



DERIVADA TOPOLÓGICA DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM NO PROBLEMA DE TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA

Andrey Dione Ferreira

Antônio André Novotny

andreydf@lncc.br

novotny@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica

Avenida Getúlio Vargas, 333, 25651-075, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

Resumo. O problema de tomografia por impedância elétrica consiste em determinar a distribuição de condutividade elétrica de um meio a partir de medidas tomadas na fronteira do corpo. Esse problema tem diversas aplicações em medicina com a detecção de tumores e monitoramento de apneias, em geofísica e ciências ambientais com a localização de depósitos de minerais e monitoramento de fluídos, e na engenharia com a detecção de corrosões em estruturas. Neste trabalho, objetiva-se reconstruir um conjunto de inclusão com coeficientes de condutividade elétrica distinta do meio, submetendo o corpo a um conjunto de fluxo elétrico e medindo a correspondente distribuição de campo elétrico sobre sua fronteira. Como esse problema é escrito na forma de uma equação diferencial parcial sobredeterminada, a ideia básica consiste em reescrevê-lo na forma de um problema de otimização. Em particular, objetiva-se minimizar um funcional de forma que mede a diferença entre os potenciais medidos e calculados numericamente. Sobre a solução do problema inverso, ambos potenciais coincidem. Sendo assim, o referido funcional é minimizado utilizando o conceito de derivada topológica de primeira e segunda ordem. Cabe esclarecer que a derivada topológica de primeira ordem não fornece informação suficiente para resolução de problema inverso, apresentando seus valores críticos sobre a fronteira do domínio devido à elipticidade do problema. Por outro lado será mostrado que a derivada topológica de segunda ordem consiste de termos não locais que corrigem referidas discrepâncias, conduzindo a solução do problema inverso.

Keywords: Problemas Inversos, Tomografia por Impedância Elétrica, Análise de Sensibilidade Topológica

1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se neste trabalho o problema de EIT (*Electrical Impedance Tomography*), cujo objetivo é determinar a condutividade elétrica de um corpo a partir de medições eletromagnéticas em sua superfície. Esse problema tem diversas aplicações, dentre as quais podemos citar as aplicações em ciências médicas com na detecção de tumores Bertero and Boccacci (1998); O. Scherzer and Lenzen (2009) e monitoramento de apneias, em geofísica e ciências ambientais com a localização de depósitos de minerais e monitoramento de fluídos e na engenharia com a detecção de corrosões em estruturas.

O problema de reconstrução da condutividade elétrica é considerado um desafio não apenas por ser não-linear, mas também por ser mal posto, o que significa que pequenas mudanças na condutividade elétrica pode resultar em alterações grandes dos dados medidos.

Uma importante classe de métodos são os baseados em expansões assintóticas, onde supõe-se a condutividade constante por partes. Vários algoritmos vem sendo propostos para resolver situações particulares contendo informações adicionais sobre os dados ou a configuração subjacente. Por exemplo, em Ammari (2003); Bruhl (2003); Cheney (1999), o meio de base é assumido suave (com condutividade conhecida) e contém um certo número de pequenas inclusões com uma condutividade mais alta ou mais baixa. Em Hintermüller et al. (2012), considera-se uma expansão assintótica topológica de segunda ordem, de um funcional de forma que mede a diferença entre os valores dos campos medido e calculado numericamente, para iniciar um algoritmo com base no Método Level-Set. Contudo, o uso dessa classe de método requer introduzir um termo de regularização ao funcional objetivo.

Apresentamos um método direto baseado em expansão assintótica do mesmo funcional adotado em Hintermüller et al. (2012), onde os termos principais são conhecidos como derivadas topológicas de primeira e segunda ordem que são utilizadas para detectar a localização bem como o tamanho das inclusões, em um único passo. Como o método resultante não é iterativo, dispensa-se a introdução de termos de regularização ao funcional objetivo. Além disso, apresentamos uma maneira mais sucinta de se expandir o funcional custo e conseguimos uma representação mais simples desta expansão em relação à Hintermüller et al. (2012), o que permitiu propor um novo método de resolução do problema inverso da condutividade baseado na minimização da expansão assintótica resultante em relação aos parâmetros de interesse, a saber, tamanho e posição das inclusões.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Considere um domínio Ω que representa um dado corpo que possua a capacidade de conduzir eletricidade em seu interior e cujo coeficiente de condutividade elétrica seja $k^*(x) \geq k_0 > 0$ uma função escalar mensurável e limitada, desconhecida, com $x \in \Omega$. Seja o corpo Ω submetido a uma corrente elétrica conhecida Q sobre $\partial\Omega$, onde $\partial\Omega$ representa a fronteira Lipschitz contínua de Ω . Assume-se que a corrente elétrica Q produz um potencial elétrico u que é lido de alguma forma em parte da fronteira $\Gamma_m \subset \partial\Omega$. Tem-se então que a partir da leitura $u = U$ sobre Γ_m , objetiva-se encontrar a condutividade elétrica $k^*(x)$ do corpo Ω satisfazendo o seguinte problema de valor de contorno sobredeterminado

$$\begin{cases} \operatorname{div}[q(u)] = 0 & \text{em } \Omega, \\ q(u) = -k^* \nabla u, \\ q(u) \cdot n = Q & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u = U & \text{sobre } \Gamma_m. \end{cases} \quad (1)$$

2.1 Tomografia por impedância elétrica

Sobre as condições já enunciadas sobre Ω e Γ_m , considere o problema valor de contorno (1), onde a condutividade elétrica $k^*(x)$ é desconhecida. Assim, consideramos o seguinte problema **Problema 2.1.** *Dada uma excitação de Neumann $Q \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, encontrar $k^* \in C_\gamma(\Omega)$ a partir de observações do campo U sobre $\Gamma_m \subset \partial\Omega$, isto é, de forma que exista $u[k^*] \in H^1(\Omega)$ que satisfaça (1), onde*

$$C_\gamma := \left\{ \varphi \in L^\infty(\Omega) : \varphi = k \left(\mathbb{1}_\Omega - \sum_{i=1}^N (1 - \gamma_i) \mathbb{1}_{\omega_i} \right), \omega_i \subset \Omega \text{ e } \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \right\}. \quad (2)$$

Aqui, $\mathbb{1}_{\omega_i}$ denota a função característica do conjunto ω_i , $\gamma_i, k \in \mathbb{R}^+$ são conhecidos.

Assumimos que cada ω_i mensurável e simplesmente conexo. Além disso, uma vez conhecidos os valores de k e dos contrastes γ_i , esse problema se resume em um problema caracterização de um conjunto ótimo $\omega^* = \bigcup_I \omega_i$, $I = \{1, 2, \dots, N\}$, tal que

$$k^* = \begin{cases} k & \text{se } x \in \Omega \setminus \omega^* \\ \gamma_i k & \text{se } x \in \omega_i. \end{cases} \quad (3)$$

O objetivo deste trabalho é tratar a reconstrução de k^* via análise de sensibilidade topológica. Para isto, supõe-se que existam anomalias em Ω que torna a condutividade elétrica constante por partes.

2.2 O problema de otimização

Apresentamos como tratar o problema (2.1) via um problema de otimização de um funcional de forma.

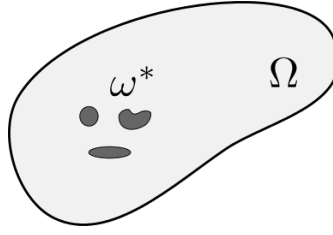


Figura 1: Corpo com anomalias

Assim, para cada excitação Q_i , $i \in \{1, \dots, M\}$, $0 < M \in \mathbb{N}$, seja u_i solução do seguinte problema de Neumann:

$$\begin{cases} \operatorname{div}[q(u_i)] = 0 & \text{em } \Omega \\ q(u_i) = -k \nabla u_i \\ q(u_i) \cdot n = Q_i & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} Q_i = 0 \\ \int_{\Gamma_m} u_i = \int_{\Gamma_m} U_i, \end{cases} \quad (4)$$

sendo k constante por partes.

Consideremos o seguinte funcional de forma

$$\psi(\chi) = \mathcal{J}_\chi(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_m} (u_i - U_i)^2, \quad (5)$$

onde u_i é solução de (4) dado Q_i , U_i é a medida do potencial elétrico sobre Γ_m correspondente a corrente elétrica Q_i e χ é a função característica de Ω .

Proposição 2.1. *Sejam k^* o coeficiente de condutividade que deseja-se reconstruir e u_i solução de (4), $i = 1, \dots, m$. Então, se $k = k^*$, tem-se que $u_i = U_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ sobre Γ_m . Portanto o funcional $\psi(\chi)$ atinge um mínimo.*

Tendo em vista a proposição 2.1, observamos que a solução do problema (4) irá coincidir com o dado U_i lido na fronteira de Ω quando $k = k^*$, o que implica que o funcional (5) atinge o mínimo. Assim, encontrar a função k^* que minimiza o funcional (5) é equivalente a encontrar o conjunto de inclusões desconhecidas no interior de Ω considerando k^* constante por partes. Uma forma de abordar essa classe de problemas inversos é utilizando o conceito de derivada topológica que será apresentado a seguir.

Sem perda de generalidade, consideraremos apenas uma medida U sobre $\Gamma_m \subset \partial\Omega$. A extensão para mais medidas é trivial.

3 CONCEITO DE DERIVADA TOPOLÓGICA

A Análise de Sensibilidade Topológica Novotny and Sokołowski (2013) fornece um desenvolvimento assintótico para um funcional de forma $\psi(\chi)$, cujo termo principal é a derivada topológica, que mede a sensibilidade do funcional com respeito a uma perturbação singular (furo, inclusão, termo-fonte).

Considere um domínio aberto e limitado Ω sujeito a uma perturbação confinada a região $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon\omega$. Sendo $\hat{x}$ um pontos arbitrário de Ω e ω domínio fixo.

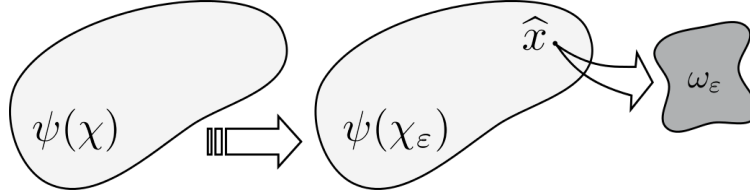


Figura 2: Representação do domínio perturbado.

Consideremos a função característica associada ao domínio topologicamente perturbado, $x \mapsto \chi_\varepsilon(\hat{x}; x)$.

Para o caso do problema inverso de EIT, consideramos inclusões de coeficiente de condutividade constante e têm-se que $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_\Omega + (1 - \gamma)\mathbb{1}_{\overline{\omega_\varepsilon}(\hat{x})}$, onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$ é o contraste da propriedade material do meio.

Assume-se então, que o funcional de forma associado ao domínio topologicamente perturbado, admite a seguinte expansão assintótica:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)D_T\psi(\hat{x}) + o(|f(\varepsilon)|), \quad (6)$$

onde

- $f(\varepsilon)$ é uma função positiva tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.
- A função $D_T\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a derivada topológica de primeira ordem do funcional $\psi(\chi)$;
- E o resíduo $o(|f(\varepsilon)|)$ é tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(|f(\varepsilon)|)}{f(\varepsilon)} = 0$.

Note que, como desejamos introduzir perturbações em Ω de forma a minimizar $\psi(\chi_\varepsilon)$, a derivada topológica de primeira ordem nos fornece uma direção de decaimento desse funcional.

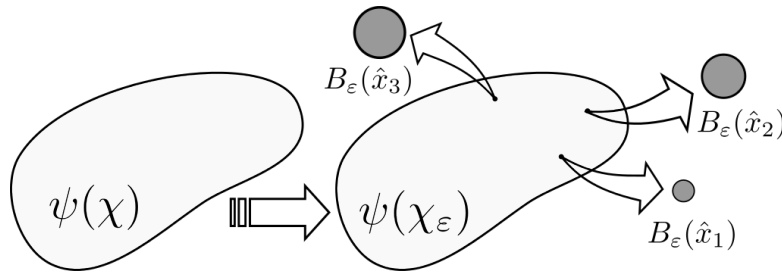
4 EXPANSÃO ASSINTÓTICA DO FUNCIONAL DE FORMA

Apresentaremos agora o desenvolvimento do problema de minimização do funcional (5) via análise de sensibilidade topológica.

4.1 Expansão Assintótica Topológica de segunda ordem

Podemos generalizar o conceito de derivada topológica para várias perturbações no domínio. Além de fazermos isso, vamos considerar um termo a mais na expansão do funcional. Esse termo é a derivada topológica de segunda ordem e, conforme veremos, além de um termo correção da expansão, quando consideramos várias inclusões é este termo que captura a interação entre as mesmas.

Considere um domínio Ω perturbado através da nucleação simultânea de N inclusões $B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i)$, $i = 1, \dots, N$, onde $B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \subset \Omega$ é uma bola de centro em $\hat{x}_i$ e raio ε_i que está associada a uma condutividade k_i , com $B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \cap B_{\varepsilon_j}(\hat{x}_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.



Então, denotando por $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N)$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, admitimos que

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon) \cdot D_T \psi(\hat{x}) + \frac{1}{2} D_T^2 \psi(\hat{x}) f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon) + o(|f(\varepsilon)|^2), \quad (7)$$

Consideremos ainda o funcional de forma associado ao domínio topologicamente perturbado

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_{\Gamma_m} (u_\varepsilon - U)^2. \quad (8)$$

Sendo u_ε é solução de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}[q_\varepsilon(u_\varepsilon)] = 0 & \text{em } \Omega \\ q_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla u_\varepsilon & \\ q_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot n = Q & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} Q = 0 & \\ \int_{\Gamma_m} u_\varepsilon = \int_{\Gamma_m} U & \\ \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 & \text{sobre } \bigcup_{i=1}^N \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \\ \llbracket q_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0 & \text{sobre } \bigcup_{i=1}^N \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \end{array} \right. \quad (9)$$

onde

$$\gamma_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \\ \gamma_i, & \text{se } x \in B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i), \end{cases} \quad (10)$$

e γ_i é o contraste da propriedade material do meio em cada inclusão $B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i)$.

Afim de identificar $f(\varepsilon)$ e calcular $D_T\psi(\hat{x})$ em (6), é necessário conhecer o comportamento de u_ε com respeito ao parâmetro ε .

Para expandirmos u_ε , admitimos

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \sum_{i=1}^N \left[w_i(x/\varepsilon_i) + \varepsilon_i^2 \tilde{u}_i(x) + \tilde{w}_i(x/\varepsilon_i) + \varepsilon_i^4 \tilde{\tilde{u}}_i(x) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N (\tilde{\tilde{w}}_i^j(x/\varepsilon_i) + \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 u_i^j(x)) \right] + \tilde{\tilde{u}}_\varepsilon(x). \quad (11)$$

Sendo k constante em Ω , temos que a solução u do problema (4) é harmônica em Ω , de classe C^∞ no interior de Ω . Portanto, podemos tomar a seguinte expansão em Taylor: se $x \in B_l$, então

$$u(x) = u(\hat{x}_l) + \nabla u(\hat{x}_l) \cdot (x - \hat{x}_l) + \frac{1}{2} \nabla^2 u(\hat{x}_l) (x - \hat{x}_l)^2 + \frac{1}{3!} \nabla^3 u(\hat{x}_l) (x - \hat{x}_l)^3 + \frac{1}{4!} \nabla^4 u(\xi_l) (x - \hat{x}_l)^4, \quad (12)$$

onde $\xi_l = \xi_l(x)$ é um ponto intermediário entre x e $\hat{x}_l$.

Sobre ∂B_l , temos que $\llbracket q_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0$. Logo

$$\begin{aligned} 0 = & -k(1 - \gamma_l) \nabla u(\hat{x}_l) \cdot n + \varepsilon_l k(1 - \gamma_l) \nabla^2 u(\hat{x}_l) n \cdot n - \frac{1}{2} \varepsilon_l^2 k(1 - \gamma_l) \nabla^3 u(\hat{x}_l) n^3 + \frac{1}{3!} \varepsilon_l^3 \nabla^4 u(\xi_l) n^4 \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\llbracket q_\varepsilon(w_i) \rrbracket \cdot n + \varepsilon_i^2 k(1 - \gamma_l) \partial_n \tilde{u}_i + \llbracket q_\varepsilon(\tilde{w}_i) \rrbracket \cdot n + \varepsilon_i^4 k(1 - \gamma_l) \partial_n \tilde{\tilde{u}}_i \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \llbracket q_\varepsilon(\tilde{\tilde{w}}_i^j) \rrbracket + \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 k(1 - \gamma_l) \partial_n u_i^j(x) \right] + \llbracket q_\varepsilon(\tilde{\tilde{u}}_\varepsilon) \rrbracket \cdot n. \end{aligned} \quad (13)$$

Assim, para $i = l$, escolhemos $w_i(x/\varepsilon_i)$ solução de

$$\begin{cases} \operatorname{div}[q_\varepsilon(w_i)] = 0 & \text{no } \mathbb{R}^2 \\ q_\varepsilon(w_i) = -\gamma_\varepsilon k \nabla w_i & \text{no } \mathbb{R}^2 \\ w_i \rightarrow 0 & \text{no } \infty \\ \llbracket w_i \rrbracket = 0 & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \\ \llbracket q_\varepsilon(w_i) \rrbracket \cdot n = k(1 - \gamma_i) (\nabla u(\hat{x}_i) \cdot n - \varepsilon_i \nabla^2 u(\hat{x}_i) n \cdot n) & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \end{cases} \quad (14)$$

Logo, em $\mathbb{R}^2 \setminus B_i$, $w_i(x/\varepsilon_i) = (\varepsilon_i^2 g_i + \varepsilon_i^4 h_i) \rho_i$, onde

$$g_i = \frac{1}{\|x - \hat{x}_i\|^2} \nabla u(\hat{x}_i) \cdot (x - \hat{x}_i) \text{ e } h_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\|x - \hat{x}_i\|^4} \nabla^2 u(\hat{x}_i) (x - \hat{x}_i)^2, \quad (15)$$

e $\rho_i = \frac{1-\gamma_i}{1+\gamma_i}$.

Note que

$$\nabla w_i = \rho_i \frac{\varepsilon_i^2}{\|x - \hat{x}_i\|^2} \left(I - 2 \frac{(x - \hat{x}_i) \otimes (x - \hat{x}_i)}{\|x - \hat{x}_i\|^2} \right) \nabla u(\hat{x}_i) + \mathcal{R}_1(\varepsilon), \quad (16)$$

onde $\mathcal{R}_1(\varepsilon) = \varepsilon_i^4 \nabla h_i$.

Note que, sobre ∂B_j , $x = \hat{x}_j + \varepsilon_j n_j$. Assim, Por Taylor temos que

$$\nabla w_i = \varepsilon_i^2 A \nabla u(\hat{x}_i) + \mathcal{R}_2(\varepsilon), \quad (17)$$

sendo a matriz A dada por

$$A = \rho_i \frac{1}{\|\hat{x}_i - \hat{x}_j\|^2} \left[I - 2 \frac{(\hat{x}_i - \hat{x}_j) \otimes (\hat{x}_i - \hat{x}_j)}{\|\hat{x}_i - \hat{x}_j\|^2} \right]. \quad (18)$$

e

$$\mathcal{R}_2(\varepsilon) = \rho_i \frac{\varepsilon_i^2}{\|x - \hat{x}_i\|^2} \left(I - 2 \frac{(x - \hat{x}_i) \otimes (x - \hat{x}_i)}{\|x - \hat{x}_i\|^2} \right) \nabla u(\hat{x}_i) - \varepsilon_i^2 A \nabla u(\hat{x}_i) + \mathcal{R}_1(\varepsilon). \quad (19)$$

Logo, escolhemos $\tilde{w}_i^j$, $j \neq i$, tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}[q_\varepsilon(\tilde{w}_i^j)] = 0 & \text{no } \mathbb{R}^2 \\ q_\varepsilon(\tilde{w}_i^j) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \tilde{w}_i^j & \text{no } \mathbb{R}^2 \\ \tilde{w}_i^j \rightarrow 0 & \text{no } \infty \\ \llbracket \tilde{w}_i^j \rrbracket = 0 & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_j}(\hat{x}_j) \\ \llbracket q_\varepsilon(\tilde{w}_i^j) \rrbracket \cdot n_j = k(1 - \gamma_j) \varepsilon_i^2 A \nabla u(\hat{x}_i) \cdot n_j & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_j}(\hat{x}_j). \end{array} \right. \quad (20)$$

Assim, $\tilde{w}_i^j(x/\varepsilon_j) = \rho_j \frac{\varepsilon_j^2 \varepsilon_i^2}{\|x - \hat{x}_j\|^2} A \nabla u(\hat{x}_i) \cdot (x - \hat{x}_j)$ se $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon_j}(\hat{x}_j)$.

Sobre $\partial \Omega$ temos $w_i|_{\partial \Omega} = (\varepsilon_i^2 g_i + \varepsilon_i^4 h_i) \rho_i$.

Portanto construímos $\tilde{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}[q(\tilde{u}_i)] = 0, & \text{em } \Omega, \\ q(\tilde{u}_i) = -k \nabla \tilde{u}_i, & \text{em } \Omega, \\ q(\tilde{u}_i) \cdot n = -\rho_i q(g_i) \cdot n, & \text{sobre } \partial \Omega \\ \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_i = -\rho_i \int_{\Gamma_m} g_i. \end{array} \right. \quad (21)$$

Sendo k constante em Ω , temos que a solução $\tilde{u}_i$ do problema (21) é harmônica em Ω , de classe C^∞ no interior de Ω . Portanto, se $x \in B_i$, $\tilde{u}_i(x) = \tilde{u}_i(\hat{x}_i) + \nabla \tilde{u}_i(\hat{x}_i) \cdot (x - \hat{x}_i) + \frac{1}{2} \nabla^2 \tilde{u}_i(\tilde{\xi}_i) \cdot (x - \hat{x}_i)^2$, onde $\tilde{\xi}_i = \tilde{\xi}_i(x)$ é um ponto intermediário entre x e $\hat{x}_i$.

Portanto, escolhemos $\tilde{w}_i$ de forma a compensar os termos da ordem de ε_i^2 , isto é, fazendo $i = l$ em (13)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}[q_\varepsilon(\tilde{w}_i)] &= 0, & \text{no } \mathbb{R}^2, \\ q_\varepsilon(\tilde{w}_i) &= -\gamma_\varepsilon k \nabla \tilde{w}_i & \text{no } \mathbb{R}^2, \\ \tilde{w}_i &\rightarrow 0, & \text{no } \infty, \\ \llbracket \tilde{w}_i \rrbracket &= 0, & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i) \\ \llbracket q_\varepsilon(\tilde{w}_i) \rrbracket \cdot n &= \varepsilon_i^2 k (1 - \gamma_i) (\nabla \tilde{u}_i(\hat{x}_i) \cdot n + \frac{1}{2} \nabla^3 u(\hat{x}_i) n^3) & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i). \end{array} \right. \quad (22)$$

Assim, sobre $\partial\Omega$, $\tilde{w}_i|_{\partial\Omega} = (\varepsilon_i^4 \tilde{g}_i + \varepsilon_i^6 \tilde{h}_i) \rho_i$,

onde $\tilde{g}_i = \frac{1}{\|x - \hat{x}_i\|^2} \nabla \tilde{u}_i(\hat{x}_i) \cdot (x - \hat{x}_i)$ e $\tilde{h}_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\|x - \hat{x}_i\|^6} \nabla^3 u(\hat{x}_i) (x - \hat{x}_i)^3$.

Agora, escolhemos $\tilde{\tilde{u}}_i$ afim de compensar as discrepâncias da ordem de ε_i^4 geradas por w_i e $\tilde{w}_i$ sobre a fronteira exterior $\partial\Omega$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}[q(\tilde{\tilde{u}}_i)] &= 0 & \text{em } \Omega, \\ q(\tilde{\tilde{u}}_i) &= -k \nabla \tilde{\tilde{u}}_i & \text{em } \Omega, \\ q(\tilde{\tilde{u}}_i) \cdot n &= -\rho_i q(h_i + \tilde{g}_i) \cdot n, & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Gamma_m} \tilde{\tilde{u}}_i &= -\rho_i \int_{\Gamma_m} h_i + \tilde{g}_i. \end{array} \right. \quad (23)$$

As camadas limites $\tilde{\tilde{w}}_i^j$ também produzem discrepâncias sobre $\partial\Omega$, que são compensadas por u_i^j . Ou seja, denotando

$$\theta_i^j = \frac{1}{\|x - \hat{x}_j\|^2} A \nabla u(\hat{x}_i) \cdot (x - \hat{x}_j), \quad (24)$$

construímos u_i^j tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}[q(u_i^j)] &= 0 & \text{em } \Omega, \\ q(u_i^j) &= -k \nabla u_i^j & \text{em } \Omega, \\ q(u_i^j) \cdot n &= -\rho_j q(\theta_i^j) \cdot n, & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Gamma_m} u_i^j &= -\rho_j \int_{\Gamma_m} \theta_i^j. \end{array} \right. \quad (25)$$

Note que sobre $\partial\Omega$ temos

$$u_\varepsilon = u + \sum_{i=1}^N \left[\varepsilon_i^2 \rho_i g_i + \varepsilon_i^4 \rho_i h_i + \varepsilon_i^2 \tilde{u}_i + \varepsilon_i^4 \rho_i \tilde{g}_i + \varepsilon_i^6 \rho_i \tilde{h}_i + \varepsilon_i^4 \tilde{\tilde{u}}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 \rho_j \theta_i^j + \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 u_i^j) \right] + \tilde{\tilde{u}}_\varepsilon. \quad (26)$$

Logo, construímos $\tilde{u}_\varepsilon$ de forma a compensar os termos de mais alta ordem e de tal que a condição de compatibilidade seja satisfeita, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}[q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)] = 0 & \text{em } \Omega, \\ q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = -\gamma_\varepsilon k \nabla \tilde{u}_\varepsilon & \text{em } \Omega, \\ q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot n = -\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 q_\varepsilon(\tilde{h}_i) \cdot n & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_\varepsilon = -\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \int_{\Gamma_m} \tilde{h}_i & \\ \llbracket \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket = 0 & \text{sobre } \bigcup_{i=1}^N \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i), \\ \llbracket q_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^3 g_i^a + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\varepsilon_i^2 g_i^b + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_j^2 g_{ij}) + \sum_{p=1}^2 \mathcal{R}_p(\varepsilon) & \text{sobre } \bigcup_{i=1}^N \partial B_{\varepsilon_i}(\hat{x}_i), \end{array} \right. \quad (27)$$

onde, $g_i^a = k(1-\gamma_i) \frac{1}{3!} \nabla^4 u(\xi_i) n^4$, $g_i^b = k(1-\gamma_i) \partial_n \tilde{u}_i \mathbf{e}$ e $g_{ij} = k(1-\gamma_j) \frac{1}{\|x-\hat{x}_j\|^2} A \nabla u(\hat{x}_i) \cdot (x-\hat{x}_j)$.

Tendo em vista a expansão assintótica considerada anteriormente, apresentamos a expansão para o funcional associado ao domínio perturbado.

Escrevendo $u_\varepsilon = u + \varphi_\varepsilon$, com

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \left[w_i + \varepsilon_i^2 \tilde{u}_i + \tilde{w}_i + \varepsilon_i^4 \tilde{u}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\tilde{w}_i^j + \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 u_i^j) \right] + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (28)$$

tem-se

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \int_{\Gamma_m} (u + \varphi_\varepsilon - U)^2 = \psi(\chi) + 2 \int_{\Gamma_m} (u - U) \varphi_\varepsilon + \int_{\Gamma_m} \varphi_\varepsilon^2. \quad (29)$$

Conhecendo as soluções explícitas para w_i e $\tilde{w}_i$ podemos escrever

$$\varphi_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^N \left[\varepsilon_i^2 \rho_i (g_i + \tilde{u}_i) + \varepsilon_i^4 \rho_i (h_i + \tilde{g}_i + \tilde{u}_i) + \varepsilon_i^6 \rho_i \tilde{h}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) \right] + \tilde{u}_\varepsilon. \quad (30)$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_m} (u - U) \varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \left[\varepsilon_i^2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) + \varepsilon_i^4 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) \right] + \sum_{m=1}^2 \mathcal{E}_m(\varepsilon_i), \end{aligned} \quad (31)$$

sendo

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \int_{\Gamma_m} (u - U) \tilde{h}_i \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_2(\varepsilon) = \int_{\Gamma_m} (u - U) \tilde{u}_\varepsilon. \quad (32)$$

Para o último termo em (31)

$$\int_{\Gamma_m} \varphi_\varepsilon^2 = \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \right)^2 + \sum_{m=3}^{15} \mathcal{E}_m(\varepsilon), \quad (33)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^4 (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \\ \mathcal{E}_4(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^4 (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \right)^2 \\ \mathcal{E}_5(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \right) \\ \mathcal{E}_6(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^4 (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \right) \\ \mathcal{E}_7(\varepsilon) &= \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) \right)^2 \\ \mathcal{E}_8(\varepsilon) &= \int_{\Gamma_m} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \tilde{h}_i \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \\ \mathcal{E}_9(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \rho_i \tilde{h}_i \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^4 (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \\ \mathcal{E}_{10}(\varepsilon) &= \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \rho_i \tilde{h}_i \right)^2 \\ \mathcal{E}_{11}(\varepsilon) &= \int_{\Gamma_m} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \rho_i \tilde{h}_i \tilde{u}_\varepsilon \\ \mathcal{E}_{12}(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_\varepsilon \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \\ \mathcal{E}_{13}(\varepsilon) &= 2 \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_\varepsilon \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^4 (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \\ \mathcal{E}_{14}(\varepsilon) &= \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_\varepsilon \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^6 \rho_i \tilde{h}_i \\ \mathcal{E}_{15}(\varepsilon) &= \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Logo, substituindo (31) e (33) em (29), obtém-se

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon) &= \psi(\chi) + 2 \sum_{i=1}^N \left[\varepsilon_i^2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) + \varepsilon_i^4 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{u}_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) \right] + \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \right)^2 + \mathcal{E}(\bar{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (35)$$

Note que os problemas associados a $\tilde{u}_i$, $\tilde{\tilde{u}}_i$ e a u_i^j que aparecem nas três primeiras integrais em (35) deveriam ser resolvidos para cada ponto $\hat{x}_i$. Para evitar este trabalho podemos substituir esses termos por estados adjuntos que não dependem do ponto. No entanto, como a quarta integral envolve um termo quadrático em $\tilde{u}_i$, não podemos substituí-lo por um estado adjunto. Portanto, consideraremos apenas o estado adjunto associado a $\tilde{\tilde{u}}_i$ e a u_i^j .

Temos que $\tilde{\tilde{u}}_i$ satisfaz

$$\tilde{\tilde{u}}_i \in \tilde{\tilde{U}}_i : \int_{\Omega} q(\tilde{\tilde{u}}_i) \cdot \nabla \eta + \int_{\Gamma_m} \rho_i q(h_i + \tilde{g}_i) \cdot n \eta = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{\tilde{V}}, \quad (36)$$

com

$$\tilde{\tilde{U}}_i = \left\{ \varphi_i \in H^1(\Omega); \int_{\Gamma_m} \varphi_i = -\rho_i \int_{\Gamma_m} h_i + \tilde{g}_i \right\} \text{ e } \tilde{\tilde{V}} = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \int_{\partial\Omega} \varphi = 0 \right\}.$$

Assim, considere $v \in \tilde{\tilde{V}}$ tal que

$$\int_{\Omega} q(v) \cdot \nabla \eta = 2 \int_{\Gamma_m} (u - U) \eta. \quad (37)$$

Então, escolhendo $\eta = v$ em (36) e $\eta = \tilde{\tilde{u}}_i + \varphi_i$ em (37) com $\varphi_i|_{\partial\Omega} = (h_i + \tilde{g}_i)\rho_i$ temos

$$\int_{\Omega} q(\tilde{\tilde{u}}_i) \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_m} \rho_i q(h_i + \tilde{g}_i) \cdot n v = 0 \text{ e } \int_{\Omega} q(v) \cdot \nabla (\tilde{\tilde{u}}_i + \varphi_i) = 2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\tilde{\tilde{u}}_i + \varphi_i). \quad (38)$$

Utilizando integração por partes em (38), podemos verificar que

$$2 \int_{\Gamma_m} (u - U) \tilde{\tilde{u}}_i = \int_{\Omega} q(v) \cdot \nabla \tilde{\tilde{u}}_i \stackrel{(38)}{=} - \int_{\Gamma_m} \rho_i q(h_i + \tilde{g}_i) \cdot n v.$$

Logo a segunda integral em (35) se escreve como

$$2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_i (h_i + \tilde{g}_i) + \tilde{\tilde{u}}_i) = 2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (h_i + \tilde{g}_i) \rho_i - \int_{\Gamma_m} \rho_i q(h_i + \tilde{g}_i) \cdot n v. \quad (39)$$

De maneira análoga, podemos escrever a terceira integral em (35) como

$$2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_j \theta_i^j + u_i^j) = 2 \int_{\Gamma_m} (u - U) \rho_j \theta_i^j - \int_{\Gamma_m} \rho_j q(\theta_i^j) \cdot n v. \quad (40)$$

Portanto, substituindo (39) e (40) em (35), tem-se

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon) = \psi(\chi) &+ \sum_{i=1}^N \left[2\varepsilon_i^2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) + \varepsilon_i^4 \left(2 \int_{\Gamma_m} (u - U) (h_i + \tilde{g}_i) \rho_i - \int_{\Gamma_m} q(h_i + \tilde{g}_i) \rho_i \cdot n v \right) \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 \left(2 \int_{\Gamma_m} (u - U) \rho_j \theta_i^j - \int_{\Gamma_m} \rho_j q(\theta_i^j) \cdot n v \right) \right] + \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 (\rho_i g_i + \tilde{u}_i) \right)^2 + \mathcal{E}(\bar{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (41)$$

5 MÉTODO PROPOSTO

Apresentamos agora o método direto proposto para a solução do problema. Considerando a expansão truncada desconsiderando o termo $\mathcal{E}(\varepsilon)$ e o valor constante $\psi(\chi)$ obtemos a forma quadrática em $\alpha := (\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_N^2)$

$$\Psi(\hat{x}, \alpha) = D_T \psi(\hat{x}) \cdot \alpha + \frac{1}{2} D_T^2 \psi(\hat{x}) \alpha \cdot \alpha \quad (42)$$

que possui um mínimo global absoluto.

Como o objetivo é encontrar o par de vetores $(\hat{x}^*, \varepsilon^*)$ que minimizam (42), sendo $\hat{x}^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ e $\alpha^* = (\varepsilon_1^{2*}, \dots, \varepsilon_N^{2*})$, primeiramente fixamos a variável $\hat{x}$ e otimizamos com respeito a α , encontrando assim $\alpha^* = \alpha^*(\hat{x})$.

Portanto, derivando (42) na direção de α e igualando a zero, obtemos

$$D_T^2 \psi(\hat{x}) \alpha = -D_T \psi(\hat{x}). \quad (43)$$

Logo, o valor ótimo para α^* é dado por

$$\alpha^* = - (D_T^2 \psi(\hat{x}))^{-1} D_T \psi(\hat{x}).$$

Substituindo, α^* em (42) obtêm-se

$$\Psi(\hat{x}, \alpha^*) = D_T \psi(\hat{x}) \cdot \alpha^*. \quad (44)$$

Assim, o par de vetores $(\hat{x}^*, \alpha^*)$ que minimizam (42) é dado por

$$\hat{x}^* = \mathbf{Arg} \min_{\hat{x} \in \Omega} \{D_T \psi(\hat{x}) \cdot \alpha^*\} \text{ e } \alpha^* = - (D_T^2 \psi(\hat{x}^*))^{-1} D_T \psi(\hat{x}^*).$$

Algoritmo Proposto

Na seção anterior, apresentou-se o método proposto para se determinar a solução numérica do problema inverso de condutividade. O Algoritmo 1 descreve a busca exaustiva feita em um *subgrid* considerado no método. Os dados de entrada do algoritmo são:

- Um número N de anomalias que se deseja encontrar;
- O vetor $D_T \psi$ e a matriz $D_T^2 \psi$;
- O tamanho do grid em que o sistema é resolvido, dado por n_g ;
- Uma indexação i_g do grid, com entradas dadas pelo valor i_g .

Como resultado, o algoritmo fornece a localização e tamanho ótimos das anomalias, $(\hat{x}, \alpha^*)$, e o valor mínimo do funcional dado por (44), representado por S^* .

Algoritmo 1: Pseudocódigo

```

1. Entradas:  $N, n_g, i_g,$ 
2.  $\alpha \leftarrow 0, \hat{x} \leftarrow 0$  e  $S^* \leftarrow \infty$ 
3. para  $i_1 \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4.     para  $i_2 \leftarrow 1$  até  $n_g$  faça
5.          $\vdots$ 
6.     para  $i_m \leftarrow 1$  até  $n_g$  faça
7.          $D_T \psi \leftarrow [-a_1(i_1), -a_2(i_2), \dots, -a_m(i_N)]^T;$ 
8.          $D_T^2 \psi \leftarrow \begin{bmatrix} 2h_{11}(i_1) & h_{12}(i_1, i_2) & \cdots & h_{1N}(i_1, i_N) \\ h_{21}(i_2, i_1) & 2h_{22}(i_2) & \cdots & h_{2N}(i_2, i_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1}(i_N, i_1) & h_{N2}(i_N, i_2) & \cdots & 2h_{NN}(i_N) \end{bmatrix};$ 
9.          $\alpha \leftarrow D_T^2 \psi^{-1} * D_T \psi;$ 
10.        se  $\varepsilon_k > 0 \forall k = 1, \dots, N$  faça
11.             $S \leftarrow D_T \psi \cdot \alpha$ 
12.            se  $S < S^*$  faça
13.                 $S^* \leftarrow S;$ 
14.                 $\alpha^* \leftarrow \alpha;$ 
15.                 $x^* \leftarrow [i_1, \dots, i_N];$ 
16.            fim se
17.        fim se
18.    fim para;
19.     $\vdots$ 
20. fim para;
21. fim para;
22. retorna  $S^*, x^*$  e  $\alpha^*$ .
```

Tabela 1: Representação do algoritmo de otimização.

6 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nos primeiros experimentos apresentados a seguir, o coeficiente de condutividade térmica na matriz vale $k_m = 1.0$ e o da inclusão vale $k_i = 2.0$. Subdividimos a fronteira de Ω conforme a figura (3). Nesta figura, a região mais escura sobre $\partial\Omega$, simula 16 eletrodos distribuídos uniformemente ao redor do corpo Ω . Estes eletrodos são escolhidos aos pares para injeção e drenagem de corrente elétrica Q_i , deixando para cada escolha, os demais com uma condição de Neumann homogênea. Podemos, dessa forma, ter o caso de leitura completa do dado U , isto é, quando $\Gamma_m = \partial\Omega$, e o caso de leitura parcial de U , quando a leitura é feita apenas na região onde estão os eletrodos.

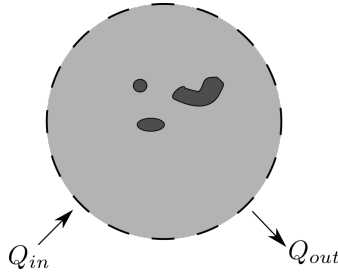


Figura 3: Simulação do problema real

Observamos que a derivada topológica de primeira ordem não é suficiente para detectarmos a anomalia, uma vez que ela atinge os valores mais críticos na fronteira (Figura 4), devido a elipticidade do problema.

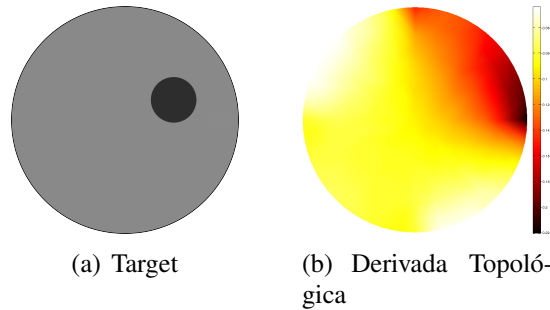


Figura 4: Derivada topológica de primeira ordem para apenas uma inclusão.

Para contornar esse problema, em geral o que se faz é regularizar o funcional custo e utilizar métodos iterativos, ver por exemplo os trabalhos de A. De Cezaro and Tai (2013); Hintermüller et al. (2012); Ammari (2003); Bruhl (2003); Cheney (1999).

Quando, ao invés de tratar o problema desta maneira usual, olhamos para o próximo termo da expansão percebemos que a derivada topológica de segunda ordem corrige a discrepância sobre a fronteira introduzida pela derivada primeira. Além disso, é na derivada segunda que percebemos as interações entre as anomalias.

Aplicamos agora o algoritmo descrito na seção 5 para vários exemplos afim de demonstrar a eficiência do método proposto. A possível solução ótima $\hat{x} = (x_1, \dots, x_N)$ é tal que cada $x_i, i = 1, \dots, N$, pertence à um *subgrid* do *grid* de cálculo.

Inicialmente, destacamos que é necessário considerar um *grid* razoável de busca da solução. Considere três *subgrids* de tamanhos diferentes, conforme a figura 5. Em 5(a) e 5(b) o centro real da anomalia não pertence ao conjunto de nós do *subgrid* e neste caso o método fornece como solução um dos pontos mais próximos da solução real. Quando o centro do *target* pertence ao conjunto de nós do *subgrid* de busca 5(c), a solução $\hat{x}$ coincide com o centro do *target*.

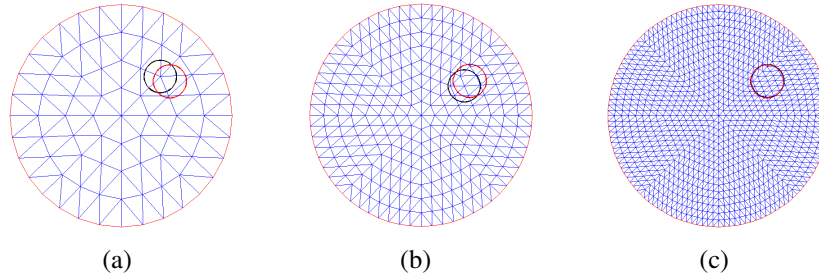


Figura 5: Malhas de busca da solução: O círculo em vermelho representa o *target* e em preto a solução encontrada. Em (c) o centro do *target* pertence ao conjunto de nós do *subgrid* de busca, e o centro da solução coincide com o centro do *target*.

Assim, a partir de agora, fixaremos um *subgrid* que nos fornece uma boa relação entre solução e custo computacional, já que o algoritmo de busca depende do tamanho deste *subgrid*.

6.1 Leitura completa

Neste caso, a leitura do dado U é feito sobre toda a fronteira $\partial\Omega$, ou seja, $\Gamma_m = \partial\Omega$.

Procurando por um número desconhecido de anomalias

Supomos que o número real de anomalias é desconhecido e faz-se sucessivos experimentos afim de encontrar o número correto de inclusões. Consideramos nestes experimentos uma única leitura do dado U .

Nestes casos, quando o número de inclusões buscadas é menor que o número real de anomalias, o resultado fornecido possui o mesmo volume e centro de massa que o *target*. Quando este número é igual ao número de inclusões reais, os centros da solução encontrada coincide com os centros do *target*. Além disso, o valor dos raios ótimos encontrado é extremamente próximo dos valores reais. Caso o número de anomalias buscadas seja maior que o número de anomalias do *target*, soluções extras de tamanho desprezíveis são fornecidas (figura 6(e)).

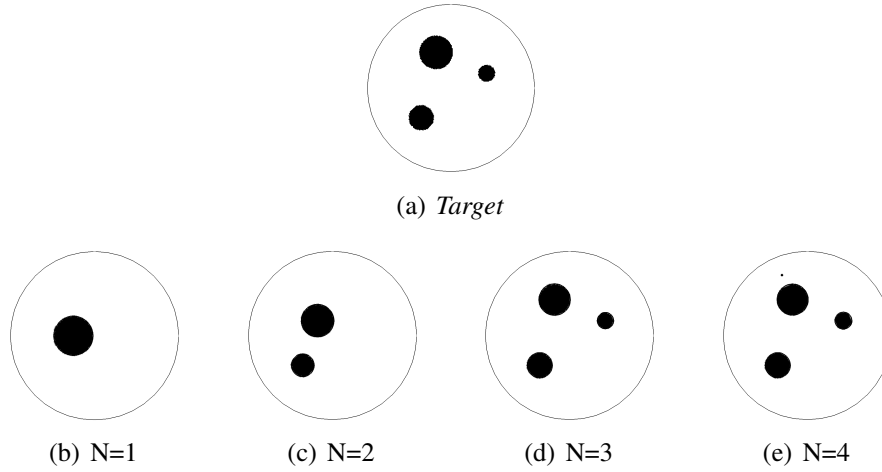


Figura 6: Considerando três anomalias: *target* (a) e reconstrução com $N = 1$ (b), $N = 2$ (c), $N = 3$ (d) e com $N = 4$ (e).

Reconstrução da forma

Notamos que o método fornece boa aproximação para a forma da anomalia, desde que se considere um número razoável de inclusões buscadas e medidas tomadas.

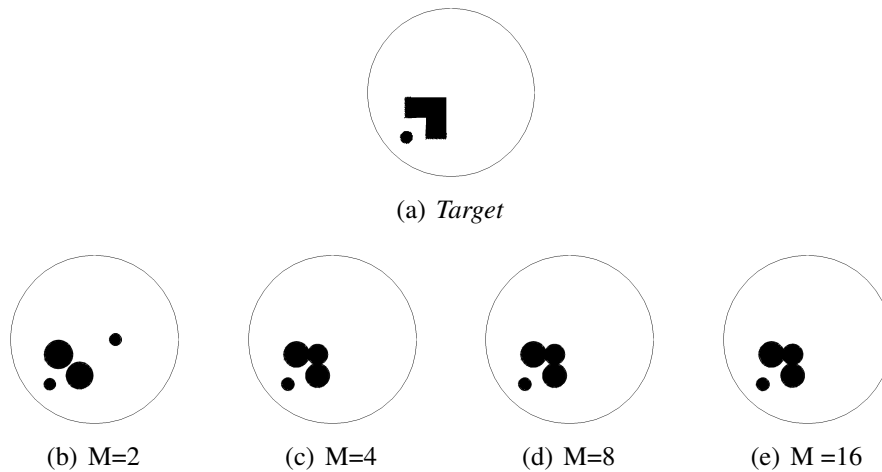


Figura 7: Considerando $N=4$: *target* (a) e reconstrução utilizando 2 (c), 8 (d) e 16 medidas (e) .

Tratamento com Ruído

Neste caso, o *background* é degradado, produzindo assim um dado U_{noise} corrompido sobre Γ_m . Impondo 10% de ruído, modificamos o número de medidas necessárias para alcançar uma boa aproximação do *target*.

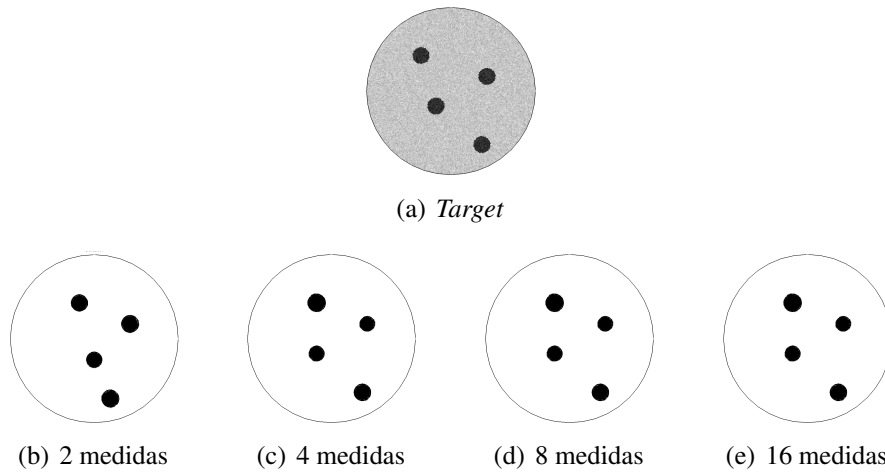


Figura 8: Impondo 10% de ruído no *background* (a) e reconstrução utilizando duas medidas (b), quatro medidas (c), oito medidas (d) e dezesseis medidas (e) .

Fixando um número considerável de medidas do dado U , aumentamos o nível de ruído afim de testarmos a robustez do método com tal perturbação na condutividade.

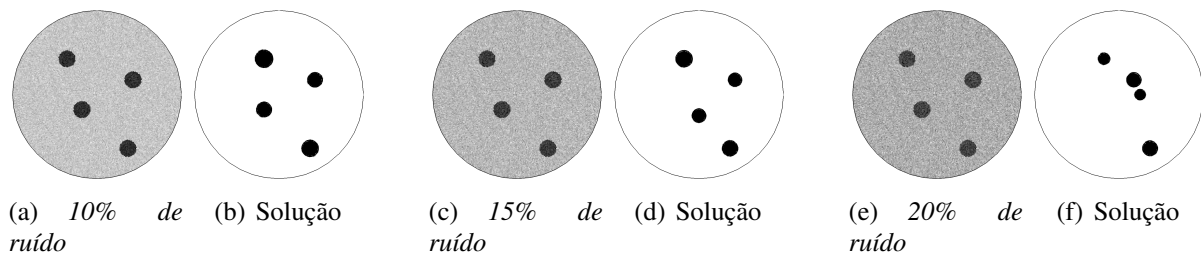


Figura 9: Soluções com diferentes níveis de ruído obtidos com 64 medidas.

6.2 Leitura Parcial

Nos próximos casos, consideramos $\Gamma_m \subsetneq \partial \Omega$, sendo $\|\Gamma_m\|/\|\partial \Omega\| \approx 0,5$. Ou seja, a leitura do dado U é feita apenas nas regiões onde simulamos os eletrodos, conforme figure 3. Apresentamos a seguir resultados que testam a robustez do método com respeito a ruído no caso de leitura parcial.

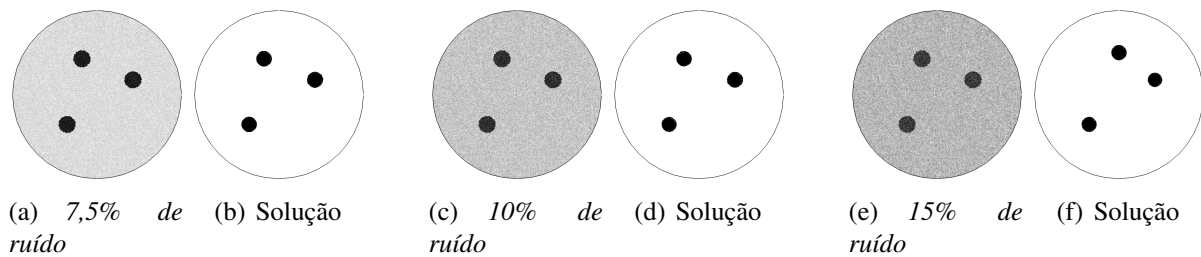


Figura 10: Soluções com diferentes níveis de ruído obtidos com 64 medidas.

Observamos que, considerando um número razoável de medidas, o método é bastante robusto com respeito a ruído mesmo quando temos uma leitura parcial do dado U .

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se a determinação das derivadas topológicas de primeira e segunda ordem para um funcional de forma que mede a diferença entre os potenciais medidos e calculados numericamente de uma equação diferencial parcial. Esta EDP representa o comportamento de um campo elétrico em um domínio Ω quando este é submetido a um conjunto de fluxo elétrico. A escolha do funcional de forma adotado deve-se ao fato de que dispomos de informações restritas a fronteira do domínio. Viu-se que a minimização deste funcional conduz a solução do problema inverso de tomografia por impedância elétrica.

Uma forma de tratar esse problema de minimização é utilizar o conceito de derivada topológica, o qual foi apresentado na seção 3. A derivada topológica de primeira ordem é utilizada como direção de descida na minimização do funcional de forma. Porém, esta derivada não é suficiente para reconstruir a solução do problema inverso, uma vez que seus valores mais negativos são atingidos na fronteira do domínio.

Visto isso, introduziu-se mais um termo na expansão do funcional de forma associado ao domínio não perturbado, a saber a derivada topológica de segunda ordem que corrige as discrepâncias na fronteira do domínio apresentadas pela derivada topológica de primeira ordem.

Alguns pontos que devemos destacar, no que diz respeito a contribuição deste trabalho, é que obtém-se uma representação mais simples da expansão do funcional (8), bem como obtenção mais direta em relação aquelas encontradas na literatura (ver, por exemplo, Hintermüller et al. (2012)). O método resultante não iterativo, conduz a uma boa aproximação da solução em um único passo e não necessita-se de nenhuma regularização. Nesse método, após truncamento da expansão, o problema resultante é dado por dois problemas triviais de otimização, onde o primeiro fornece o tamanho ótimo das inclusões, enquanto que o segundo fornece as suas localizações ótimas.

Referências Bibliográficas

- A. De Cezaro, A. L., Tai, X.-C., 2013. On piecewise constant level-set (pcls) methods for the identification of discontinuous parameters in ill-posed problems. *Inverse Problems* 29, 23pp.
- Ammari, H., M. S. V. M., 2003. Boundary integral formulae for the reconstruction of electric and electromagnetic inhomogeneities of small volume. *ESAIM Control Optim. Calc.* 9, 49 – 66.
- Bertero, M., Boccacci, P., 1998. Introduction to inverse problems in imaging. Institute of Physics Publishing, Bristol.
- Bruhl, M., H. M. V. M., 2003. A direct impedance tomography algorithm for locating small inhomogeneities. *Numer. Math.* 93(4), 635–654.
- Cheney, M., I. D. N. J., 1999. Electrical impedance tomography. *SIAM Rev.* 41(1), 85 – 101.
- Hintermüller, M., Laurain, A., Novotny, A. A., 2012. Second-order topological expansion for electrical impedance tomography. *Advances in Computational Mathematics* 36 (2), 235–265.
- Novotny, A. A., Sokołowski, J., 2013. Topological derivatives in shape optimization. *Interaction of Mechanics and Mathematics*. Springer.
- O. Scherzer, M. Grasmair, H. G. M. H., Lenzen, F., 2009. Variational methods in imaging. *Applied Mathematical Sciences*, Springer, New York.