



GERADORES DE MALHA EM UMA APLICAÇÃO GRÁFICA INTERATIVA PARA MODELOS BIDIMENSIONAIS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Gabriel Neves Alves Ferreira

Roque Luiz da Silva Pitangueira

gabrielneves@ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais

Avenida Presidente Antônio Carlos, 6627, Pampulha, Belo Horizonte, 31270-901, Minas Gerais, Brasil

Resumo. *Esse trabalho se insere no contexto de expansão do INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment - <http://www.insane.dees.ufmg.br/>), um projeto de software livre, em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, que visa disponibilizar um ambiente computacional de código aberto, amigável a adaptações e escalável em complexidade. Especificamente, o trabalho trata da implementação de métodos de geração de malha para modelos bidimensionais do Método dos Elementos Finitos, bem como da inserção desses métodos em um ambiente gráfico interativo para pré-processamento de modelos estruturais planos. Procedimentos para geração de malhas baseados em mapeamento das fronteiras são revisados, destacando-se o de mapeamento transfinito, que usa os projetores bilinear e trilinear para mapear o contorno do problema. Processos baseados em decomposição de domínio, utilizando triangulação de Delaunay, também são apresentados. Nesses casos, a malha é construída a partir da geração de nós e posterior triangulação do domínio. Essa geração abrange as possibilidades de malha randômica, concentrada (na qual o tamanho os elementos gerados varia dentro do domínio do problema) e baseada em “grids” pré-definidos. O trabalho também abrange técnicas de refinamento de malha. A estrutura de dados, utilizada para a implementação dos geradores de malha, e os padrões de projeto de software, utilizados para a implementação dos recursos gráficos interativos do pré-processador, são discutidos. Modelos construídos com o pré-processador ilustram seus diversos recursos.*

Palavras chave: *Geração de malha, Software gráfico interativo, Método dos Elementos Finitos*

1 INTRODUÇÃO

Esse artigo apresenta a implementação de métodos de geração e refinamento de malha para modelos bidimensionais do Método dos Elementos Finitos, bem como a inserção desses métodos no ambiente gráfico interativo para pré-processamento do sistema INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment).

2 MÉTODOS DE GERAÇÃO DE MALHA

2.1 Mapeamento de fronteiras

Geradores de malha baseados no mapeamento de fronteiras têm como base malhas geradas em domínios elementares (paramétricos), que consistem em quadrados ou triângulos unitários. Essas malhas elementares são transformadas para o domínio real utilizando algum tipo de mapeamento (Ho-Le, 1988; Fonseca, 1989; Gonçalves, 2004).

Entre esse tipos de mapeamento se encontra o chamado mapeamento transfinito, que descreve os limites da região a ser mapeada através de um sistema de coordenadas curvilíneas em um número não enumerável de pontos, e desse fato se origina o nome do método (Gonçalves, 2004).

Esse gerador de malha é capaz de discretizar modelos planos formados por subdomínios triangulares ou quadrilaterais. A base teórica para a implementação está descrita em Gonçalves (2004).

Primeiramente, se faz necessário introduzir o conceito de Projetor. Um projetor (P) é qualquer operador linear idempotente que mapeia uma superfície real (F) em uma superfície aproximada ($P[F]$). Esse operador recebe coordenadas locais e retorna um ponto no domínio global.

Para subdomínios quadrilaterais, é utilizado o projetor bilinear (B), definido abaixo.

$$B[F] \equiv B(u, v) = (1 - v)\vec{\psi}_1(u) + v\vec{\psi}_2(u) + (1 - u)\vec{\xi}_1(v) + u\vec{\xi}_2(v) - (1 - u)(1 - v)F(0,0) - (1 - u)vF(0,1) - uvF(1,1) - u(1 - v)F(1,0) \quad (1)$$

para $0 \leq u, v \leq 1$, onde u é uma coordenada paramétrica ao longo de $\vec{\psi}_1$ e $\vec{\psi}_2$ e v ao longo de $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$. $F(0,0)$, $F(0,1)$, $F(1,1)$ e $F(1,0)$ são os vértices do domínio quadrilateral, conforme representado na figura a seguir.

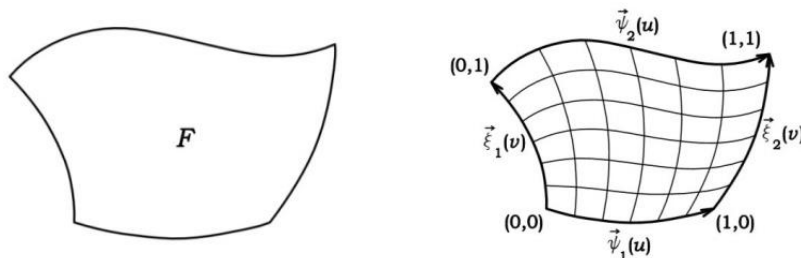


Figura 1. Projetor Bilinear (Gonçalves, 2004)

$\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$, $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$ são as representações paramétricas das fronteiras do domínio. Dessa forma, o projetor $B[F]$ representa um sistema local de coordenadas curvilíneas. Utilizando-se

diferentes valores (de 0 a 1) para u e v obtêm-se as coordenadas globais dos vértices de cada elemento quadrilateral, a partir dos quais é gerada a malha sobre a região em análise.

Para subdomínios triangulares, é utilizado o projetor trilinear (S), definido a seguir.

$$S[T] \equiv S(u, v, w) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{u}{1-v}\right) \xi(v) + \left(\frac{v}{1-u}\right) \xi(1-u) + \left(\frac{v}{1-w}\right) \eta(w) + \\ \left(\frac{w}{1-v}\right) \eta(1-v) + \left(\frac{w}{1-u}\right) \psi(u) + \left(\frac{u}{1-w}\right) \psi(1-w) \\ -u\xi(0) - v\eta(0) - w\psi(0) \end{bmatrix} \quad (2)$$

para $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1$ e $u + v + w = 1$.

Os pontos $\xi(0)$, $\eta(0)$, e $\psi(0)$ correspondem aos três vértices do domínio.

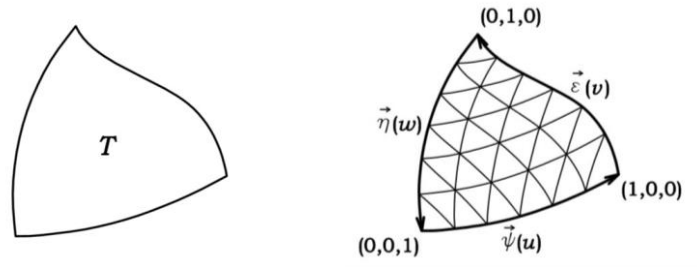


Figura 2. Projetor Trilinear (Gonçalves, 2004)

O mapeamento transfinito é uma excelente opção para discretizar geometrias que podem ser representadas por subdomínios triangulares ou quadrilaterais. Porém, quando o domínio tem ângulos muito agudos ou muito obtusos, a malha gerada não é satisfatória, além de não ser possível variar o refinamento da malha. Esses empecilhos são contornados pelos métodos apresentados na seção seguinte.

2.2 Decomposição de domínio

Os métodos de geração de malha por decomposição de domínio implementados no pré-processador descrito nesse trabalho funcionam a partir da geração de nós e posterior geração dos elementos por triangulação de Delaunay, implementada no sistema INSANE (Penna, 2007). Essa triangulação consiste em um algoritmo que recebe um conjunto de pontos e gera triângulos tais que, para qualquer triângulo, existe um círculo que contem seus vértices e exclui todos os demais pontos da triangulação (Figueiredo e Carvalho, 1991). A triangulação de Delaunay é utilizada para formar os elementos após a geração de nós no contorno e internos ao domínio a ser discretizado.

Malha Randômica. Um dos métodos para gerar nós aleatórios dentro de um domínio é a técnica de Cavendish (Ho-Le, 1988). O algoritmo de geração de pontos aqui descrito consiste numa modificação dessa técnica.

Nesse método, o usuário define a distância média entre os nós (l). Primeiramente, são adicionados nós ao contorno a intervalos de comprimento mais próximos o possível de l (Fig. 3b). Em seguida, o objeto é dividido em quadrados de lado $l/\sqrt{2}$. Para cada quadrado, é definido um novo nó interno a esta de maneira aleatória. Se este nó estiver contido no domínio e não muito próximo dos nós do contorno e dos demais nós, ele é adicionado. Senão, são realizadas mais duas tentativas antes de se passar para o próximo quadrado.

A proximidade tolerável dos demais para que um nó seja adicionado é de l multiplicado por uma tolerância. Experimentalmente definiu-se essa tolerância como 77%.

Uma vez gerados os nós de contorno e internos (Fig. 3c), é então realizada a triangulação de Delaunay. Após a triangulação, são retirados os triângulos que não respeitam o contorno, uma vez que essa geometria produz um feixe convexo e sem furos. Dessa forma, a malha gerada respeita a geometria original (Fig. 3d).

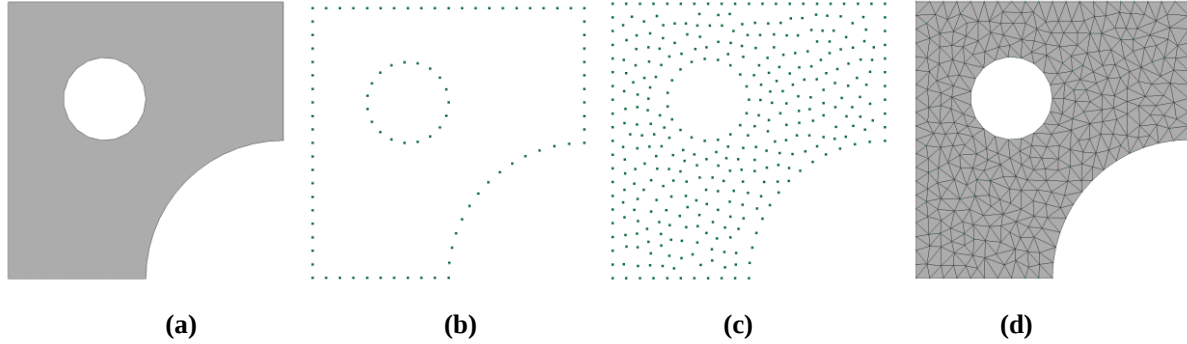


Figura 3. Malha Randômica

Malha Concentrada Assimétrica. Este método consiste em uma modificação do acima descrito. Nele o usuário pode definir para diversos pontos no domínio (pontos de referência) a distância nodal em torno destes pontos. A estrutura é dividida em quadrados de lado $l_{min}/\sqrt{2}$ (l_{min} é a menor distância nodal definida). Para avaliar se um ponto P será ou não adicionado, sua distância do contorno e dos demais pontos é comparada a um parâmetro calculado a partir da função definida pela Eq. 3.

$$\mathcal{D}(P) = \sum_{i=1}^n l_i \cdot \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{d(P, R_j)}{d(R_i, R_j)} \right)^s, i \neq j \right] \quad (3)$$

onde cada R_i é um ponto de referência, l_i é a distância nodal associada a R_i , $d(A, B)$ é a distância entre dois pontos e s é o fator de suavidade, um escalar que define a suavidade das transições e a extensão das partes mais refinadas.

Pela Eq. (3) pode-se perceber que em qualquer ponto de referência o valor da função apresentada será igual à distância nodal definida para este ponto, ou seja, $\mathcal{D}(R_i) = l_i$.

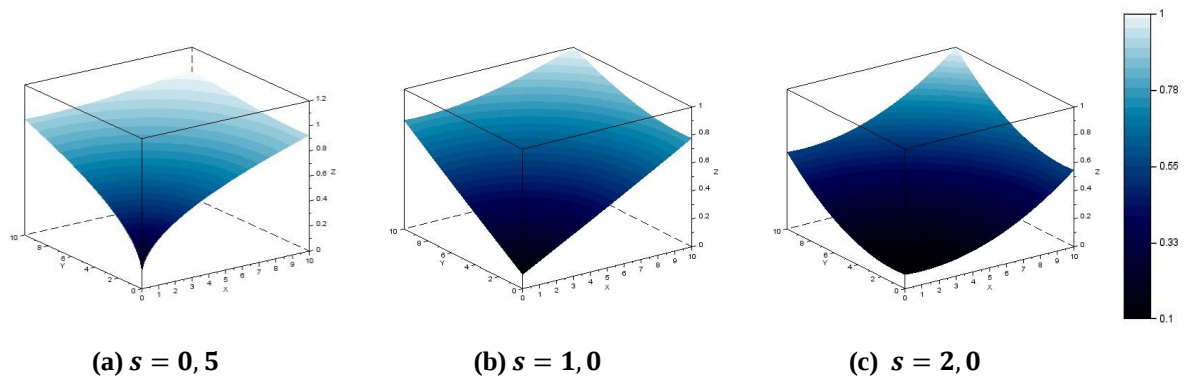


Figura 4. Função de Distância Nodal

A Figura 4 mostra a função $\mathcal{D}$ para um domínio quadrado de lado 10 ($0 \leq x, y \leq 10$). No ponto de coordenadas (0,0) o valor da distância nodal foi definido como 0,1 e no ponto (10,10) foi definido como 1,0. As três imagens ilustram a influência do fator de suavidade (s)

na forma da função $\mathcal{D}$, e consequentemente na malha gerada. Maiores valores de s geram malhas com partes refinadas maiores e transições mais graduais, ao passo que menores valores de s resultam em partes refinadas menores e transições mais bruscas.

Grids Pré-Definidos. Também consiste em uma modificação do processo de geração de malha randômica. A única diferença é que a geração dos nós internos não segue uma distribuição aleatória, mas sim distribuições fixas. A Figura 5a ilustra o padrão de triângulos equiláteros, e o processo retratado na Fig. 5b gera nós segundo um grid ortogonal. A não conformidade das arestas diagonais nesse último caso é consequência da triangulação de Delaunay.

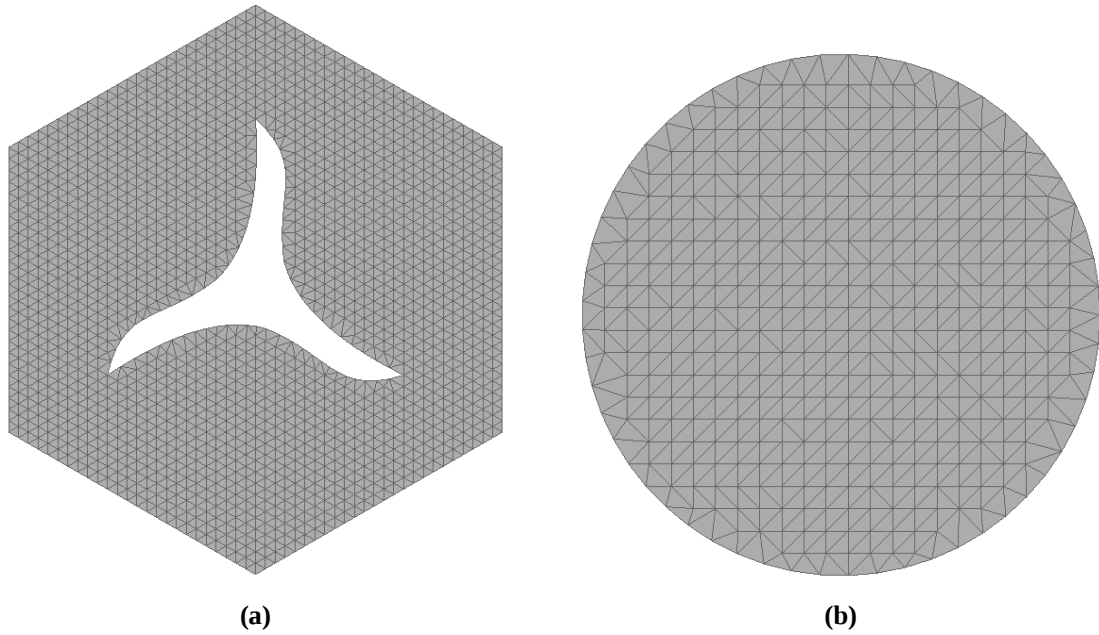


Figura 5. Malha por Grids Pré-Definidos

2.3 Refinamento de malhas

É possível refinar malhas já existentes a partir de um similar ao método de malha concentrada apresentado. Primeiramente, define-se um vértice ou uma linha, definida por dois ou mais vértices, a partir do qual a malha será refinada (Fig. 6a), além do alcance e da taxa de refinamento. Todos os elementos que tiverem algum nó dentro desse alcance serão incluídos no domínio sobre o qual será gerada uma nova malha (Fig. 6b). As arestas internas são removidas para favorecer uma malha de melhor qualidade (Fig. 6c).

O processo de geração da malha local é similar ao da malha concentrada assimétrica, porém a função distância nodal é dada por:

$$\mathcal{D}(P) = \begin{cases} [ld^s + lt(r - d)^s]r^{-s}, & d < r \\ l, & d \geq r \end{cases} \quad (4)$$

onde d é a distância do ponto ao vértice ou linha de referência, r e t são, respectivamente, o alcance e a taxa de refinamento, l é a média do comprimento dos lados dos elementos que compõe o domínio de refinamento e s é o fator de suavidade.

Após a geração da malha local (Fig. 6d), ela é reintroduzida na malha global, respeitando a compatibilidade na interface entre as duas (Fig. 6e).

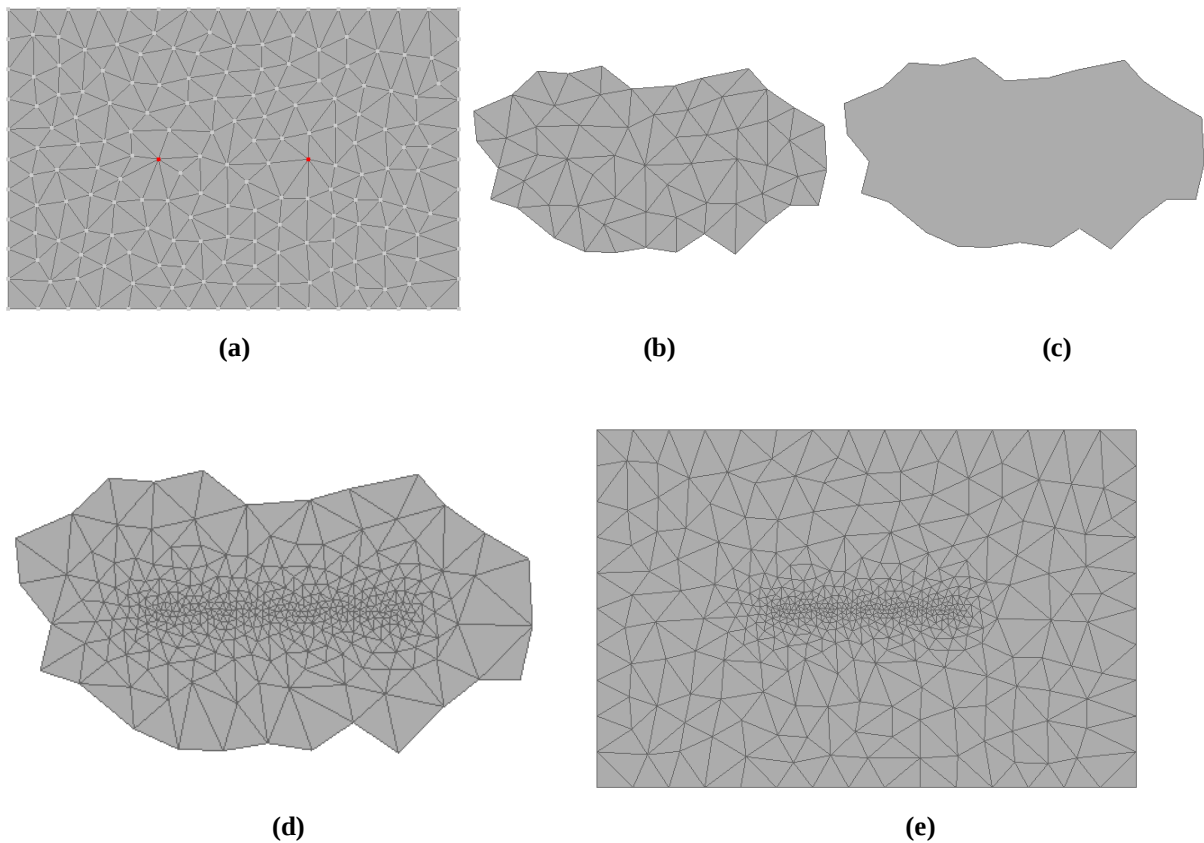


Figura 6. Refinamento de Malha

2.4 Combinações dos Métodos

O gerador de malhas aqui apresentado permite combinar os diversos métodos acima descritos. Para a malha da Fig. 7a, foi realizado primeiramente um mapeamento transfinito dividindo cada aresta de um quadrado de lado 10 em 13 partes. Depois, em torno de um de seus vértices foi feito o refinamento com raio de alcance igual a 7 e com 20% de refinamento. A Figura 7b mostra um quarto de circunferência onde primeiramente foi gerada uma malha randômica mais grosseira, que posteriormente foi refinada em 10% a partir de sua aresta esquerda. Por fim, a Fig. 7c ilustra a opção de refinamento a partir de uma linha definida por diversos pontos.

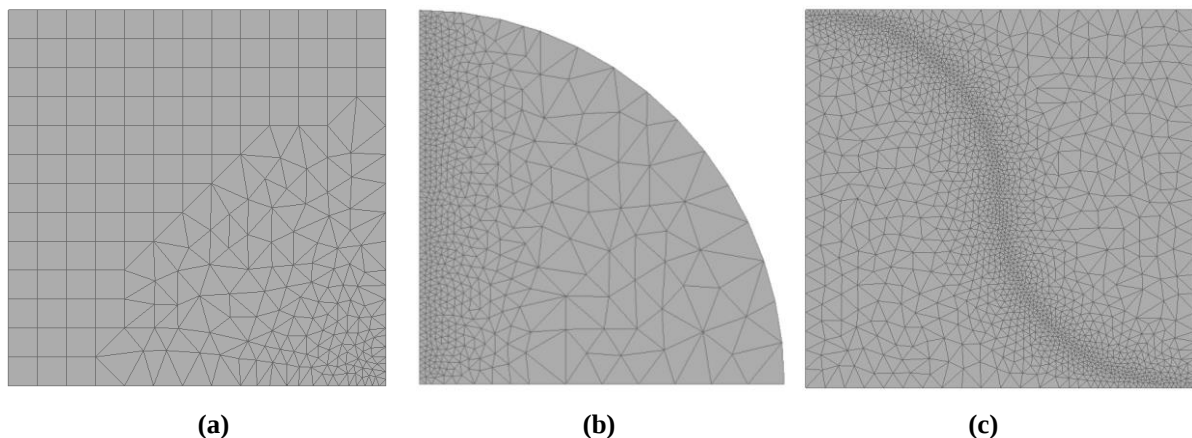


Figura 7. Combinação dos Métodos de Geração de Malha

3 DIRETRIZES DA IMPLEMENTAÇÃO

3.1 Estrutura de dados

A estrutura de dados utilizada no pré-processador é a Half-Edge Data Structure (HEDS), ou Estrutura de Dados de Semi-Arestas. Esta é constituída dos níveis Subdivisão Planar, Face, Loop (ou Ciclo), Semi-Aresta, Aresta e Vértice, conforme a Fig. 8 (Mantyla, 1987; Del Savio et al., 2004; Ferreira, 2008). Essas entidades são armazenadas em listas duplamente encadeadas.

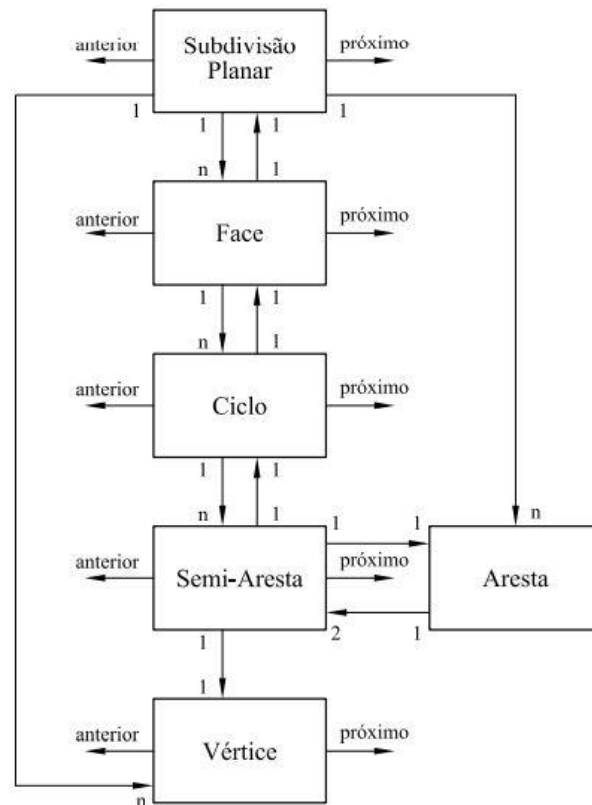


Figura 8. HEDS (Del Savio et al., 2004; Ferreira, 2008)

Nesse modelo, cada Aresta é formada por duas Semi-Arestas, uma para cada lado da Aresta e contendo um vértice cada.

A Subdivisão Planar contém listas de Faces, Arestas e Vértices. No pré-processador aqui descrito é utilizada apenas uma subdivisão planar, que representa a estrutura plana como um todo. O nível seguinte é a Face, formada por Loops. O primeiro Loop da lista descreve o contorno da Face e os demais representam os furos, caso existam. O Loop é formado por uma lista de Semi-Arestas, e essas contêm referências ao Loop, à Aresta a qual pertencem e a seu Vértice.

Essa estrutura permite acesso rápido entre as entidades que a compõe, assim favorecendo as operações geométricas necessárias ao funcionamento do pré-processador.

3.2 GUI e padrões de projeto de software

A implementação da interface gráfica com o usuário (GUI - Graphical User Interface) do gerador de malha, ilustrada na Fig. 9, se deu segundo os padrões MVC (Model-View-Controller) e Command, conforme apresentado em Gonçalves (2004).

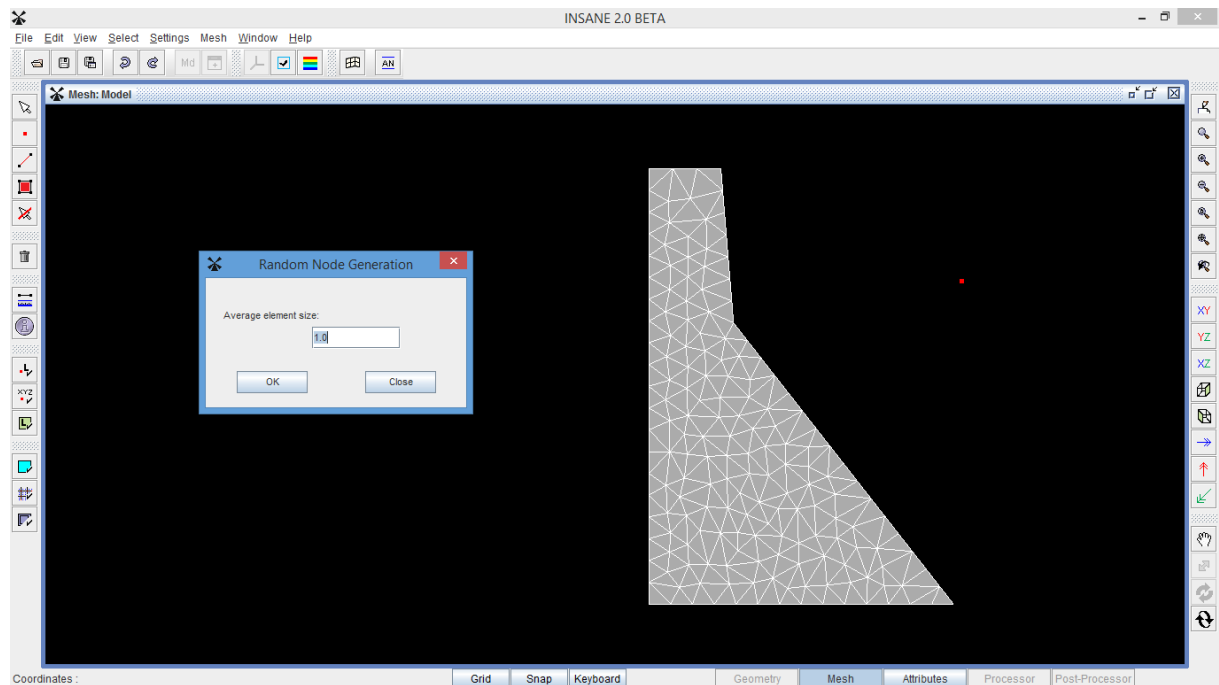


Figura 9. GUI do Gerador de Malhas

O padrão MVC é utilizado de forma a separar o modelo geométrico de sua representação gráfica, dividindo a aplicação em três componentes: Modelo, Vista e Controlador. O Modelo é responsável pelo armazenamento dos dados, ao passo que a Vista apresenta ao usuário as informações armazenadas e o Controlador rege a interação entre os dois, permitindo que se faça alterações no Modelo mantendo a Vista atualizada.

Por sua vez, o padrão Command permite que tarefas e rotinas de execução sejam encapsuladas. Dessa forma, elementos da interface gráfica (botões e itens de menu) são associados a essas rotinas.

O uso desses padrões de programação traz consigo uma maior modularidade do código, o que favorece mudanças, adaptações e a expansão do sistema.

4 RESULTADOS

Com o uso do pré-processador aqui descrito, é possível desenhar a geometria do problema, gerar a malha e definir seus atributos (apoios, carregamentos, materiais, modelo de análise, etc.), tudo em uma interface gráfica interativa. A seguir são apresentados modelos construídos com a aplicação.

A Figura 10a apresenta uma placa anular, apoiada na borda externa e com carregamento distribuído na borda interna. Considerou-se a simetria do problema, assim apenas um quarto do modelo foi desenhado. A malha foi gerada a partir do mapeamento transfinito.

A Figura 10b mostra uma chapa com furo submetida à tração, discretizada com o processo de geração de malha concentrada assimétrica.

Por fim, a Fig. 10c retrata uma malha para o ensaio de cisalhamento em quatro pontos (Schlangen, 1993). Nesse caso gerou-se uma malha randômica que foi refinada em uma linha a partir do entalhe.

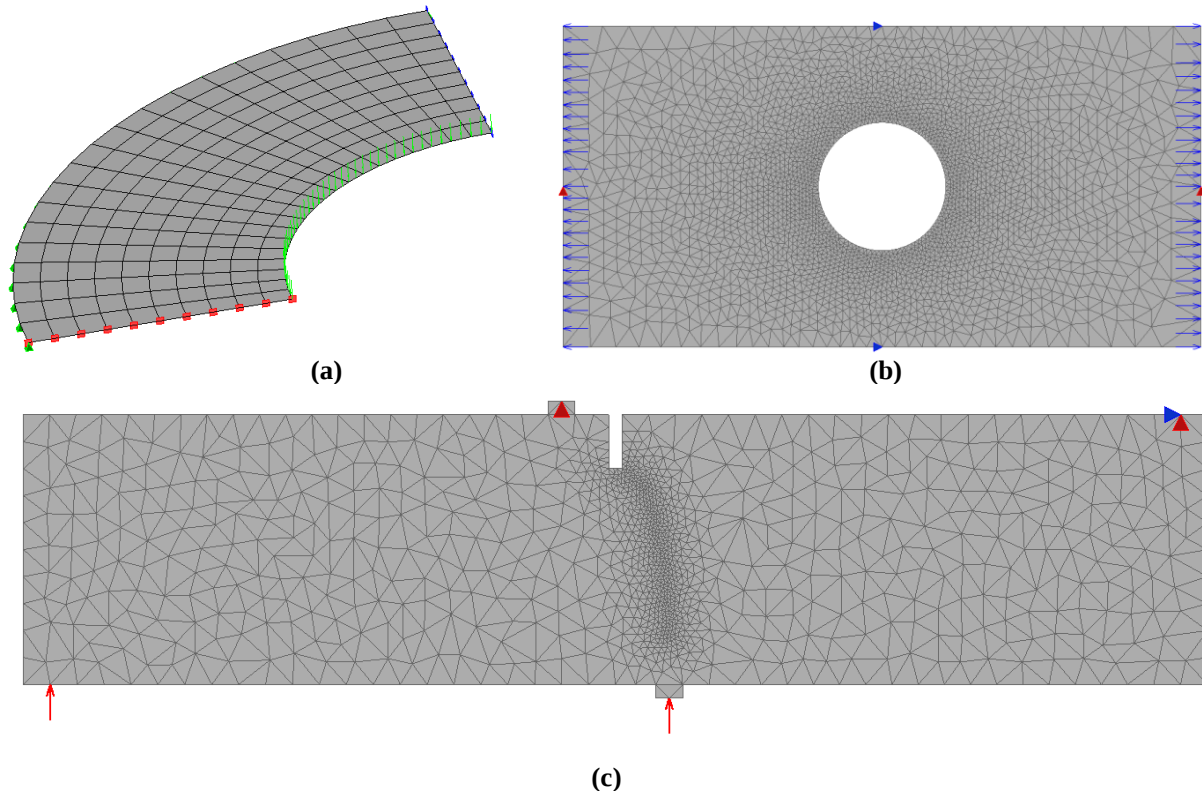


Figura 10. Exemplos

Agradecimentos

A Leandro Lopes da Silva e Samuel Silva Penna. Ao CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Grant 308785/2014-2) e à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – Grant PPM-00669-15) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

Del Savio, A., Santi, M. & Martha, L., 2004. *Traçado de curvas offset para auxílio na geração de malhas*. XXV Congresso Ibero Latino Americano de Mecânica Computacional - CILAMCE, Recife, Pernambuco.

Ferreira, R., 2008. *Pré-Processador Para Modelos Reticulados e Planos do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

Fonseca, G., 1989. *Geração de malhas através de mapeamentos transfinitos*. Dissertação de mestrado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Figueiredo, L. & Carvalho, P., 1991. *Introdução à Geometria Computational*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.
- Gonçalves, M., 2004. *Geração de Malhas Bidimensionais de Elementos Finitos Baseada em Mapeamentos Transfinitos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Ho-Le, K., 1988. Finite element mesh generation methods: a review and classification. *Computer-Aided Design*, vol. 20, issue 1, pp. 27-38.
- Mantyla, M., 1987. *An Introduction to Solid Modeling*. New York, NY, USA: Computer Science Press, Inc.
- Penna, S., 2007. *Pós-Processador para Modelos Bidimensionais Não-Lineares do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Schlangen, E., 1993. *Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete*. PhD thesis, Delft University of Technology.