008). O problema consiste em uma base retangular, com uma largura B e comprimento L , apoiada sobre o solo (assumido como um meio infinito), submetida a uma pressão vertical P . A Figura 7 ilustra a geometria do problema.

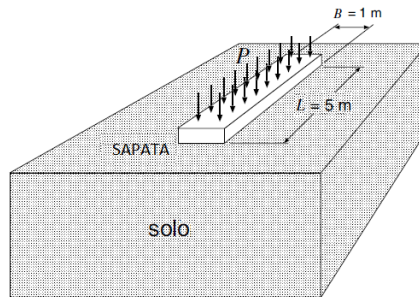


Figura 7: Sapata corrida: definição do problema. Adaptado de Souza Neto et al. (2008)

O objetivo desta análise é determinar a pressão sob a qual irá ocorrer o colapso da base. Os parâmetros do material estão na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros do Material

Módulo de Elasticidade	$E = 10^7 kPa$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,48$
Coesão	$c = 490 kPa$

O solo foi modelado considerando-se o critério de Drucker-Prager, que é sensível à pressão hidrostática e, portanto, adequado a este tipo de análise. Devido à simetria apenas a metade da seção transversal foi discretizada, utilizando uma malha de 140 elementos

quadrilaterais de oito nós, análise sob condições de Estado Plano de Tensão (EPT). Na solução foi adotado o método de controle direto de deslocamento com incremento de deslocamento vertical de $3.75 \times 10^{-7} \text{ m}$ no ponto de simetria e com tolerância de 1×10^{-3} . Para simular o domínio infinito, a malha de elementos finitos foi discretizada com profundidade, largura e altura de $5,0 \text{ m}$ conforme Fig. 8. Considerou-se também que a sapata é rígida e sem atrito na interface solo/sapata.

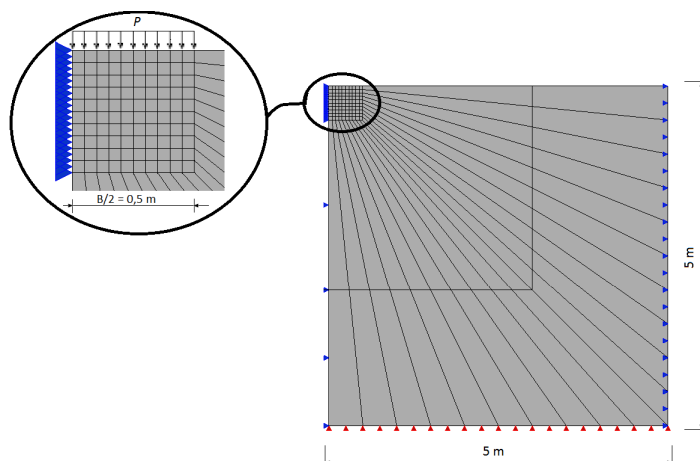


Figura 8: Sapata corrida: Malha de elementos finito. Adaptado de Souza Neto et al. (2008)

Somente a lei associativa ($\phi = \psi = 20^\circ$) foi considerada durante a análise. A Figura 9 apresenta a comparação entre o resultado obtido com o critério de Drucker-Prager e a solução estabelecida por Prandtl (Souza Neto et al., 2008).

$$\frac{P_{lim}}{c} \approx 14,8 \quad (46)$$

O limite de carga normalizado obtido a partir do modelo numérico foi de $P_{lim}/c = 14,61$, um resultado muito próximo do limite estabelecido por Prandtl, apresentando um erro de aproximadamente 1,28%.

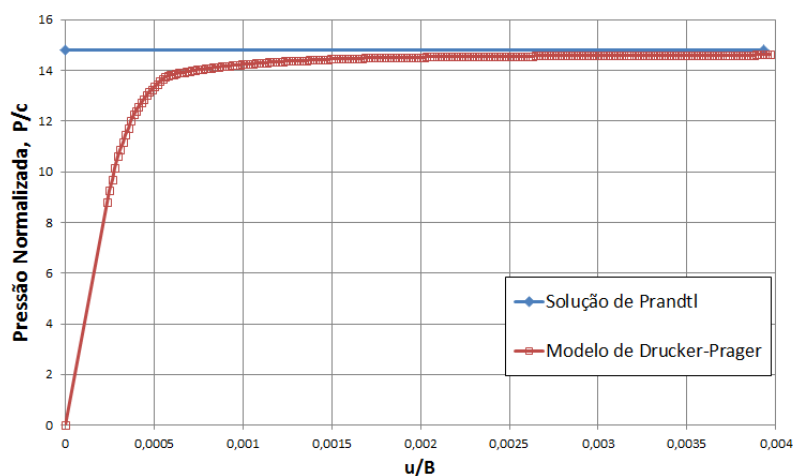


Figura 9: Curva Carga x Deslocamento Vertical normalizado.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a formulação para modelos constitutivos elastoplásticos, segundo o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011), enfatizando os critérios de von Mises com encruamento misto e Drucker-Prager com encruamento isotrópico. No desenvolvimento deste texto foram apresentadas as equações necessárias para a implementação destes modelos no ambiente computacional INSANE. Além disso, também foram apresentadas as equações necessárias para a implementação dos algoritmos de retorno "*Closest-Point Projection*" e "*Cutting-Plane*", necessários para a integração das relações constitutivas que regem o comportamento do material.

Foram apresentados dois exemplos numéricos, com o objetivo de verificar a implementação dos modelos, sendo observado, em ambos os casos, que os resultados obtidos foram satisfatórios se comparados aos resultados presentes na literatura.

A continuação desta pesquisa objetiva implementar novos modelos constitutivos no sistema, além dos mencionados neste trabalho, como os modelos de Tresca e Mohr Coulomb. Os modelos de Rankine, para materiais sensíveis a pressão hidrostática e o modelo de Ottosen, para o concreto também já estão implementados e estão em fase de testes.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio importante das agências de pesquisa brasileira CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Processo: 308785 / 2014-2) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - Processo: PPM-00669-15)

REFERÊNCIAS

- Almeida, M. L., 2005. *Elementos Finitos Paramétricos Implementados em JAVA*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. *A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface*. International Journal of Solids Structures, vol. 31, pp. 2835-2865.
- Chen, W. F., Han, D. J., 1988. *Plasticity for Structural Engineers*. Nova York, EUA: Springer-Verlag.
- Fonseca, F. T., 2008. *Sistema Computacional para Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear Através do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. *Aplicação Orientada a Objetos para Análise Fisicamente Não-Linear com Modelos Reticulados de Seções Transversais Compostas*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. *Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados*. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Hofstetter, G., Taylor, R.L., 1991. *Treatment of the Corner Region for Drucker–Prager Type Plasticity*. Z. Angew. Math. Mech. 71, 589–591.
- Kossa, A., 2011. *Exact Stress Integration Schemes for Elastoplasticity*. Tese (Doutorado), Budapest University of Technology and Economics, Budapeste, Hungria.
- Lubliner, J., 1990. *Plasticity Theory*. Nova York, EUA: Macmillan Publishing Company.
- Ortiz, M., Popov, E. P., 1985. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. International Journal of Numerical Methods in Engineering, v. 21, p. 1561–1576, 1985.
- Penna, S. S., 2011. *Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto*. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Souza Neto, E. A., Peric, D., Owen, D. R. J., 2008. *Computational Methods For Plasticity: Theory and Application*. Swansea, EUA: Wiley.
- Simo, J. C., Hughes, T. J. R., 1998. *Computational Inelasticity*. Nova York, EUA: Springer-Verlag.
- Simo, J. C., Taylor, R. L., 1985. *Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 48, p. 101–118.
- Szabó, L., Kossa, A., 2012. *A new exact integration method for the Drucker–Prager elastoplastic model with linear isotropic hardening*. International Journal of Solids and Structures, vol 49, pp 170 - 190.