



ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL VIA MÉTODO SORM DG (SECOND ORDER RELIABILITY METHOD BY DIFFERENTIAL GEOMETRY)

Emmanoel Guasti Ferreira^a

Marcílio Sousa da Rocha Freitas^b

egf1@bol.com.br^a - marcilio@em.ufop.br^b

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) - Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, CEP: 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

José Antônio da Rocha Pinto^c

Geraldo Rossoni Sisquini^d

jarpint@hotmail.com^c - geraldo.sisquini@ufes.br^d

Departamento de Matemática (DMAT)^c - Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)^d

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) - Campus Universitário de Maruípe, Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, CEP: 29000-000, Vitória, ES, Brasil

Resumo. O método SORM DG (Second Order Reliability Method by Differential Geometry) é apresentado com o objetivo de realizar a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem, utilizando as superfícies estado limite (funções de falha). Foram analisados seis exemplos de funções de falha, cujos resultados fornecidos para as curvaturas principais, no ponto de projeto (V^*), foram exatos. Além disso, os resultados obtidos para o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha do método FORM (First Order Reliability Method) foram otimizados, pelo método SORM DG/Tvedt DG, em relação aos do método Monte Carlo e/ou aos resultados fornecidos pela literatura. Esses resultados foram comparados, também, em termos de eficiência e eficácia com os fornecidos pelo método SORM (Second Order Reliability Method)/Tvedt, sendo que o método SORM DG/Tvedt DG apresentou resultados, que além de exatos para os valores das curvaturas principais, também foram eficientes e eficazes em termos de análise de confiabilidade.

Palavras-chave. Superfície estado limite, Curvaturas principais, Geometria diferencial, SORM e FORM.

1 INTRODUÇÃO

O novo método proposto, ou seja, o método semianalítico SORM DG (Second Order Reliability Method by Differential Geometry) diferencia-se do método SORM (Second Order Reliability Method) pelo método de cálculo das curvaturas principais, tendo em vista que esse último obtém as curvaturas principais do hiperparabolóide (Tvedt, 1990), no ponto de projeto (V^*), via álgebra linear e o primeiro obtém essas curvaturas da superfície estado limite, através de geometria diferencial, no referido ponto, com base na teoria apresentada em Araújo (1998) e Carmo (2006), utilizando, também, o teorema da função implícita (Spivak, 1995; Lima, 2010). Entretanto, tanto o método SORM/Tvedt quanto o método SORM DG/Tvedt DG utilizam as equações de Breitung/Tvedt para efetuar a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem para componentes.

Através dos resultados fornecidos pelo método FORM (First Order Reliability Method), para a análise de confiabilidade de primeira ordem, o método SORM DG/Tvedt DG efetua a análise de confiabilidade de segunda ordem, sendo o método Monte Carlo e/ou os resultados fornecidos pela literatura utilizados como instrumentos de aferição. Além disso, esse método, também, é comparado em termos de eficiência e eficácia com o método SORM/Tvedt.

2 O MÉTODO SORM DG

Tendo em vista que as superfícies estado limite ou funções de falha são dadas por equações da forma $F(x)=0$, sob certas condições de regularidade (por exemplo:

$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(p) \neq 0$, onde p é o ponto de projeto), pode-se dizer que localmente, na vizinhança de p , essas superfícies são gráficos de funções definidas implicitamente. Nessas condições serão calculadas as curvaturas principais das referidas superfícies.

2.1 Parametrização da superfície $F(x)=0$

Considerando $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1}$ e uma equação $F(x)=0$ onde F é uma função diferenciável com $\partial F / \partial x_{n+1}(p) \neq 0$ e p é o ponto de projeto, de acordo com teorema da função implícita (Spivak, 1995; Lima, 2010), numa vizinhança do ponto $p = (p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})$ a superfície $F(x)=0$ é uma superfície diferenciável e, nessa vizinhança, pode ser obtida através do gráfico de uma função $x_{n+1} = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Ainda em conformidade com o teorema da função implícita

$$\partial x_{n+1} / \partial x_i = \partial g / \partial x_i = g_{x_i} = - \frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial x_{n+1}} \text{ para cada } i=1, \dots, n.$$

Uma parametrização para a superfície nessa vizinhança pode ser dada por:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)] \quad (1)$$

2.2 Obtenção dos vetores tangentes à superfície $F(x)=0$

$$\phi_{x_1} = (1, 0, \dots, 0, g_{x_1}) = \left(1, 0, \dots, 0, -\frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_{n+1}}\right) \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$\phi_{x_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0, g_{x_i}) = \left(0, \dots, 1, \dots, 0, -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial x_{n+1}}\right); 1 < i < n \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$\phi_{x_n} = (0, 0, \dots, 0, 1, g_{x_n}) = \left(0, 0, \dots, 1, -\frac{\partial F / \partial x_n}{\partial F / \partial x_{n+1}}\right) \quad (4)$$

2.3 Obtenção do vetor normal à superfície $F(x)=0$

O vetor normal no ponto p é calculado, fazendo uma extensão na equação apresentada em Carmo (2006) para esse vetor, de acordo com a equação abaixo:

$$\mathbf{N}(p) = \frac{(-g_{x_1}(p), -g_{x_2}(p), \dots, -g_{x_n}(p), 1)}{\sqrt{(g_{x_1}(p))^2 + (g_{x_2}(p))^2 + \dots + (g_{x_n}(p))^2 + 1}} \quad (5)$$

As derivadas parciais do vetor normal são obtidas através das equações abaixo, onde $i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, n$. Como a equação da função g não precisa ser conhecida será aplicado, novamente, o teorema da função implícita, antes, porém, estabelecendo algumas simplificações, quais sejam:

$$N_i = \frac{-g_{x_i}(p)}{\sqrt{(g_{x_1}(p))^2 + (g_{x_2}(p))^2 + \dots + (g_{x_n}(p))^2 + 1}} \quad (6)$$

será a i -ésima coordenada do vetor $\mathbf{N}$;

$$N_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(g_{x_1}(p))^2 + (g_{x_2}(p))^2 + \dots + (g_{x_n}(p))^2 + 1}} \quad (7)$$

será a última coordenada do vetor $\mathbf{N}$;

$$N_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} N_i \quad (8)$$

$$F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (9)$$

$$g_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} g_{x_i} \quad (10)$$

$$F_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} F_{x_i} \quad (11)$$

$$r = g_{x_1}^2 + g_{x_2}^2 + \dots + g_{x_n}^2 + 1 \quad (12)$$

$$c(j) = g_{x_1} \cdot g_{1,j} + g_{x_2} \cdot g_{2,j} + \dots + g_{x_n} \cdot g_{n,j} \quad (13)$$

Com as equações acima, são obtidos os seguintes resultados:

$$g_{i,j} = - \frac{F_{i,j} \cdot (F_{x_{n+1}})^2 + F_{x_1} \cdot F_{n+1,n+1} \cdot F_{x_j}}{F_{x_{n+1}}^3} \quad (14)$$

$$N_{i,j} = - \frac{g_{i,j} \cdot r - g_{x_i} \cdot c(j)}{r^{3/2}} \quad (15)$$

$$N_{n+1,j} = - \frac{c(j)}{r^{3/2}} \quad (16)$$

Portanto, as derivadas parciais do vetor normal à superfície são representadas pela equação abaixo:

$$N_{x_j} = (N_{1,j}, N_{2,j}, \dots, N_{n,j}, N_{n+1,j}) \quad (17)$$

2.4 Obtenção das curvaturas principais da superfície $F(\mathbf{x}) = 0$

Efetuada o cálculo do vetor normal e de suas derivadas parciais N_{x_j} basta escrevê-las como uma combinação linear dos vetores, $\phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}$, do plano tangente, obtendo a matriz do operador linear $-DN_p$, cujos autovalores são as curvaturas principais. Fazendo uma extensão na equação apresentada por Araújo (1998) para o referido operador linear, tem-se:

$$(-DN_p)(\phi_{x_j}) = -N_{x_j} \quad (18)$$

logo:

$$\begin{aligned} -N_{x_1} &= (-N_{1,1}) \cdot \phi_{x_1} + \dots + (-N_{1,n}) \cdot \phi_{x_n} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (19)$$

$$-N_{x_n} = (-N_{n,1}) \cdot \phi_{x_1} + \dots + (-N_{n,n}) \cdot \phi_{x_n}$$

2.5 Orientação do vetor normal à superfície de falha

O método SORM foi elaborado de tal maneira que o vetor gradiente unitário (α^*) ou vetor normal ao hiperplano e à superfície estado limite no ponto de projeto (V^*), fornecido pelo método FORM, seja, também, o vetor normal ao hiperparabolóide nesse ponto. Portanto, o vetor normal (N^*) calculado, nesse ponto, pelo procedimento matemático supramencionado, do qual o método SORM DG se utiliza, deve ter a mesma orientação do vetor α^* , uma vez que, também, é o vetor normal à superfície estado limite no ponto de projeto (V^*). Como os métodos de cálculo são distintos é necessário fazer essa verificação, quanto à orientação, para uma correta utilização das equações de Breitung/Tvedt, através do produto interno entre os referidos vetores. Evidentemente, se o produto interno for positivo eles possuirão a mesma orientação e os sinais das curvaturas principais, calculadas, via geometria diferencial, deverão ser mantidos, caso contrário deverão ser trocados.

2.6 Etapas para aplicação do método SORM DG

- Obter a parametrização na vizinhança do ponto V^* e suas derivadas parciais;
- Calcular o vetor N^* e suas derivadas parciais no ponto V^* ;
- Obter as curvaturas principais através da matriz do operador linear DN no ponto V^* ;
- Realizar o produto interno entre N^* e α^* a fim de verificar a orientação das curvaturas principais da superfície estado limite, que serão aplicadas nas equações de Breitung/Tvedt;
- Efetuar a análise da confiabilidade estrutural de segunda ordem através das equações de Breitung/Tvedt.

3 RESULTADOS

Todos os exemplos foram calculados no ambiente MATLAB R2012b, versão estudantil, cujos programas estão instalados num microcomputador com processador Intel de 2.93 GHz, memória de RAM de 2 Gb e sistema operacional Windows 7 de 32 bits.

3.1 Exemplo 1

Esse exemplo, obtido de Maes et al. (1993), consiste numa função de falha cujo estado limite é representado pela equação:

$$G(U) = 3.5 - X_1 + 0.5 [\cosh(X_2) - 1] \quad (20)$$

onde

$$U = (X_1, X_2). \quad (21)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 1 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 2, 3, 4 e 5.

Tabela 1. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média(u.v.) *	Desvio Padrão(u.v.) *
X_1	Normal Padrão	0	1
X_2	Normal Padrão	0	1

Nota: * u.v. = Unidade da Variável

Tabela 2. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF)

Variável	V^*_i	α^*_i
X_1	3.5000	-1.0000
X_2	0.0000	0.0000

Nota: V^*_i = Coordenadas do ponto de projeto no espaço reduzido

Tabela 3. Curvaturas principais (k_i)

SORM DG	SORM
0.5000	0.5000

Tabela 4. Resultados obtidos na análise de confiabilidade

	FORM (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)	Monte Carlo
i	0	-	-	-	-	-
β	3.500	-	-	-	-	-
pf	2.31×10^{-4}	-	-	-	-	-
pf2	-	1.39×10^{-4}	2.31×10^{-4}	1.39×10^{-4}	2.31×10^{-4}	1.30×10^{-4}
β^{EQ}	-	3.632	3.502	3.632	3.502	3.649
N	-	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.11	0.14	7.82	0.19	11.98

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valores de $\beta=3.500$ ($pf=2.32 \times 10^{-4}$) e $\beta^{EQ} = 3.630$ ($pf2(SORM)=1.40 \times 10^{-4}$), apresentados por Maes et al. (1993), bem como o valor exato da curvatura principal, coincidiram com os resultados fornecidos pelos métodos SORM e SORM DG

Tabela 5. Módulo dos erros relativos (ϵ) referentes ao índice de confiabilidade

	FORM (%)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)
ϵ	4.08	0.47	4.03	0.47	4.03

Nota: Os valores de ϵ foram calculados em relação ao β^{EQ} fornecido via método Monte Carlo

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 4 e 5, destacaram-se, respectivamente, a menor eficiência dos métodos SORM e Monte Carlo e a maior eficácia do SORM DG e SORM.

3.2 Exemplo 2

Nesse exemplo, obtido de Der Kiureghian e De Stefano (1990), é apresentada a superfície de falha de um hiperparabolóide, composta pelo seu índice de confiabilidade β e as suas curvaturas principais k_i , sendo o estado limite representado pela equação:

$$G(\mathbf{U}) = \beta + 0.5 \sum_{i=1}^9 k_i X_i^2 - X_{10} \quad (22)$$

onde $\beta=3$, $k_1=0.30$, $k_2=0.29$, $k_3=0.28$, $k_4=0.27$, $k_5=0.26$, $k_6=0.25$, $k_7=0.24$, $k_8=0.23$ e $k_9=0.22$, de acordo com Der Kiureghian e De Stefano (1990).

$$\mathbf{U} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}). \quad (23)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 6 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 7, 8, 9 e 10 .

Tabela 6. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média (u.v.) *	Desvio Padrão(u.v.) *
X ₁	Normal Padrão	0	1
X ₂	Normal Padrão	0	1
X ₃	Normal Padrão	0	1
X ₄	Normal Padrão	0	1
X ₅	Normal Padrão	0	1
X ₆	Normal Padrão	0	1
X ₇	Normal Padrão	0	1
X ₈	Normal Padrão	0	1
X ₉	Normal Padrão	0	1
X ₁₀	Normal Padrão	0	1

Nota: * u.v. = Unidade da Variável

Tabela 7. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF)

Variável	V^*_i	α^*_i
X_1	0.0000	0.0000
X_2	0.0000	0.0000
X_3	0.0000	0.0000
X_4	0.0000	0.0000
X_5	0.0000	0.0000
X_6	0.0000	0.0000
X_7	0.0000	0.0000
X_8	0.0000	0.0000
X_9	0.0000	0.0000
X_{10}	3.0000	-1.0000

Tabela 8. Curvaturas principais (k_i)

SORM DG	SORM
0.3000	0.3000
0.2900	0.2900
0.2800	0.2800
0.2700	0.2700
0.2600	0.2600
0.2500	0.2500
0.2400	0.2400
0.2300	0.2300
0.2200	0.2200

Tabela 9. Resultados obtidos na análise de confiabilidade

	FORM (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)	Monte Carlo
i	83	-	-	-	-	-
β	3.000	-	-	-	-	-
pf	1.34×10^{-3}	-	-	-	-	-
pf2	-	0.10×10^{-3}	0.09×10^{-3}	0.10×10^{-3}	0.09×10^{-3}	0.06×10^{-3}
β^{EQ}	-	3.716	3.756	3.716	3.756	3.849
N	-	-	-	-	-	10^6
t	0.20	3.29	0.31	0.76	0.42	77926.50

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente, N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=3.000$ ($pf=1.34 \times 10^{-3}$) e os valores das curvaturas principais fornecidas pelo método SORM e SORM DG coincidiram com os valores exatos apresentados por Der Kiureghian e De Stefano (1990)

Tabela 10. Módulo dos erros relativos (ϵ) referentes ao índice de confiabilidade

	FORM (%) (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)
ϵ	22.06	3.46	2.42	3.46	2.42

Nota: Os valores de ϵ foram calculados em relação ao β^{EQ} fornecido via método Monte Carlo

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 9 e 10 destacou-se a menor eficiência do método Monte Carlo e no quesito eficácia o Tvedt DG e o Tvedt apresentaram os mesmos resultados.

3.3 Exemplo 3

Esse exemplo foi analisado por Madsen et al. (2006) e trata-se de um pórtico plano apresentado na Fig. 1.

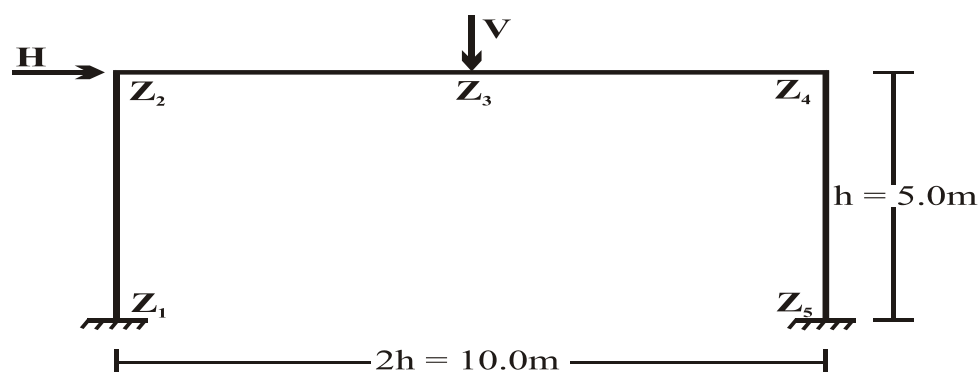


Figura 1. Pórtico plano. Fonte: Madsen et al. (2006)

Através do princípio dos trabalhos virtuais, conforme Madsen et al. (2006), são encontrados três modos de falha nessa estrutura, ilustrados na Fig. 2, considerando que a falha ocorre a partir da formação de rótulas plásticas, que levam a estrutura a um mecanismo de colapso.

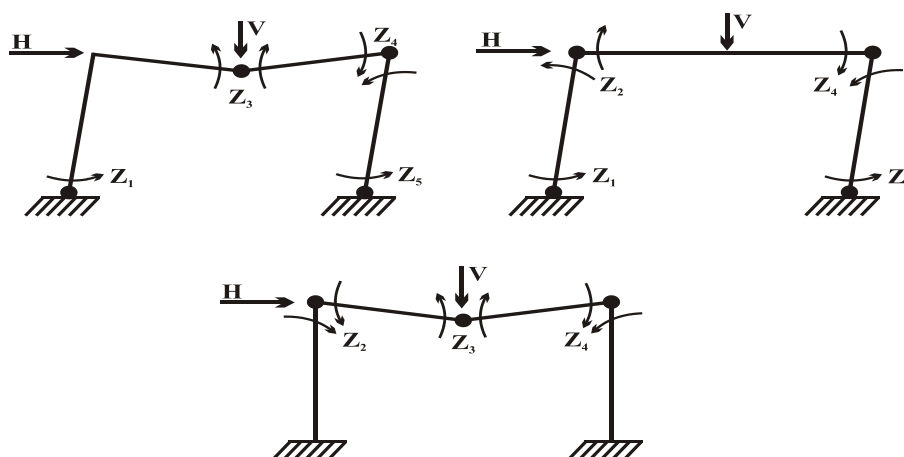


Figura 2. Estrutura de um pórtico plano sujeito a três modos de falha. Fonte: Madsen et al. (2006)

Os modos de falha mostrados na Fig. 2 levam às seguintes funções de performance ou funções de falha:

$$G_1(\mathbf{U}) = Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_5 - H h \quad (24)$$

$$G_2(\mathbf{U}) = Z_1 + 2 Z_3 + 2 Z_4 + Z_5 - H h - V h \quad (25)$$

$$G_3(\mathbf{U}) = Z_2 + 2 Z_3 + Z_4 - V h . \quad (26)$$

A ocorrência de qualquer um dos modos de falha pode levar a estrutura ao colapso, dessa forma a análise da confiabilidade pode ser representada por um sistema em série. No caso em questão, o evento pode ser definido como um sistema, pois é representado por mais de uma função de falha.

Os momentos plásticos resistentes Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 e as cargas H e V são considerados aleatórios na análise da confiabilidade, ou seja

$$\mathbf{U} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, H, V). \quad (27)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) são apresentadas na Tabela 11 e os resultados obtidos nas Tabelas 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 22.

Tabela 11. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão
$Z_1, \dots, Z_5$ (KNm)	Lognormal	134.90	13.49
H (KN)	Lognormal	50.00	15.00
V(KN)	Lognormal	40.00	12.00

Tabela 12. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF) – Eq. (24)

Variável	V^*_i	α^*_i
Z_1	-0.2271	0.0837
Z_2	-0.2271	0.0837
Z_4	-0.2271	0.0837
Z_5	-0.2271	0.0837
H	2.6735	-0.9859

Tabela 13. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF) – Eq. (25)

Variável	V^*_i	α^*_i
Z_1	-0.2209	0.0766
Z_3	-0.4325	0.1500
Z_4	-0.4325	0.1500
Z_5	-0.2209	0.0766
H	2.3931	-0.8302
V	1.4526	-0.5039

Tabela 14. Resultados obtidos via método FORM (HL-RF) – Eq. (26)

Variável	V^*_i	α^*_i
Z_2	-0.2899	0.0843
Z_3	-0.5641	0.1641
Z_4	-0.2899	0.0843
V	3.3660	- 0.9792

Tabela 15. Curvaturas principais (k_i)

SORM DG		
$G_1(U)$	$G_2(U)$	$G_3(U)$
0.0000	-0.1743	0.0000
0.0084	0.0000	0.0084
0.0084	0.0076	0.0124
0.0084	0.0101	-
-	0.0150	-

Tabela 16. Curvaturas principais (k_i)

SORM		
$G_1(U)$	$G_2(U)$	$G_3(U)$
0.0002	-0.2065	0.0004
0.0084	0.0021	0.0084
0.0084	0.0076	0.0124
0.0084	0.0103	-
-	0.0150	-

Tabela 17. Resultados obtidos na análise de confiabilidade – Eq. (24)

	FORM (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)	Monte Carlo
i	5	-	-	-	-	-
β	2.712	-	-	-	-	-
pf	3.33×10^{-3}	-	-	-	-	-
pf2	-	3.22×10^{-3}	3.25×10^{-3}	3.22×10^{-3}	3.24×10^{-3}	3.26×10^{-3}
β^{EQ}	-	2.725	2.722	2.725	2.722	2.721
N	-	-	-	-	-	10^7
t	0.06	0.78	0.30	0.19	0.27	112.35

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=2.710$ (pf(FORM)= 3.36×10^{-3}) e $\beta^{EQ}=2.720$ (pf2(Tvedt (SORM))= 3.22×10^{-3}) de acordo com Madsen et al. (2006)

Tabela 18. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade (ϵ) – Eq. (24)

	FORM (%)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)
ϵ	0.33	0.15	0.04	0.15	0.04

Nota: Os valores de ϵ foram calculados em relação ao β^{EQ} fornecido via método Monte Carlo

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 18 e 19, destacaram-se, respectivamente, a menor eficiência do método Monte Carlo e a maior eficácia do Tvedt DG e do Tvedt.

Tabela 19. Resultados obtidos na análise de confiabilidade – Eq. (25)

	FORM (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)	Monte Carlo
i	18	-	-	-	-	-
β	2.882	-	-	-	-	-
pf	1.96×10^{-3}	-	-	-	-	-
pf2	-	2.65×10^{-3}	2.77×10^{-3}	2.93×10^{-3}	3.09×10^{-3}	2.75×10^{-3}
β^{EQ}	-	2.788	2.774	2.756	2.738	2.776
N	-	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.83	0.27	0.20	0.22	211.80

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=2.880$ ($pf(\text{FORM})=1.99 \times 10^{-3}$) e $\beta^{EQ}=2.790$ ($pf2(\text{Tvedt (SORM)})=2.67 \times 10^{-3}$) de acordo com Madsen et al. (2006)

Tabela 20. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade (ϵ) – Eq. (25)

	FORM (%)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)
ϵ	3.82	0.43	0.07	0.72	1.37

Nota: Os valores de ϵ foram calculados em relação ao β^{EQ} fornecido via método Monte Carlo

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 20 e 21, destacaram-se, respectivamente, a menor eficiência do método Monte Carlo e a maior eficácia do Tvedt DG.

Tabela 21. Resultados obtidos na análise da confiabilidade – Eq. (26)

	FORM (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)	Monte Carlo
i	6	-	-	-	-	-
β	3.437	-	-	-	-	-
pf	2.91×10^{-4}	-	-	-	-	-
pf2	-	2.81×10^{-4}	2.87×10^{-4}	2.81×10^{-4}	2.86×10^{-4}	2.82×10^{-4}
β^{EQ}	-	3.446	3.444	3.447	3.444	3.446
N	-	-	-	-	-	10^7
t	0.00	0.48	0.16	0.11	0.17	21.47

Nota₁: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos

Nota₂: O valor de $\beta=3.440$ ($pf(\text{FORM})=2.91 \times 10^{-4}$) e $\beta^{EQ}=3.450$ ($pf2(\text{Tvedt (SORM)})=2.83 \times 10^{-4}$) de acordo com Madsen et al. (2006)

Tabela 22. Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade (ϵ) – Eq. (26)

(%)	FORM (HL-RF)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM	Tvedt (SORM)
ϵ	0.26	0.00	0.06	0.03	0.06

Nota: Os valores de ϵ foram calculados em relação ao β^{EQ} fornecido via método Monte Carlo

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 21 e 22, destacaram-se, respectivamente, a menor eficiência do método Monte Carlo e a maior eficácia do SORM DG.

3.4 Exemplo 4

O exemplo em tela, obtido de Du (2005), trata de uma viga mista de madeira com módulo de Young E_w , comprimento L e seção transversal com largura A e altura B , que está unida a uma placa de alumínio, com módulo de Young E_a , de forma segura em sua face inferior, cujas dimensões transversais são a largura C e a altura D , conforme ilustrado na Fig. 3. Seis forças externas verticais, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 e P_6 são aplicadas em seis diferentes posições, L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 e L_6 , ao longo da viga como mostrado na figura abaixo.

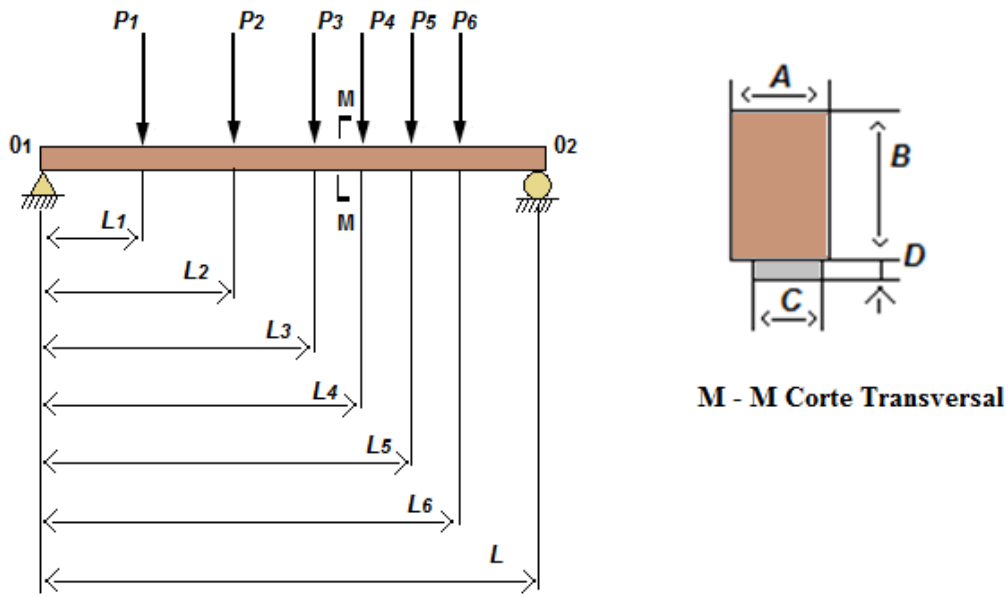


Figura 3. Viga mista. Fonte: Du, 2005

O estado limite é representado através da Eq. (29), sendo que o máximo esforço de tensão σ deve ser inferior ao esforço de tensão admissível S . A probabilidade de falha da viga é calculada conforme a equação abaixo:

$$P_f = P\{G(\mathbf{U}) < 0 = P\{S - \sigma < 0\} \quad (28)$$

onde

$$\sigma = \frac{\left[\frac{\sum_{j=1}^6 P_j (L - L_j)}{L} L_3 - P_1 (L_2 - L_1) - P_2 (L_3 - L_2) \right] \left[\frac{0,5AB^2 + \frac{E_a}{E_w} DC(B + D)}{AB + \frac{E_a}{E_w} DC} \right]}{\frac{1}{12} AB^3 + AB \left\{ \left[\frac{0,5AB^2 + \frac{E_a}{E_w} DC(B + D)}{AB + \frac{E_a}{E_w} DC} \right]^2 - 0,5B \right\} + \frac{1}{12} \frac{E_a}{E_w} CD^3 + \frac{E_a}{E_w} CD \left\{ 0,5D + B - \left[\frac{0,5AB^2 + \frac{E_a}{E_w} DC(B + D)}{AB + \frac{E_a}{E_w} DC} \right]^2 \right\}}$$

$$G(\mathbf{U}) = S - \sigma \quad (29)$$

e

$$\mathbf{U} = (A, B, C, D, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, E_a, E_w, S). \quad (30)$$

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 23 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 24, 25, 26, 27 e 28.

Tabela 23. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão
A	Normal	0100.00 mm	0.200 mm
B	Normal	0200.00 mm	0.200 mm
C	Normal	0080.00 mm	0.200 mm
D	Normal	0020.00 mm	0.200 mm
L ₁	Normal	0200.00 mm	1.000 mm
L ₂	Normal	0400.00 mm	1.000 mm
L ₃	Normal	0600.00 mm	1.000 mm
L ₄	Normal	0800.00 mm	1.000 mm
L ₅	Normal	1000.00 mm	1.000 mm
L ₆	Normal	1200.00 mm	1.000 mm
L	Normal	1400.00 mm	2.000 mm
P ₁	Normal	0015.00 KN	1.500 KN
P ₂	Normal	0015.00 KN	1.500 KN
P ₃	Normal	0015.00 KN	1.500 KN
P ₄	Normal	0015.00 KN	1.500 KN
P ₅	Normal	0015.00 KN	1.500 KN
P ₆	Normal	0015.00 KN	1.500 KN
E _a	Normal	0070.00 GPa	7.000 GPa
E _w	Normal	0008.75 GPa	0.875 GPa
S	Normal	00025.5 MPa	3.825 MPa

Tabela 24. Resultados do método FORM obtidos de Du (2005)

Variável	V^*_i	α^*_i
A	-1.8148×10^{-2}	0.5795×10^{-2}
B	-1.9192×10^{-2}	0.6128×10^{-2}
C	-4.9159×10^{-3}	1.5697×10^{-3}
D	-2.8892×10^{-2}	0.9226×10^{-2}
L ₁	5.5311×10^{-2}	-1.7662×10^{-2}
L ₂	-5.5885×10^{-3}	1.7845×10^{-3}
L ₃	9.2576×10^{-3}	-2.9561×10^{-3}
L ₄	-5.4737×10^{-3}	1.7478×10^{-3}
L ₅	-5.4163×10^{-3}	1.7295×10^{-3}
L ₆	1.9859×10^{-2}	-0.6341×10^{-2}
L	-1.0603×10^{-2}	0.3386×10^{-2}
P ₁	3.2155×10^{-1}	-1.0268×10^{-1}
P ₂	2.1435×10^{-1}	-0.6845×10^{-1}
P ₃	3.2154×10^{-1}	-1.0267×10^{-1}
P ₄	2.1437×10^{-1}	-0.6845×10^{-1}
P ₅	1.0719×10^{-1}	-0.3423×10^{-1}
P ₆	-1.0715×10^{-1}	0.3421×10^{-1}
E _a	-2.0064×10^{-1}	0.6407×10^{-1}
E _w	1.9291×10^{-1}	-0.6160×10^{-1}
S	-3.0669×10^0	0.9793×10^0

Tendo em vista que Du (2005) forneceu os resultados do ponto de projeto, do índice de confiabilidade de primeira ordem, das probabilidades de falha de primeira (FORM) e segunda ordem (SORM), bem como da Simulação Monte Carlo, foram feitos os cálculos para obtenção das curvaturas principais, somente, para o método SORM DG.

Tabela 25. Curvaturas principais (k_i)

SORM DG
-0.01803250
0.00851578
-0.00110086
0.00103458
0.00044265
-0.00043529
0.00022826
-0.00022063
0.00016552
0.00013705
-0.00006528
0.00001212
-0.00001523
0.00000096
-0.00000852
-0.00016817
-0.00013727
0.00014506
-0.00014506

Tabela 26. Resultados obtidos na análise de confiabilidade

	FORM Du (2005)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM/ Tvedt Du (2005)	Monte Carlo Du (2005)
i	-	-	-	-	-
β	3.132	-	-	-	-
pf	8.69×10^{-4}	-	-	-	-
pf2	-	8.83×10^{-4}	8.84×10^{-4}	8.78×10^{-4}	8.87×10^{-4}
β^{EQ}	-	3.125	3.125	3.127	3.124
N	-	-	-	-	10^6
t	NF	131.85	0.07	NF	NF

Nota: i=número de iterações; pf=probabilidade de falha de primeira ordem; pf2=probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente, N=número de amostras; t=tempo de avaliação da função de falha em segundos; NF=não fornecido

Tabela 27. Módulo dos erros relativos (€) referentes ao índice de confiabilidade

	FORM (%) Du (2005)	SORM DG	Tvedt DG (SORM DG)	SORM/ Tvedt Du (2005)
€	0.26	0.03	0.03	0.10

Nota: Os valores de € foram calculados em relação em relação ao β^{EQ} fornecido, por Du (2005), via método Monte Carlo

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 26 e 27, destacou-se a maior eficácia do SORM DG/Tvedt DG.

4 CONCLUSÕES

A tabela abaixo representa a síntese dos melhores resultados obtidos, para o índice de confiabilidade de segunda ordem (β^{EQ}), através dos métodos SORM DG/Tvedt DG e SORM/Tvedt :

Tabela 28. Comparação dos resultados obtidos na análise de confiabilidade estrutural via método SORM DG/Tvedt DG e SORM/Tvedt, quanto à eficácia

EXEMPLO	SORM DG/Tvedt DG*		SORM/Tvedt		MONTE CARLO	Maior Eficácia
	β^{EQ}	€ (%)	β^{EQ}	€ (%)		
1	3.632	0.47	3.632	0.47	3.649	Ambos
2	3.756	2.42	3.756	2.42	3.849	Ambos
3 - Eq. (24)	2.722	0.04	2.722	0.04	2.721	Ambos
3 - Eq. (25)	2.774	0.07	2.756	0.72	2.776	*
3 - Eq. (26)	3.446	0.00	3.447	0.03	3.446	*
4	3.125	0.03	3.127	0.10	3.124	*

Nota: €= Módulo dos erros relativos referentes ao índice de confiabilidade fornecido via método Monte Carlo

Analisando os dados apresentados na tabela acima, verifica-se que foi realizada a análise de confiabilidade estrutural de seis funções estado limite e, quanto ao quesito maior eficácia em relação ao método Monte Carlo, ocorreram três resultados iguais entre os dois métodos e três resultados favoráveis ao método SORM DG/Tvedt DG. Já quanto à eficiência, o método SORM/Tvedt obteve, quase sempre, pequena vantagem sobre o método SORM DG, exceto no exemplo 1, sendo os dois métodos bem mais eficientes que o método Monte Carlo e menos eficientes que o método FORM. Portanto, pelos resultados apresentados, os dois métodos SORM possuem eficiências que podem ser consideradas próximas para situações práticas.

Através dos resultados, que foram obtidos nesse artigo, foi demonstrado que o procedimento matemático, via geometria diferencial, forneceu resultados exatos para o cálculo das curvaturas principais e o método semianalítico SORM DG, que utiliza esse

procedimento, para obtenção dessas curvaturas, efetuou a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem para componentes, geralmente, com melhor eficácia, que o método SORM, e eficiência relativamente próxima dos valores fornecidos por esse último. Além disso, demonstrou maior eficiência que o método Monte Carlo.

Vale ressaltar que apesar dos resultados favoráveis fornecidos pelo método SORM DG/Tvedt DG na análise de confiabilidade estrutural, não se pode afirmar que, quase sempre, ele terá maior eficácia que o método SORM/Tvedt, pois isso vai depender da função estado limite que será avaliada. Também ficou comprovado que o método SORM DG/Tvedt DG efetuou a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem para componentes com eficácia, otimizando de maneira relevante os resultados fornecidos pelo método FORM e demonstrando ser bem mais eficiente que o método Monte Carlo, fornecendo contribuições para a área de confiabilidade, quais sejam:

- A generalização e a síntese do cálculo das curvaturas principais de qualquer superfície orientável, através das Eq. (14), (15) e (16), não encontradas na literatura;
- O procedimento matemático, via geometria diferencial, que pode ser aplicado à qualquer outro método que necessite da obtenção das curvaturas principais, tendo em vista que calcula essas curvaturas com exatidão;
- A alternativa de utilização desse novo método de análise de confiabilidade de segunda ordem.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), à FAPES, à FAPEMIG e ao CNPq pela colaboração no desenvolvimento desse trabalho.

REFERÊNCIAS

- Araújo, P.V., 1998. *Geometria diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária).
- Carmo, M.P., 2006. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: SBM.
- Der Kiureghian, A.; De Stefano, M., 1990. *An efficient algorithm for second-order reliability analysis*. Berkeley: Department of Civil Engineering/ University of California. Report n°. UCB/SEMM – 90/20.
- Du, X., 2005. *Probabilistic engineering design*. Rolla: University of Missouri.
- Lima, E. L., 2010. *Análise no espaço R^n* . 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária).
- Madsen, H.O.; Krenk, S.; Lind, N.C., 2006. *Methods of structural safety*. New Jersey: Prentice Hall, Englewoods Cliffs.
- Maes, M.A.; Breitung, K.; Dupuis, D.J., 1993. *Asymptotic importance sampling*. Structural Safety, Amsterdam, v. 12, p.167-186.
- Spivak, M., 1995. *Calculus on manifolds*. Waltham: Addison-Wesley.

Tvedt, L., 1990. Distribution of quadratic forms in normal space - application to structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Amsterdam, v. 116, n. 6, p. 1183-119.