



O ÍNDICE DE CONFIABILIDADE PARABÓLICO

Emmanuel Guasti Ferreira^a

Marcílio Sousa da Rocha Freitas^b

egf1@bol.com.br^a - marcilio@em.ufop.br^b

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) - Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, CEP: 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

José Antônio da Rocha Pinto^c

Geraldo Rossoni Sisquini^d

jarpint@hotmail.com^c - geraldo.sisquini@ufes.br^d

Departamento de Matemática (DMAT)^c - Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)^d

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) - Campus Universitário de Maruípe, Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, CEP: 29000-000, Vitória, ES, Brasil

Resumo. Um índice de confiabilidade é apresentado, denominado índice de confiabilidade parabólico, que é a variável independente de uma função parábola do segundo grau, cujo valor estabelecido é dependente do índice de confiabilidade de primeira ordem (obtido pelo método FORM), do índice de confiabilidade de segunda ordem (obtido pelo método SORM), da soma das curvaturas principais calculadas através do método SORM e de um valor (ψ), estabelecido pelos autores com base na soma das curvaturas principais, que possui uma relação hiperbólica com o índice de confiabilidade parabólico. Esse índice de confiabilidade foi calculado com a finalidade de melhorar os resultados estabelecidos pelo método SORM. A análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem de várias funções de falha foi realizada e os resultados fornecidos pelo índice de confiabilidade parabólico, para efeito de comparação com as Simulações Monte Carlo (SMC), foram iguais ou melhores do que os resultados calculados pelo método SORM.

Palavras-chave. Índice de Confiabilidade, FORM, Curvaturas Principais, SORM e Simulação de Monte Carlo.

1 INTRODUÇÃO

O método SORM foi concebido com a finalidade de melhorar a precisão dos cálculos do método FORM, ou seja, melhorar a determinação do índice de confiabilidade de primeira ordem (β_F) e/ou a probabilidade de falha, $P_f = \Phi(-\beta_F)$. A idéia do método SORM é basicamente a mesma do FORM, ou seja, é aproximar a superfície de falha por um hiperparabolóide e não por um hiperplano, no ponto de projeto. Portanto, a diferença entre ambos consiste na aproximação feita para a superfície de falha no espaço reduzido. O SORM ao invés de utilizar uma superfície linear no ponto de projeto, ponto de maior densidade de probabilidade de falha, faz uma aproximação por uma superfície quadrática, como mostra a Fig. 1. As curvaturas principais k_j do hiperparabolóide, no ponto do projeto, são iguais às da superfície de falha, desde que essa última também seja um hiperparabolóide.

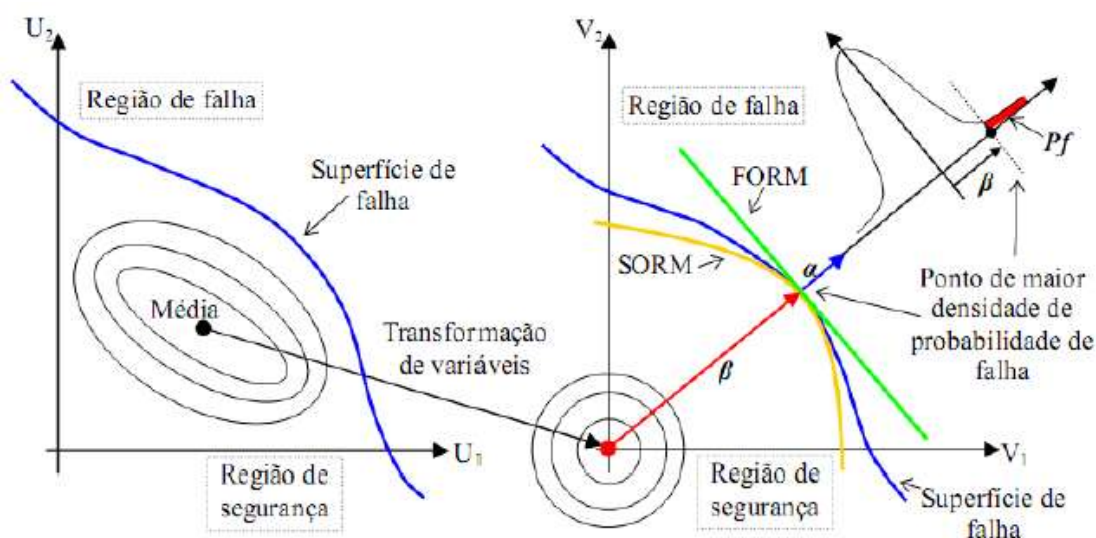


Figura 1: Demonstração gráfica da transformação de variáveis e dos métodos FORM e SORM
Fonte: Adaptado de Rojas (2008)

Uma solução simples para o cálculo da probabilidade de falha utilizando uma aproximação de segunda ordem, foi desenvolvida por Breitung (1984), utilizando a teoria de aproximações assintóticas, que é suficientemente precisa para um grande valor do índice de confiabilidade β_F ($1 \leq \beta_F \rightarrow \infty$), baseado num ajustamento a um hiperparabolóide, através da Eq. (1):

$$P_{fs} \approx \Phi(-\beta_F) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-1/2} \quad (1)$$

onde $\Phi(-\beta_F)$ é a distribuição cumulativa normal padrão de probabilidades, n é o número de variáveis aleatórias envolvidas na análise e k_j ($j = 1, \dots, n-1$) são as curvaturas principais do hiperparabolóide no ponto de distância mínima à origem (ponto de projeto).

Tvedt (1990) formulou uma aproximação de três termos para o conteúdo de probabilidade, que é um procedimento exato para a aproximação por um hiperparabolóide, no interior da superfície de aproximação quadrática da seguinte forma (Cizelj et al., 1994; Lee et al, 2005; Madsen et al, 2006):

$$P_{fs} \approx A_1 + A_2 + A_3 \quad (2)$$

onde A_1 , A_2 e A_3 podem ser calculados por meio da Eq.3, conforme ilustrado abaixo:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \Phi(-\beta_F) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-1/2} \\
 A_2 &= [\beta_F \Phi(-\beta_F) - \phi(\beta_F)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-1/2} - \prod_{j=1}^{n-1} (1 + (\beta_F + 1)k_j)^{-1/2} \right\} \\
 A_3 &= (\beta_F + 1) [\beta_F \Phi(-\beta_F) - \phi(-\beta_F)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-1/2} - \operatorname{Re} \left[\prod_{j=1}^{n-1} (1 + (\beta_F + i)k_j)^{-1/2} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\operatorname{Re}[\]$ representa a parte real do argumento complexo e i , no terceiro termo, é uma unidade imaginária, A_1 é uma aproximação assintótica da P_{fs} , que é exata para $1 \leq \beta_F \rightarrow \infty$, A_2 e A_3 são termos de correção, Φ e ϕ são a função cumulativa de probabilidades e a função densidade de probabilidades para a distribuição normal padronizada. O primeiro termo da aproximação de Tvedt é o mesmo que o da aproximação de Breitung e os outros termos são as equações de modificação de ordem superior aplicadas nesse método, que compõem a Eq. (3).

2 O ÍNDICE DE CONFIABILIDADE PARABÓLICO

Esse índice visa melhorar a qualidade dos resultados fornecidos pelo método SORM quanto à aproximação do valor do índice de confiabilidade de segunda ordem (β_S) e/ou da probabilidade de falha de segunda ordem, $P_{fs} = \Phi(-\beta_S)$.

2.1 Obtenção

Através da resolução de diversos exemplos foi observada a aproximação conforme mostrado na equação abaixo:

$$\beta_S - \beta_F \approx \Sigma k_j, \tag{4}$$

onde o termo Σk_j é a soma das curvaturas principais, no ponto de projeto, da superfície estado limite. Introduzindo, agora, o índice de confiabilidade parabólico (β_p) na Eq. (4) sem alterá-la, do ponto de vista da matemática, tem-se:

$$(\beta_S - \beta_p) + (\beta_p - \beta_F) \approx \Sigma k_j \tag{5}$$

e com a finalidade, na Eq. (5), de ser colocado o sinal de igual, será introduzido, de maneira conveniente, um valor ψ , conforme mostrado abaixo:

$$(\beta_S - \beta_p) \cdot (-\psi) + (\beta_p - \beta_F) \cdot (\psi) = \Sigma k_j. \tag{6}$$

Com o objetivo de eliminar a dúvida relativa ao sinal de ψ , na Eq. (6), tanto o termo à direita quanto o à esquerda são elevados ao quadrado de acordo com a Eq. (7):

$$[(\beta_S - \beta_p) \cdot (-\psi) + (\beta_p - \beta_F) \cdot (\psi)]^2 = [\Sigma k_j]^2. \tag{7}$$

Resolvendo a Eq. (7) é obtida a Eq. (8), conforme mostrado abaixo

$$4 \cdot \psi^2 \cdot \beta_p^2 - 4 \cdot \psi^2 \cdot (\beta_S + \beta_F) \cdot \beta_p + [(\psi) \cdot (\beta_S + \beta_F)]^2 - (\Sigma k_j)^2 = 0 \tag{8}$$

e na equação acima, que é uma função parábola do segundo grau (vide Fig. 2), fazendo $a=4 \cdot \psi^2$, $b=-4 \cdot \psi^2 \cdot (\beta_S + \beta_F)$ e $c=[(\psi) \cdot (\beta_S + \beta_F)]^2 - (\Sigma k_j)^2$, ela passa a ser reescrita na forma da Eq. (9):

O Índice de Confiabilidade Parabólico

$$F(\beta_p) = a \cdot \beta_p^2 + b \cdot \beta_p + c = 0. \quad (9)$$

A solução da Eq. (9) é fornecida pela Eq. (10):

$$\beta_p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (10)$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

As derivadas de primeira e segunda ordem da função $F(\beta_p)$ são fornecidas pela Eq. (11) e (12), respectivamente:

$$\frac{d[F(\beta_p)]}{d(\beta_p)} = 2a \cdot \beta_p + b \quad (11)$$

$$\frac{d^2[F(\beta_p)]}{d(\beta_p)^2} = 2a \quad (12)$$

onde as coordenadas do vértice, representadas, abaixo, pelas Eq.(13) e (14) foram obtidas através da Eq. (11) e (9), respectivamente:

$$\beta_{pv} = \frac{-b}{2a} \quad (13)$$

$$F_v(\beta_{pv}) = \frac{-\Delta}{4a} \quad (14)$$

sendo sempre um ponto de mínimo $[\beta_{pv}, F_v(\beta_{pv})]$, pois a derivada de segunda ordem, também, sempre será positiva, conforme ilustrado na Fig. 2:

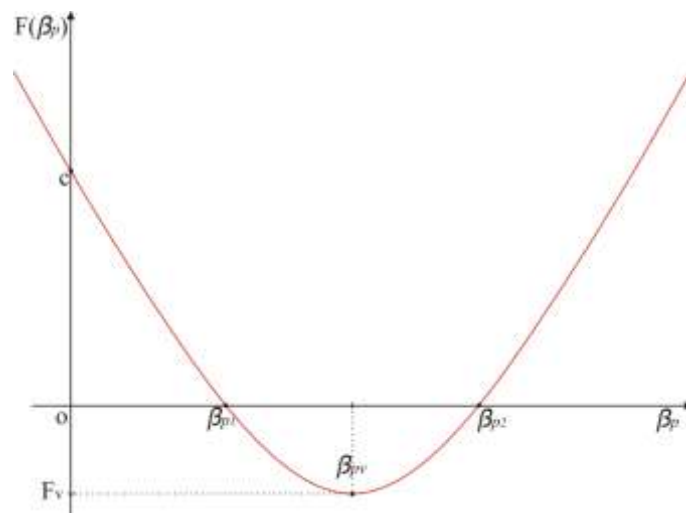


Figura 2: Gráfico da função parábola do 2º grau $F(\beta_p)$

Como consequência o domínio da função é $\psi \neq 0$, fornecido pela Eq. (15):

$$\Delta > 0. \quad (15)$$

A Eq. (10) pode ser representada, também, na forma da Eq. (16):

$$\beta_p = \beta_{pv} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2.a} . \quad (16)$$

Substituindo, na Eq. (16), β_{pv} , a e Δ , a fim de que β_p fique em função de $\beta_F, \beta_S, \Sigma k_j$ e ψ , que são os dados de entrada na referida equação para o cálculo de β_p , obtém-se uma função hiperbólica $\beta_p(\psi)$, (vide Fig. 3 e Fig. 4), conforme demonstrado na Eq. (17) :

$$\beta_p(\psi) = \frac{\beta_F + \beta_S}{2} + \frac{\Sigma k_j}{2.\psi} . \quad (17)$$

O sinal do termo $(\Sigma k_j / 2.\psi)$ da Eq. (17), é governado pela soma das curvaturas principais (Σk_j), que pode ter sinal negativo ou positivo. O sinal da Σk_j será negativo quando $\beta_S < \beta_F$ e positivo quando $\beta_S > \beta_F$. No entanto, quando $\Sigma k_j \rightarrow 0$, $\beta_p(\psi) \rightarrow \beta_{pv} \rightarrow \beta_{smc}$, como preconiza a Eq. (17), pois

$$\beta_{pv} = \frac{\beta_F + \beta_S}{2} \quad (18)$$

e o valor de $\beta_p \rightarrow \beta_F \rightarrow \beta_{smc}$, visto que $\beta_F = \beta_S$, e passa a não depender mais do valor de ψ .

Quando a Σk_j não for muito pequena, que é o que ocorre com maior frequência, o valor de β_p é função do valor de ψ conforme mostrado na Eq. (17) e ilustrado nas Fig. 3 e 4:

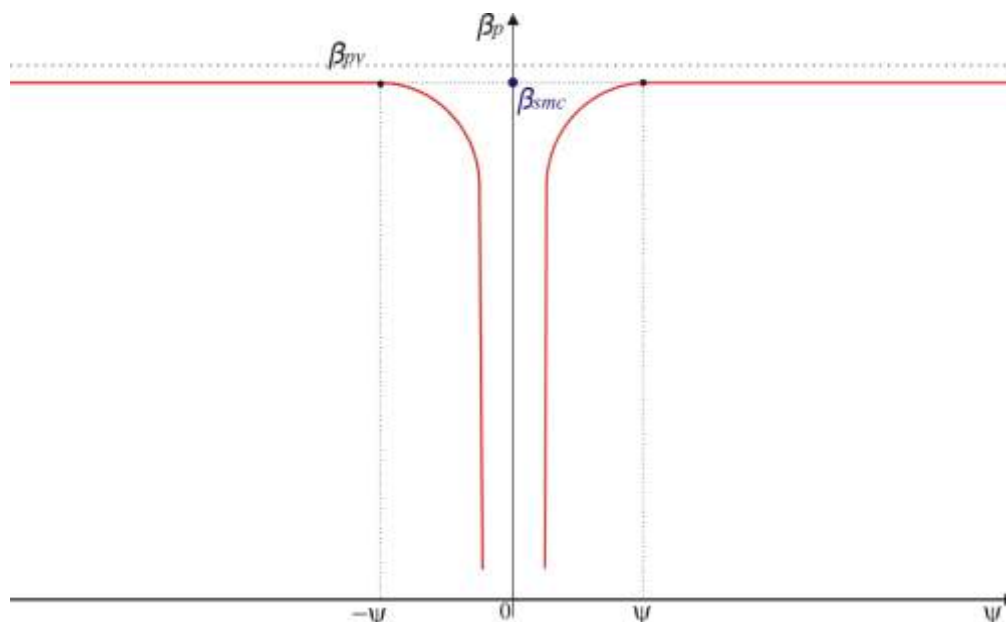


Figura 3: Gráfico da função hiperbólica $\beta_p(\psi)$, quando $\Sigma k_j < 0$

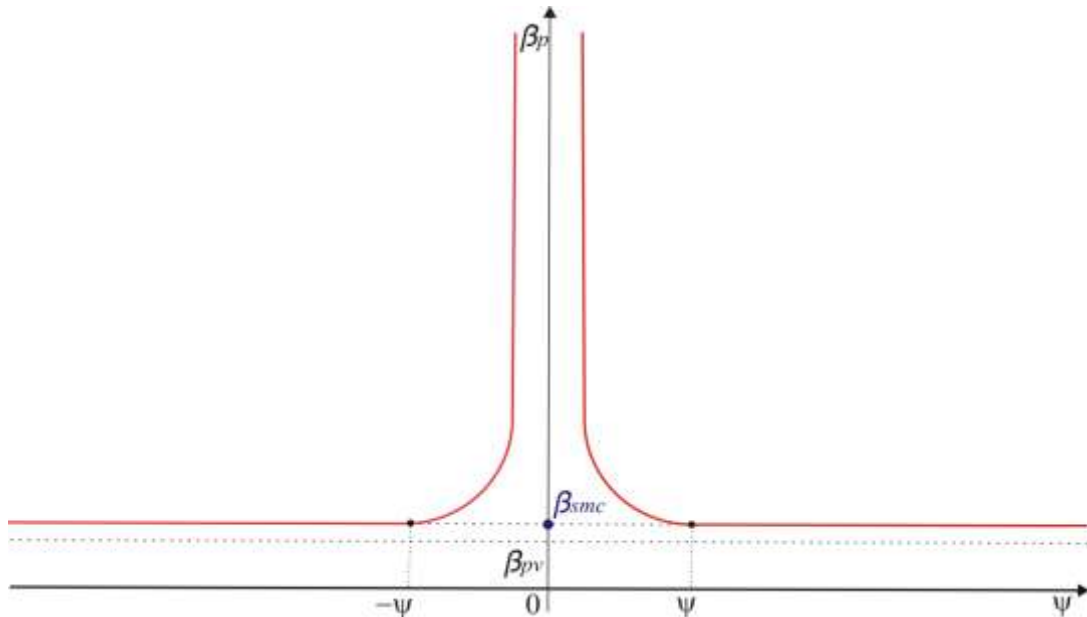


Figura 4: Gráfico da função hiperbólica $\beta_p(\psi)$, quando $\Sigma k_j > 0$

Analisando as Fig. 3 e 4, fica constatado que o domínio da função é $\psi \neq 0$ e quando $\psi \rightarrow \infty$ ou $-\psi \rightarrow -\infty$, $\beta_p \rightarrow \beta_{pv} \rightarrow \beta_{smc}$. Caso isso não ocorra $\beta_{pv} > \beta_{smc}$ como mostrado na Fig. 3 ou $\beta_{pv} < \beta_{smc}$ conforme ilustrado na Fig. 4.

2.2 Validade do procedimento de cálculo

O procedimento de cálculo para a obtenção do índice de confiabilidade parabólico, através da Eq. (17), funcionará quando forem utilizados os valores de ψ em conformidade com os critérios estabelecidos no item 2.3, sendo $\psi \neq 0$, e os métodos FORM e SORM apresentarem convergência para os valores dos seus respectivos índices de confiabilidade, β_F e β_S .

2.3 Determinação do valor de ψ

A determinação dos valores de ψ , que está baseada no sinal da soma das curvaturas principais (Σk_j), deve obedecer ao seguinte critério:

- quando $\Sigma k_j > 0$ – utilizar o valor inicial de $\psi = 1$ ou -1 , com incrementos iguais à 1 ou -1 , respectivamente, até que seja obtido o valor de β_p maior ou igual ao maior valor entre o índice de confiabilidade calculado pelo método SORM (β_S) e o índice de confiabilidade calculado pelas equações de Tvedt, obtendo assim o intervalo de convergência, ilustrado na Fig. 5, onde $\beta_p \rightarrow \beta_{smc}$.
- quando $\Sigma k_j < 0$ – utilizar o valor inicial de $\psi = 1$ ou -1 , com incrementos iguais à 1 ou -1 , respectivamente, até que seja obtido o valor de β_p maior ou igual ao menor valor entre o índice de confiabilidade calculado pelo método SORM (β_S) e o índice de confiabilidade calculado pelas equações de Tvedt, obtendo assim o intervalo de convergência, ilustrado na Fig. 5, onde $\beta_p \rightarrow \beta_{smc}$.

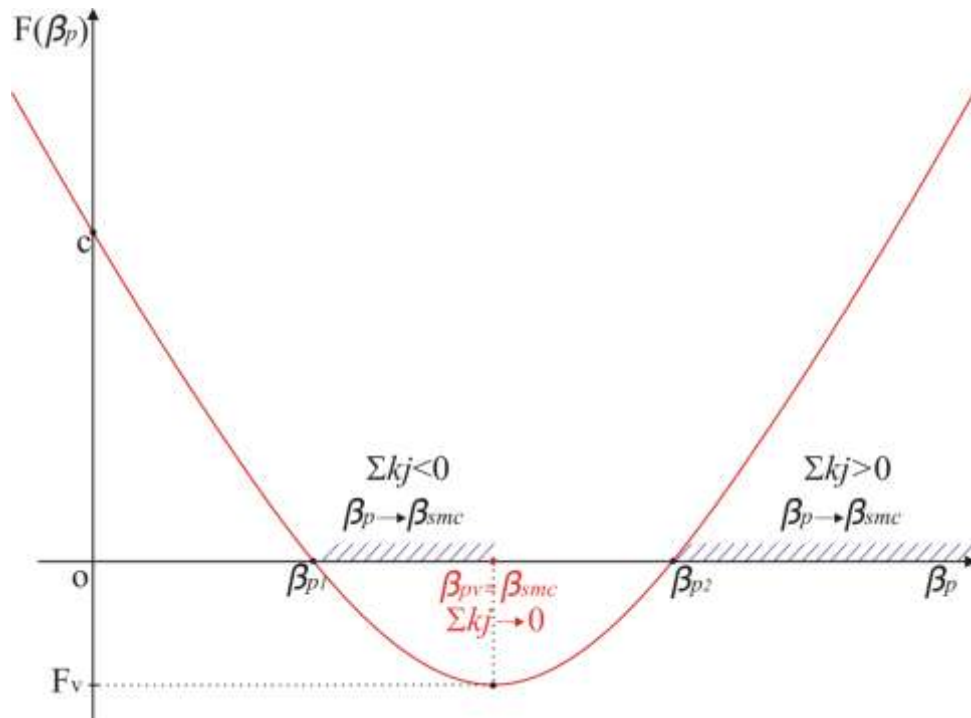


Figura 5: Gráfico ilustrando os intervalos de convergência de β_p , quando $\Sigma k_j > 0$ e $\Sigma k_j < 0$

3 RESULTADOS

Todos os exemplos foram calculados no ambiente MATLAB R2012b, versão estudantil, cujos programas estão instalados num microcomputador com processador Intel de 2.93 GHz, memória de RAM de 2 Gb e sistema operacional Windows 7 de 32 bits.

3.1 Exemplo 1

Esse exemplo foi analisado por Wu e Wirsching (1987) e utilizado na análise da fadiga de componentes em alta temperatura e baixo número de ciclos de carregamento.

A função de performance ou função de falha é expressa por:

$$G(U) = \Delta - 10^4 \left[\frac{fpp}{R(Y\Delta\epsilon)^{-1.71}} + \frac{1-fpp}{H(Y\Delta\epsilon)^{-1.188}} \right] \quad (19)$$

onde

$$U = (\Delta, fpp, R, Y, H, \Delta\epsilon). \quad (20)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 1 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 2, 3, 4 e 5.

Tabela 1. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média(u.v.) *	Coefficiente de Variação (u.v.)*
Δ	Lognormal	1.0440	0.30
fpp	Normal	0.7000	0.10
R	Lognormal	0.2390	0.40
Y	Lognormal	1.0110	0.15
H	Lognormal	1.8020	0.40
$\Delta\epsilon$	Gumbel	0.0005	0.16

Nota: * u.v. = Unidade da Variável

Tabela 2. Ponto de projeto (V^*_i) obtido via método FORM (HL-RF)

Variável	V^*_i
Δ	-1.2680
fpp	-0.6504
R	-0.2796
Y	0.8220
H	0.9957
$\Delta\epsilon$	-1.3844

Nota: V^*_i = Coordenadas do ponto de projeto no espaço reduzido

Tabela 3. Curvaturas principais da função de falha

SORM
-0.1593
0.1093
-0.0478
0.0000
0.0474
$\Sigma k_j = -0.0504$

Tabela 4. Resultados obtidos na análise da confiabilidade

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	7	-	-	-	-
β	2.386	-	-	-	-
pf	8.52×10^{-3}	-	-	-	-
pf2	-	9.71×10^{-3}	10.45×10^{-3}	10.10×10^{-3}	10.15×10^{-3}
β^{EQ}	-	2.340	2.310	2.323	2.324
ψ	-	-	-	1	-
N	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.31	0.23	0.00	211.26

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade de primeira ordem; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente ou de segunda ordem; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de β^{EQ} =2.320 de acordo com Wu e Wirsching (1987)

Tabela 5. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	2.67	0.69	0.60	0.04

3.2 Exemplo 2

O exemplo abaixo consiste em uma função de falha utilizada por Zhao e Ono (1999), num artigo sobre um procedimento geral para utilização dos métodos de confiabilidade (FORM/SORM), sendo:

$$G(U) = X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + X_4 - 5 X_5 - 5 X_6 \quad (21)$$

onde

$$U = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6). \quad (22)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 6 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 7, 8, 9 e 10.

Tabela 6. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média(u.v.) *	Desvio Padrão(u.v.) *
X_1	Lognormal	120	12
X_2	Lognormal	120	12
X_3	Lognormal	120	12
X_4	Lognormal	120	12
X_5	Lognormal	50	15
X_6	Lognormal	40	12

Nota: * u.v. = Unidade da Variável

Tabela 7. Ponto de projeto (V^*_i) obtido via método FORM (HL-RF)

Variável	V^*_i
X_1	-0.1810
X_2	-0.3557
X_3	-0.3557
X_4	-0.1810
X_5	1.8998
X_6	1.2594

Tabela 8. Curvaturas principais da função de falha

SORM
-0.2073
0.0018
0.0077
0.0104
0.0151
$\Sigma k_j = -0.1723$

Tabela 9. Resultados obtidos na análise da confiabilidade

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	14	-	-	-	-
β	2.348				
pf	0.94×10^{-2}	-	-	-	-
pf2	-	1.27×10^{-2}	1.33×10^{-2}	1.27×10^{-2}	1.23×10^{-2}
β^{EQ}	-	2.240	2.216	2.240	2.250
ψ	-	-	-	2	-
N	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.20	0.22	0.00	224.74

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade de primeira ordem; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente ou de segunda ordem; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta^{EQ}=2.276$ de acordo com Zaho e Ono (1999)

Tabela 10. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	4.36	0.44	1.51	0.44

3.3 Exemplo 3

Esse exemplo, obtido de Maes et al. (1993), consiste numa função de falha cujo estado limite é representado pela equação:

$$G(U) = 3.5 - X_1 + 0.5 [\cosh(X_2) - 1] \quad (23)$$

onde

$$U = (X_1, X_2). \quad (24)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 11 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 12, 13, 14 e 15.

Tabela 11. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média(u.v.) *	Desvio Padrão(u.v.) *
X_1	Normal Padrão	0	1
X_2	Normal Padrão	0	1

Nota: * u.v. = Unidade da Variável

Tabela 12. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF)

Variável	V^*_i
X_1	3.5000
X_2	0.0000

Tabela 13. Curvaturas principais (k_i)

SORM
0.5000
$\Sigma k_i = 0.5000$

Tabela 14. Resultados obtidos na análise de confiabilidade

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	0	-	-	-	-
β	3.500	-	-	-	-
pf	2.31×10^{-4}	-	-	-	-
pf2	-	1.39×10^{-4}	2.31×10^{-4}	1.30×10^{-4}	1.30×10^{-4}
β^{EQ}	-	3.632	3.502	3.649	3.649
ψ	-	-	-	3	
N	-	-	-	-	10^7
t	0.00	7.82	0.19	0.00	11.98

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valores de $\beta=3.500$ (pf= 2.32×10^{-4}), $\beta^{EQ} = 3.630$ (pf2(SORM)= 1.40×10^{-4}) e $k_i = 0.5000$, fornecidos por Maes et al. (1993)

Tabela 15. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	4.08	0.47	4.03	0.00

3.4 Exemplo 4

Nesse exemplo, obtido de Der Kiureghian e De Stefano (1990), é apresentada a superfície de falha de um hiperparabolóide, composta pelo seu índice de confiabilidade β e as suas curvaturas principais k_i , sendo o estado limite representado pela equação:

$$G(U) = \beta + 0.5 \sum_{i=1}^9 k_i X_i^2 - X_{10}. \quad (25)$$

onde $\beta=3$, $k_1=0.30$, $k_2=0.29$, $k_3=0.28$, $k_4=0.27$, $k_5=0.26$, $k_6=0.25$, $k_7=0.24$, $k_8=0.23$ e $k_9=0.22$, de acordo com Der Kiureghian e De Stefano (1990).

$$U = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}) . \quad (26)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 16 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 17, 18, 19 e 20 .

Tabela 16. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média (u.v.) *	Desvio Padrão(u.v.) *
X ₁	Normal Padrão	0	1
X ₂	Normal Padrão	0	1
X ₃	Normal Padrão	0	1
X ₄	Normal Padrão	0	1
X ₅	Normal Padrão	0	1
X ₆	Normal Padrão	0	1
X ₇	Normal Padrão	0	1
X ₈	Normal Padrão	0	1
X ₉	Normal Padrão	0	1
X ₁₀	Normal Padrão	0	1

Nota: * u.v. = Unidade da Variável

Tabela 17. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF)

Variável	V* _i	α^*_{i}
X ₁	0.0000	0.0000
X ₂	0.0000	0.0000
X ₃	0.0000	0.0000
X ₄	0.0000	0.0000
X ₅	0.0000	0.0000
X ₆	0.0000	0.0000
X ₇	0.0000	0.0000
X ₈	0.0000	0.0000
X ₉	0.0000	0.0000
X ₁₀	3.0000	-1.0000

Tabela 18. Curvaturas principais (k_i)

SORM
0.3000
0.2900
0.2800
0.2700
0.2600
0.2500
0.2400
0.2300
0.2200
$\Sigma k_j = 2.34$

Tabela 19. Resultados obtidos na análise de confiabilidade

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	83	-	-	-	-
β	3.000	-	-	-	-
pf	1.34×10^{-3}	-	-	-	-
pf2	-	0.10×10^{-3}	0.09×10^{-3}	0.08×10^{-3}	0.06×10^{-3}
β^{EQ}	-	3.716	3.756	3.768	3.849
ψ	-	-	-	3	-
N	-	-	-	-	10^6
t	0.20	0.76	0.42	0.00	77926.50

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente, N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=3.000$ ($pf=1.34 \times 10^{-3}$) e os valores das curvaturas principais fornecidas pelo método SORM coincidiram com os valores exatos apresentados por Der Kiureghian e De Stefano (1990)

Tabela 20. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	22.06	3.46	2.42	2.10

3.5 Exemplo 5

Esse exemplo foi analisado por Madsen et al. (2006) e trata-se de um pórtico plano apresentado na Fig. 6.

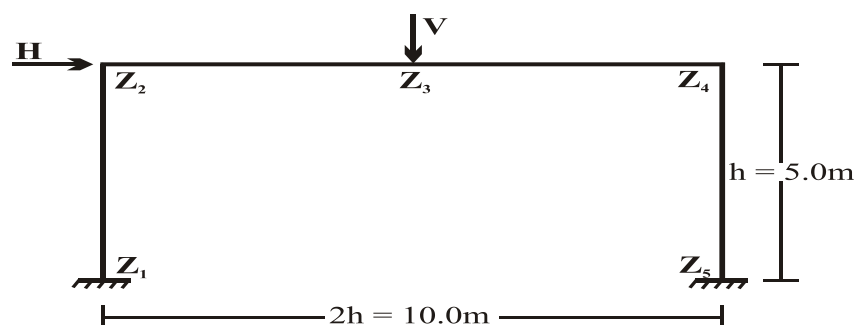


Figura 6 - Pórtico plano. Fonte: Madsen et al.(2006)

Através do princípio dos trabalhos virtuais, conforme Madsen et al. (2006), são encontrados três modos de falha nessa estrutura, ilustrados na Fig. 7, considerando que a falha ocorre a partir da formação de rótulas plásticas, que levam a estrutura a um mecanismo de colapso.

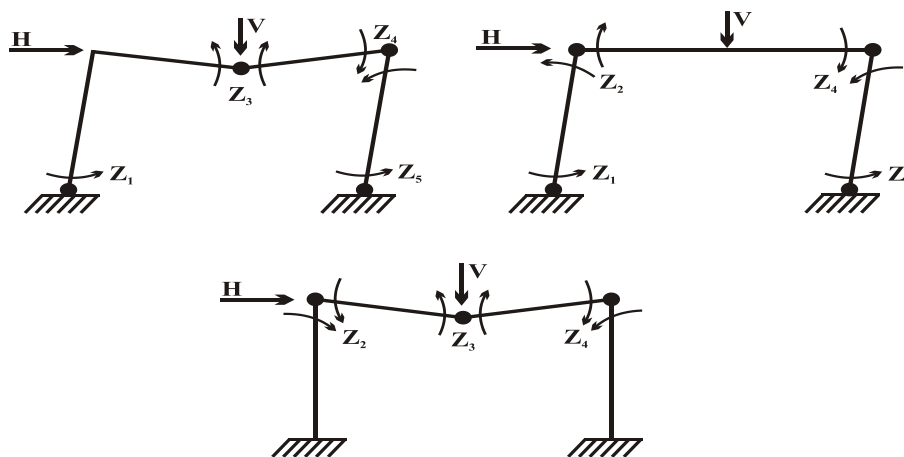


Figura 7 - Estrutura de um pórtico plano sujeito a três modos de falha. Fonte: Adaptado de Madsen et al., (2006)

Os modos de falha mostrados na Fig. 7 levam às seguintes funções de performance ou funções de falha:

$$G_1(U) = Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_5 - H h \quad (27)$$

$$G_2(U) = Z_1 + 2 Z_3 + 2 Z_4 + Z_5 - H h - V h \quad (28)$$

$$G_3(U) = Z_2 + 2 Z_3 + Z_4 - V h . \quad (29)$$

A ocorrência de qualquer um dos modos de falha pode levar a estrutura ao colapso, dessa forma a análise da confiabilidade pode ser representada por um sistema em série. No caso em questão, o evento pode ser definido como um sistema, pois é representado por mais de uma função de falha.

Os momentos plásticos resistentes Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 e as cargas H e V são considerados aleatórios na análise da confiabilidade, ou seja

$$U = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, H, V). \quad (30)$$

O Índice de Confiabilidade Parabólico

As características das variáveis aleatórias (independentes) são apresentadas na Tabela 21 e os resultados obtidos nas Tabelas 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.

Tabela 21. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão
$Z_1, \dots, Z_5$ (KNm)	Lognormal	134.90	13.49
H (KN)	Lognormal	50.00	15.00
V(KN)	Lognormal	40.00	12.00

Tabela 22. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF) – Eq. (27)

Variável	V^*_i
Z_1	-0.2271
Z_2	-0.2271
Z_4	-0.2271
Z_5	-0.2271
H	2.6735

Tabela 23. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF) – Eq. (28)

Variável	V^*_i
Z_1	-0.2209
Z_3	-0.4325
Z_4	-0.4325
Z_5	-0.2209
H	2.3931
V	1.4526

Tabela 24. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF) – Eq. (29)

Variável	V^*_i
Z_2	-0.2899
Z_3	-0.5641
Z_4	-0.2899
V	3.3660

Tabela 25. Curvaturas principais (k_i)

SORM		
$G_1(U)$	$G_2(U)$	$G_3(U)$
0.0002	-0.2065	0.0004
0.0084	0.0021	0.0084
0.0084	0.0076	0.0124
0.0084	0.0103	-
-	0.0150	-
$\Sigma k_j = 0.0254$	$\Sigma k_j = -0.1715$	$\Sigma k_j = 0.0212$

Tabela 26. Resultados obtidos na análise de confiabilidade – Eq. (27)

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	5	-	-	-	-
β	2.712	-	-	-	-
pf	3.33×10^{-3}	-	-	-	-
pf2	-	3.22×10^{-3}	3.24×10^{-3}	3.22×10^{-3}	3.26×10^{-3}
β^{EQ}	-	2.725	2.722	2.725	2.721
ψ	-	-	-	2	-
N	-	-	-	-	10^7
t	0.06	0.19	0.27	0.00	112.35

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=2.710$ (pf(FORM)= 3.36×10^{-3}) e $\beta^{EQ}=2.720$ (pf2(Tvedt (SORM))= 3.22×10^{-3}) de acordo com Madsen et al. (2006)

Tabela 27. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC – Eq. (27)

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	0.33	0.15	0.04	0.15

Tabela 28. Resultados obtidos na análise de confiabilidade – Eq. (28)

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	18	-	-	-	-
β	2.882	-	-	-	-
pf	1.96×10^{-3}	-	-	-	-
pf2	-	2.93×10^{-3}	3.09×10^{-3}	2.80×10^{-3}	2.75×10^{-3}
β^{EQ}	-	2.756	2.738	2.767	2.776
ψ	-	-	-	2	-
N	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.20	0.22	0.00	211.80

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=2.880$ (pf(FORM)= 1.99×10^{-3}) e $\beta^{EQ}=2.790$ (pf2(Tvedt (SORM))= 2.67×10^{-3}) de acordo com Madsen et al. (2006)

Tabela 29. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC – Eq. (28)

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	3.82	0.72	1.37	0.32

Tabela 30. Resultados obtidos na análise de confiabilidade – Eq. (29)

	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p	SMC
i	6	-	-	-	-
β	3.437	-	-	-	-
pf	2.91×10^{-4}	-	-	-	-
pf2	-	2.81×10^{-4}	2.86×10^{-4}	2.81×10^{-4}	2.82×10^{-4}
β^{EQ}	-	3.447	3.444	3.447	3.446
ψ	-	-	-	2	-
N	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.11	0.17	0.00	21.47

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=3.440$ (pf(FORM)= 2.91×10^{-4}) e $\beta^{EQ}=3.450$ (pf2(Tvedt (SORM))= 2.83×10^{-4}) de acordo com Madsen et al. (2006)

Tabela 31. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade da SMC – Eq. (29)

Módulo dos erros relativos (%)	FORM (HL-RF)	SORM	Tvedt (SORM)	β_p
e	0.26	0.03	0.06	0.03

4 CONCLUSÕES

A tabela abaixo representa a síntese dos melhores resultados obtidos, para o índice de confiabilidade de segunda ordem (β^{EQ}) calculado através do método SORM /Tvedt e, também, os resultados fornecidos pelo índice de confiabilidade parabólico (β_p):

Tabela 32. Comparação dos resultados obtidos na análise de confiabilidade estrutural via método SORM /Tvedt com os resultados fornecidos pelo β_p , quanto à eficácia

EXEMPLO	SORM /Tvedt *		β_p **		SMC	Maior Eficácia
	β^{EQ}	e (%)	β_p	e (%)		
1	2.310	0.60	2.323	0.04	2.324	**
2	2.240	0.44	2.240	0.44	2.250	Ambos
3	3.632	0.47	3.649	0.00	3.649	**
4	3.756	2.42	3.768	2.10	3.849	**
5 - Eq. (27)	2.722	0.04	2.725	0.15	2.721	*
5 - Eq. (28)	2.756	0.72	2.767	0.32	2.776	**
5 - Eq. (29)	3.447	0.03	3.447	0.03	3.446	Ambos

Nota: e = Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade fornecido via SMC

Analisando os dados apresentados na tabela acima, verifica-se que foi realizada a análise de confiabilidade estrutural de sete funções estado limite e, quanto ao quesito maior eficácia, em relação ao método Monte Carlo, ocorreram dois resultados iguais entre os dois processos de cálculo, um resultado favorável ao método SORM/Tvedt e quatro resultados favoráveis ao índice de confiabilidade parabólico. Portanto, o processo de cálculo desse índice pode, realmente, otimizar os resultados fornecidos pelo método SORM/Tvedt.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), à FAPES, à FAPEMIG e ao CNPq pela colaboração no desenvolvimento desse trabalho.

REFERÊNCIAS

- Breitung, K., 1984. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, v. 110, n. 3, p. 357.
- Cizelj, L., Mavko B. e Riesch-Oppermann, H., 1994. *Application of first and second order reliability methods in the safety assessment of cracked steam generator tubing*, *Nuclear Engineering and Design*, Volume 147, pp 1-10.
- Der Kiureghian, A.; De Stefano, M., 1990. *An efficient algorithm for second-order reliability analysis*. Berkeley: Department of Civil Engineering/ University of California. Report n°. UCB/SEMM – 90/20.
- Lee, S.Y., Castanier, M. P. e Pierre, C., 2005. Assessment of Probabilistic Methods for Mistuned Bladed Disk Vibration, *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, 18 - 21 April, Austin, Texas.
- Madsen, H.O.; Krenk, S.; Lind, N.C., 2006. *Methods of structural safety*. New Jersey: Prentice Hall, Englewoods Cliffs.
- Maes, M.A.; Breitung, K.; Dupuis, D.J., 1993. *Asymptotic importance sampling*. Structural Safety, Amsterdam, v. 12, p.167-186.
- Rojas, K.E., 2008. *Méthodologie d'Analyse de Fiabilité Basée sur des Techniques Heuristiques d'Optimisation et Modèles sans Maillage: Applications aux Systèmes Mécaniques*. Tese de doutorado, INSA de Rouen.
- Tvedt, L., 1990. Distribution of quadratic forms in normal space - application to structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Amsterdam, v. 116, n. 6, p. 1183-1197.
- Wu, Y.T.; Wirsching, P.H., 1987. New algorithm for structural for reliability estimation. *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Amsterdam, v. 113, n. 9, p. 1319-1336.
- Zhao, Y.; Ono, T., 1999. *A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM)*, Structural Safety, Amsterdam, v. 21, p.95-112.