



SISTEMA GRÁFICO INTERATIVO PARA ANÁLISE DE NUCLEAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

Leandro Lopes da Silva

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Samuel Silva Penna

Felício Bruzzi Barros

Gabriel Neves Alves Ferreira

leandro.silva_engenhariacivil@yahoo.com.br, roque@dees.ufmg.br, spenna@dees.ufmg.br,
felicio@dees.ufmg.br, gabriel.gnaf@gmail.com

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

Avenida Antônio Carlos 6627, Pampulha, CEP. 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo. Este artigo apresenta um sistema gráfico interativo que integra pré-processador, modelos constitutivos, solucionadores de equações não lineares e pós-processador, para análise de nucleação e propagação de trincas em meios bidimensionais. A análise fisicamente não linear se inicia empregando-se o Método dos Elementos Finitos Padrão (MEF), sendo o fenômeno de nucleação avaliado através de métodos constitutivos baseados em degradação elástica, permitindo-se adotar modelos de fissuras distribuídas, com direção fixa ou rotacional, ou diferentes modelos de dano isotrópico propostos por diversos autores. A propagação de trincas é avaliada através de método cinemático que incorpora as descontinuidades por meio de interpolações enriquecidas, com base no Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Esta combinação de métodos constitutivo e cinemático apresenta a vantagem da não necessidade de definição prévia do caminho da trinca ou de redefinição da malha durante o processamento. Após a elaboração do modelo, o usuário deve escolher o solucionador de equação não linear dentre os disponíveis e informar os parâmetros relacionados. Ao final da análise, os resultados podem ser visualizados no pós-processador. As implementações foram realizadas na plataforma INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment).

Palavras-chave: Sistema gráfico interativo, Nucleação e propagação de trincas, Método constitutivo, Método cinemático, Método dos Elementos Finitos Generalizados

1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta o estágio atual de um sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas em meios bidimensionais parcialmente frágeis. Considerando os conceitos das mecânicas do dano e da fratura, tal análise pode ser processada em três estágios, a saber: degradação do meio, nucleação de fissuras e propagação de trincas.

O fenômeno de degradação pode ser analisado por meio de métodos constitutivos. Estes métodos consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo, mas que as propriedades do material em estudo se modificam nas regiões submetidas a esforços superiores a determinados parâmetros de resistência. Esta abordagem permite modelar a deterioração do meio, sem a consideração da existência de trincas discretas. A continuação do processo de análise, no entanto, pode implicar numa degradação do meio cuja intensidade justifique, visando tornar a análise mais realista, a introdução de descontinuidades em sua geometria (formação de trincas discretas), em lugar de, conforme inicialmente, somente uma degradação distribuída. Este estágio limiar é dito nucleação de fissuras e deve ser avaliado a partir da definição de uma medida que envolva as grandezas do método constitutivo adotado. Também é desejável que tal medida seja comum a qualquer método constitutivo, ou seja, que a medida seja independente de peculiaridades de um método constitutivo particular.

As descontinuidades podem ser consideradas no decorrer da análise através de métodos numéricos de representação geométrica, que requerem a definição prévia do caminho da trinca ou a redefinição da malha, bem como podem ser consideradas através de métodos numéricos de representação não-geométrica, nos quais os efeitos da presença das trincas nos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões são embutidos nos elementos, o que requer a reformulação de suas funções de aproximação. A aludida reformulação pode ser feita por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), um método que permite o enriquecimento das funções de partição da unidade de tal maneira que as descontinuidades passam a ser incorporadas nas interpolações.

Uma análise com as características acima descritas é dita análise fisicamente não linear, com a qual é possível simular o comportamento da estrutura de forma mais realista. Porém, tal análise só é possível com o uso de recursos computacionais adequados.

O sistema computacional INSANE (*Interactive Structural ANalysis Environment*) é fruto de um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais e disponível em <http://www.insane.dees.ufmg.br>. Este sistema dispõe de diversos recursos para análise fisicamente não linear e pôde ser aperfeiçoado para a análise aqui proposta, por ser um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade. Para tal aperfeiçoamento, foram necessárias adaptações no núcleo numérico do sistema. Porém, para uma interação mais amigável com o usuário, um pré-processador gráfico interativo com recursos condizentes com a análise aqui proposta também foi desenvolvido, propiciando um sistema gráfico integrado.

Este artigo é organizado em 9 seções, incluindo esta introdução. Na seção 2, os recursos empregados nas Aplicações Gráficas Interativas do Sistema INSANE são abordados, destacando-se Padrões de Projeto de Software (subseção 2.1), Estrutura de Dados para Subdivisões Planares (subseção 2.2) e Técnicas de Geração de Malhas (subseção 2.3). Processos Incrementais-Iterativos já implementados no sistema INSANE, necessários em análises física-

mente não lineares, são apresentados na seção 3. A Metodologia de Integração do Sistema Gráfico é apresentada na seção 4, ao passo que o Sistema Gráfico Integrado é apresentado na seção 5. A seção 6 apresenta uma classificação dos Modelos Numéricos para Fissuração, com enfoque aos Métodos Constitutivos (subseção 6.1) e ao Método dos Elementos Finitos Generalizados - Um Método Cinemático (subseção 6.2). Na seção 7, apresenta-se como medida de Nucleação de Fissuras a singularidade do Tensor Acústico. Na seção 8, ilustra-se o uso do sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas em meios bidimensionais, através da simulação de um estudo de caso clássico. As considerações finais são apresentadas na seção 9.

2 APLICAÇÕES GRÁFICAS INTERATIVAS DO SISTEMA INSANE

O processo de desenvolvimento de software orientado a objetos, empregado no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), compreende três fases principais, conforme Gonçalves (2004). Inicialmente, na fase de análise, procura-se enfatizar a descoberta e descrição dos objetos - ou conceitos - do domínio do problema. Em seguida, na fase de projeto, procura-se definir os elementos lógicos de software, seus atributos e métodos. Finalmente, durante a fase de construção, os componentes do projeto são implementados usando a linguagem de programação Java e suas APIs (*Application Program Interface*). Para as aplicações gráficas interativas do INSANE, os seguintes recursos foram utilizados.

2.1 Padrões de projeto de software

Segundo Gonçalves (2004), padrões de projeto podem ser definidos como a estrutura básica de um projeto de software bem-sucedido, capaz de fornecer um esquema para os subsistemas ou componentes de um sistema de software a ser projetado. Esse esquema deve ser específico para resolver o problema em questão e suficientemente genérico para atender a futuros problemas e requisitos. A utilização de padrões de projeto propicia evitar ou minimizar o reprojeito.

Conforme Penna (2007), o sistema INSANE apresenta uma arquitetura em camadas baseada na combinação de três padrões de projeto de software: o padrão *Model-View-Controller* (MVC), que permite a independência entre as camadas modelo e vista; o padrão *Observer* que, através de um mecanismo de propagação de mudanças, permite a sincronização do modelo com os diversos pares “vista-controlador”; e o padrão *Command* que encapsula as ações do programa em classes separadas de forma organizada. Esta segmentação favorece a expansão do programa e a criação de novos comandos. Figura 1 ilustra a combinação desses padrões.

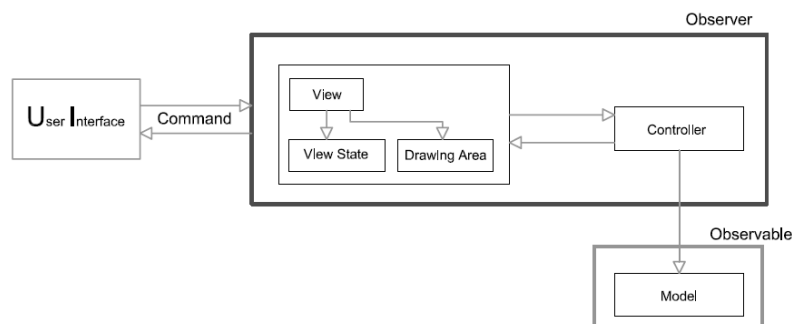


Figura 1: Arquitetura das aplicações gráficas do INSANE (Penna, 2007)

2.2 Estrutura de dados

O desenvolvimento de modelos geométricos requer o armazenamento de dados, que possibilite a manipulação de construções e operações geométricas, de forma estruturada e acessível. Tendo isto em vista, são usadas estruturas de adjacências no tratamento de modelos computacionais.

O objeto modelo mostrado anteriormente (Fig. 1) consiste em uma estrutura de dados capaz de armazenar as entidades topológicas do modelo em análise de forma organizada, possibilitando um rápido acesso a estes dados posteriormente.

A estrutura de dados para subdivisões planares empregada nas aplicações gráficas no sistema INSANE é a estrutura de semi-arestas ou “half-edge”. Consiste em um aprimoramento da estrutura de “arestas-aladas”, diferenciando-se pela sua organização topológica. A principal alteração é a transformação de uma aresta em duas semi-arestas.

Conforme Mäntylä (1987), esta estrutura de dados se desenvolve em uma hierarquia, composta por cinco níveis diferentes, sendo eles o **Sólido**, a **Face**, o **Loop**, a **Semi-Aresta** e o **Vértice**.

A estrutura de adjacência assim representada não faz conexão entre as faces com a finalidade de compor o modelo geométrico. Para tanto, Del Savio et al. (2004) adicionaram um nível intermediário. Este nível é a **Aresta**, que possui uma referência para **Semi-Aresta**, uma vez que a aresta é composta por duas semi-arestas, uma à esquerda e uma à direita, incidentes nos mesmos vértices. As arestas também ficam armazenadas em uma lista duplamente encadeada. Com esta alteração, o **Sólido** passa a ter uma referência para **Aresta** e **Vértice**, e a **Semi-Aresta** uma referência para a sua respectiva aresta. Esta estrutura hierárquica está ilustrada na Fig. 2.

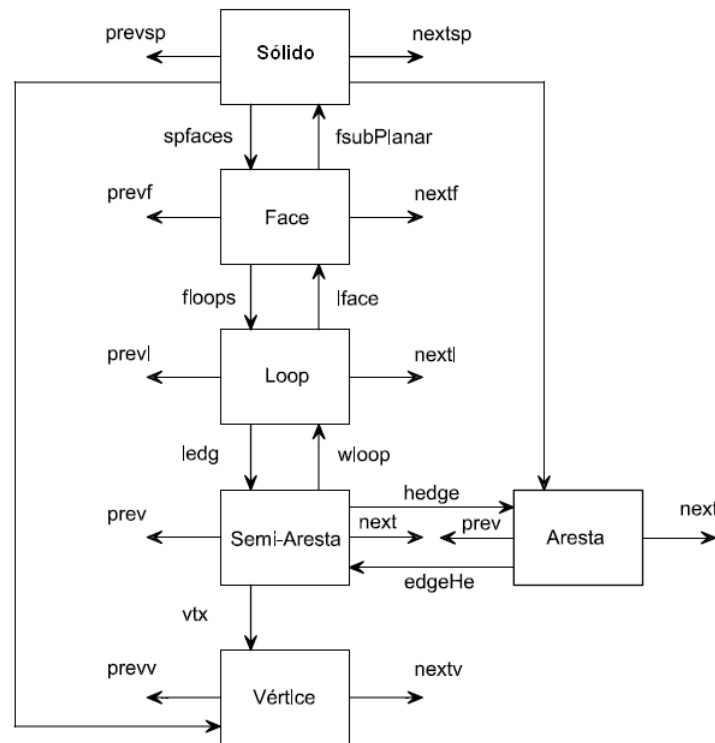


Figura 2: Estrutura de dados de Semi-Arestas (Del Savio et al., 2004)

2.3 Geração de malhas

Os métodos de geração de malhas em domínios bidimensionais podem ser classificados em diretos ou algébricos e indiretos ou de equações diferenciais (Fonseca, 1989). Os métodos diretos ou algébricos são assim chamados porque geram uma malha sobre o domínio, baseados em algum algoritmo algébrico definido. Os métodos diretos podem ser subdivididos em geração de malhas em domínios elementares, geração de malhas por transformação de coordenadas, mapeamentos conformes, mapeamentos isoparamétricos, mapeamentos transfinitos e decomposição de domínio.

O mapeamento transfinito estabelece sistemas de coordenadas curvilíneas definidos pelo contorno de domínios arbitrários. Este método descreve uma superfície aproximada que coincide com a superfície real ou idealizada em um número não enumerável de pontos, propriedade que deu origem ao nome mapeamento transfinito. É capaz de modelar o contorno de superfícies sem a introdução de nenhum erro na geometria do mesmo (Gonçalves, 2004).

Os métodos de decomposição de domínio são baseados em técnicas de decomposição espacial, como árvore quartenária (*quadtree*), avanço de fronteira e o método de *Delaunay*, que é uma alternativa relevante nos casos de domínios com formas muito complexas e em casos onde se deseja variar drasticamente a densidade de elementos ao longo do domínio

A versão atual do gerador de malhas do INSANE permite o emprego de Mapeamento Transfinito (Fonseca, 1989), Geração Nodal Aleatória (Ho-Le, 1988), Malha Assimétrica Concentrada e Malha com base em Grade (Ho-Le, 1988).

3 PROCESSOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS

Em uma análise não linear, confronta-se com o problema de resolver o sistema com $N + 1$ incógnitas, sendo N deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga, e $N + 1$ equações, sendo N equações de equilíbrio e uma equação de restrição. Para obter a solução desse sistema é necessário utilizar um processo incremental-iterativo (Fuina, 2009).

O método de Newton-Raphson Padrão, um dos processos incrementais-iterativos implementados no sistema INSANE de acordo com o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990), pressupõe que a matriz de rigidez tangente é recalculada a cada iteração. Neste caso, a equação de equilíbrio incremental Eq. (1) correspondente a iteração j do passo i pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (1)$$

onde,

$[K]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\{U\}_{j-1}^i$;

$\{\delta U\}_j^i$ é o vetor deslocamentos incrementais da iteração j do passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i ;

$\{P\}$ é o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ do passo i .

Um valor para o incremento do fator de carga, $\delta\lambda_j$, é estabelecido em função do parâmetro de controle, podendo-se obter $\{\delta U\}_j$ em função das parcelas associadas à carga de referência $\{\delta U\}_j^P$ e à carga residual $\{\delta U\}_j^Q$.

Essa formulação é bastante genérica e se aplica a vários métodos de controle, bastando que se redefina a equação de restrição. Em Fuina (2009) encontram-se formulações, como implementadas no sistema INSANE, para obtenção dos parâmetros de carga segundo os métodos de controle de carga, de deslocamento direto (Batoz e Dhat, 1979), de comprimento de arco (Crisfield, 1983), de deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990), por trabalho (Yang e McGuire, 1985) e de resíduo ortogonal (Krenk, 1995).

4 METODOLOGIA DE INTEGRAÇÃO DO SISTEMA GRÁFICO

A entrada de dados no sistema INSANE era realizada exclusivamente através de um arquivo texto escrito em Linguagem de Marcação eXtensível (XML), conforme regras previamente definidas. O desenvolvimento do pré-processador propiciou um ambiente gráfico integrado com as outras duas grandes aplicações do sistema: processador, a aplicação que representa o núcleo numérico do sistema e é o responsável pela obtenção dos resultados de diferentes modelos discretos de análise estrutural; e o pós-processador, uma aplicação gráfica interativa que disponibiliza ferramentas de visualização de resultados de diferentes modelos discretos.

Consistentemente com a arquitetura básica do INSANE (Fig. 1), o pré-processador também utiliza uma combinação dos padrões de projeto *MVC*, *Command* e *Observer*. Esta combinação está mostrada na Fig. 3, que é um detalhamento da Fig. 1, para o caso do pré-processador. Como pode ser visto na Fig. 3, vários pares vista-controlador observam o modelo do pré-processador (*Model*). Destaca-se que o núcleo numérico abastece e especializa a interface em função do tipo de análise através de uma classe responsável por intermediar a comunicação da aplicação gráfica com o núcleo numérico, denotada de forma abstrata por *Combinable*.

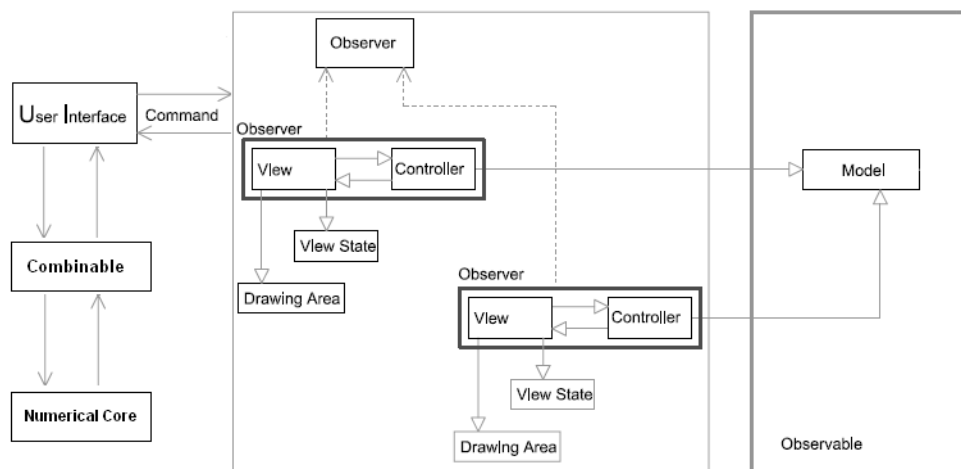


Figura 3: MVC-Observer (Adaptado de Penna (2007))

Para integração do sistema, fez-se necessário estabelecer a comunicação entre suas aplicações. A Estrutura de Dados, seção 2.2, é responsável pelo armazenamento das entidades topológicas, o que permite a comunicação entre os módulos do pré-processador. É também usada pela classe *Combinable* para criação do modelo de elementos finitos, incluindo os dados da solução, adequando as entradas gráficas aos objetos de compreensão do núcleo numérico e perfazendo a comunicação do pré-processador com o processador. A classe *Combinable* é também responsável pelo armazenamento das demais informações da análise, tais como modelo constitutivo, lei material e seus parâmetros, propriedades das seções transversais e carregamentos.

A integração do pós-processador a este ambiente é possível a partir da escrita em Linguagem de Marcação eXtensível (XML) dos resultados de todas as etapas do processamento. A leitura de tais arquivos XML permite o preenchimento da estrutura de dados (tipo “*half-edge*”) do Pós-Processador.

5 SISTEMA GRÁFICO INTEGRADO

Seguindo a metodologia descrita na seção 4, a entrada de dados no sistema INSANE foi aperfeiçoada. Primeiramente, fez-se as correções e adaptações necessárias para permitir análise de problemas bidimensionais estáticos lineares, pelo Método dos Elementos Finitos. Na sequência, adaptou-se o pré-processador com as inclusões de recursos e comandos necessários para análise estática fisicamente não linear, pelo Método dos Elementos Finitos, de problemas bidimensionais, empregando-se métodos constitutivos.

O pré-processador gráfico foi dividido em três módulos, a saber: Módulo *Geometria*, onde desenha-se a geometria da estrutura em análise; Módulo *Malha*, onde a estrutura em análise é discretizada através de mapeamento da fronteira, aproveitando-se do trabalho de Gonçalves (2004), ou através da técnica de decomposição de domínio; e o Módulo *Atributos*, onde define-se o modelo constitutivo a se adotar na análise, assim como leis materiais e de evolução de dano, se for o caso, propriedades dos materiais e das seções transversais e condições de contorno. Através do Módulo *Atributos*, acionando o comando *Processar*, define-se também os parâmetros a se adotar na solução do problema, tal como apresentado na seção 3. Por fim, o modelo do MEF e os dados da solução são enviados ao núcleo numérico para processamento da análise, cujos resultados podem ser carregados para o pós-processador.

A divisão do pré-processador em módulos permite, por exemplo, a definição de várias malhas diferentes para um mesmo modelo geométrico. Além disso, permite que o modelo já discretizado seja analisado com diferentes tipos de elementos finitos. Já a definição do modelo constitutivo no Módulo *Atributos* permite que o modelo, já discretizado e com propriedades geométricas e condições de contorno estabelecidas, seja avaliado várias vezes simplesmente alterando o modelo constitutivo e as leis materiais e de evolução de dano, se for o caso, e seus parâmetros, conferindo praticidade nas análises. A cada processamento uma nova pasta *Processing-XX* é criada no diretório definido no início do programa para armazenamento de arquivos de entrada e saída daquele processamento, possibilitando posterior recuperação das informações.

6 MODELOS NUMÉRICOS PARA FISSURAÇÃO

Ingraffea e Wawrzynek (2004) apresentam uma classificação dos principais métodos numéricos usados em diversas aplicações da Mecânica da Fratura nas últimas décadas. Nessa classificação, os autores preocupam-se em dividir os diversos métodos numéricos em dois grupos principais, que se distinguem pela maneira como representam a propagação da fissuração. O primeiro grupo representa a propagação da fissuração de forma geométrica e o segundo de forma não geométrica. Assim, nos modelos numéricos do primeiro grupo, a fissura é uma entidade geométrica inserida na geometria do modelo e tanto a geometria do modelo quanto a discretização do mesmo, se necessário, mudam conforme a propagação da fissuração. Já no segundo grupo, os modelos numéricos representam a propagação da fissuração dentro do modelo constitutivo do material ou através de um modelo cinemático, no qual a fissura é representada através de saltos ou descontinuidades no campo de deslocamentos e/ou deformações. Assim, nesse segundo grupo, nem a geometria do modelo nem sua discretização contêm a fissura ou precisam sofrer alterações durante a propagação da mesma (Wolff, 2010).

Figura 4, adaptada de Ingraffea e Wawrzynek (2004), apresenta de forma simplificada a classificação dos métodos numéricos (baseados no Método dos Elementos Finitos), de acordo com a forma de representação da propagação da fissuração.

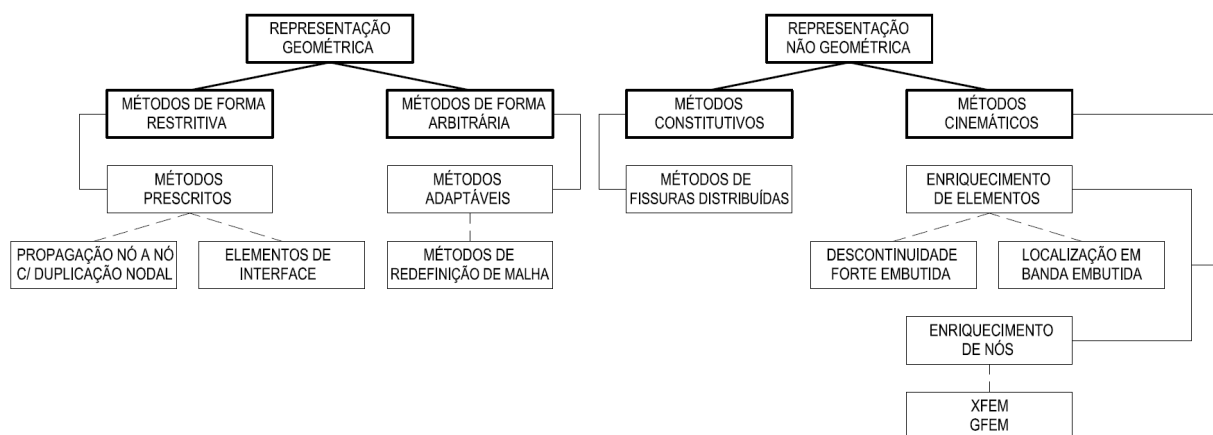


Figura 4: Classificação de métodos para modelagem da fissuração (Ingraffea e Wawrzynek, 2004)

Conforme Wolff (2010), os modelos pertencentes aos métodos de representação não geométrica podem ser divididos em dois grupos principais: os modelos numéricos que representam a fissuração no modelo constitutivo e os modelos numéricos que representam a propagação da fissura através dos campos cinemáticos.

No primeiro caso, a rigidez do material em estudo sofre uma degradação na região fissurada, de forma a simular a descontinuidade do campo de deslocamentos provocada pela fissuração. No segundo caso, o efeito da fissuração nos campos de deslocamentos e deformações é embutido dentro dos elementos, seja nas funções de aproximação dos elementos, de forma local, ou seja nos nós dos elementos, de forma global. O principal objetivo desses métodos é evitar o uso de redefinição de malha, e, nos dois grupos de modelos, tanto nos constitutivos quanto nos cinemáticos, a fissuração é simulada sem a necessidade de alterações na geometria e na topologia da malha (Ingraffea e Wawrzynek, 2004).

6.1 Métodos Constitutivos

Vários são os modelos propostos para consideração de deterioração distribuída, aplicáveis a materiais parcialmente frágeis, destacando-se aqui os Modelos de Fissuras Distribuídas e os de Dano. Nesses modelos, o material é idealizado como um meio contínuo, com degradação devida ao processo de fissuração.

De um modo geral, os Modelos de Fissuras Distribuídas consideram que a região fissurada é formada por um conjunto de pequenas fissuras paralelas entre si. Assim, uma região fissurada seria representada por um conjunto de elementos finitos com comportamento ortotrópico. Ou seja, posicionando-se o sistema local do tensor constitutivo desses elementos nas direções perpendicular e paralela ao plano de fissuração, pode-se adotar valores diferentes para o módulo de elasticidade dessas direções, caracterizando-se, assim, um elemento finito ortotrópico (Pitangueira, 1998). Logo, usando-se um tensor constitutivo ortotrópico, a rigidez dos elementos da região fissurada representa uma deterioração gradual, e o efeito da fissuração é reproduzido numericamente sem a necessidade de modificações na malha (Wolff, 2010). A degradação gradual é monitorada pelas relações entre tensões e deformações, sendo os limites de resistência do material e os parâmetros da mecânica da fratura usados na formulação (Pitangueira, 1998).

Os modelos de fissuração distribuída podem ser classificados em duas categorias, segundo Rots (1988): modelo de direção de fissuração fixa ou rotacional. O modelo com direção fixa considera que, uma vez iniciada, a fissura tem orientação fixa durante todo o processo de propagação. Já o modelo com direção rotacional admite que as fissuras podem rotacionar de acordo com a orientação das deformações principais.

Nos modelos de dano, segundo Murakami (2012), no caso da distribuição aleatória dos microvazios ou da distribuição isotrópica dos vazios esféricos, o estado de dano é considerado como sendo isotrópico e pode ser representado por meio de uma variável de dano escalar. Por outro lado, quando os microvazios possuem geometria ou configuração orientada, o estado de dano é anisotrópico e a variável de dano escalar não pode ser aplicada com precisão, empregando-se variáveis de dano tensoriais, a menos que a densidade de vazios seja pequena (Lemaitre, 1992). Carol et al. (1994) apresentam uma teoria unificada de degradação elástica e dano com base em superfície de carregamento, cuja formulação é desenvolvida em torno da hipótese de uma única função de carregamento. Usando essa teoria, os modelos de dano escalares mais importantes encontrados na literatura da época foram reinterpretados e reformulados.

Um arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica foi desenvolvido por Penna (2011) no sistema INSANE. Vários modelos clássicos para tratar a degradação do meio material foram abordados no contexto desta estrutura e implementados neste arcabouço. Dentre eles, alguns modelos de dano e um modelo de plasticidade. Os modelos de fissuração distribuída foram reformulados, considerando-se múltiplas funções de carregamento desacopladas e uma regra de degradação generalizada, adaptando-os à estrutura desenvolvida. Um novo modelo de dano com múltiplas funções de carregamento foi desenvolvido e também é parte integrante deste arcabouço. Destacam-se: Modelo Elastoplástico com Critério de Escoamento de von Mises; Modelos de Dano Isotrópico de Mazars (1984), de Mazars e Lemaitre (1984), de Simo e Ju (1987), de Ju (1989), de Lemaitre e Chaboche (1990) e de de Vree et al. (1995); Modelos de Fissuras Distribuídas, com Direção Fixa ou Rotacional; Modelo de Dano Distribuído por de Borst e Gutierrez (1999); Modelo de Dano Volumétrico por Penna (2011).

6.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados - Um Método Cinemático

O Método dos Elementos Finitos Generalizados - MEFG (Strouboulis et al., 2000), método numérico de representação não geométrica cinemático segundo classificação proposta por Ingraffea e Wawrzynek (2004) (Fig. 4), é de interesse deste estudo, pois, adotou-se para análise de propagação de trincas, permitindo com que os efeitos das descontinuidades nos campos de deslocamentos e de deformações fossem embutidos nas funções interpoladoras enriquecidas.

O MEFG pode ser entendido como uma variação do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional. A estratégia utilizada no MEFG consiste em empregar as funções do tipo Partição da Unidade (PU) que enriquecidas definem as funções de forma. A escolha das funções de PU depende do tipo de problema a ser analisado (Barros, 2002; Alves, 2012).

O emprego das funções convencionais de MEF (por exemplo, as funções lagrangianas) como funções de PU, além de facilitar a aplicação do método, garante estabilidade ao problema analisado, verificando diretamente as condições de contorno (Alves, 2012).

Para compreender melhor o método, considera-se uma malha convencional de elementos finitos definida a partir de um conjunto de n pontos nodais $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$, conforme pode ser visto na Fig. 5(a), para o caso de domínio bidimensional. Define-se então a região ou nuvem ϖ_j , formada por todos os elementos que concorrem no ponto nodal $\mathbf{x}_j$.

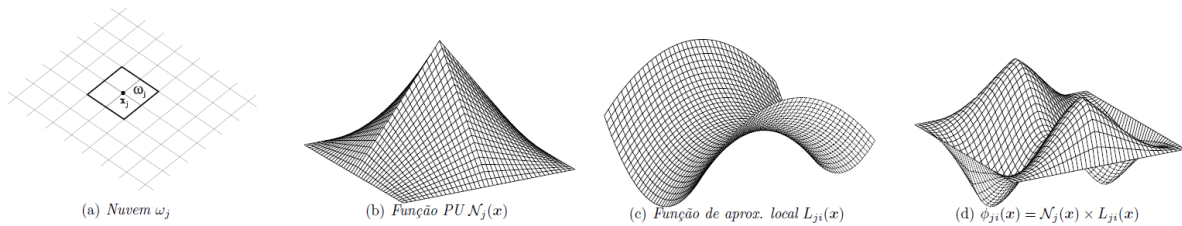


Figura 5: Estratégia de enriquecimento da nuvem ϖ_j (Barros, 2002)

O conjunto das funções interpoladoras de Lagrange associadas ao nó $\mathbf{x}_j$, obtidas através do Método dos Elementos Finitos (MEF) define a função $N_j(\mathbf{x})$, cujo suporte corresponde à região ϖ_j , conforme pode ser visto na Fig. 5(b). Já um conjunto de funções de enriquecimento, que são denominadas *funções de aproximação local* (Alves, 2012) e podem ser específicas para um determinado tipo de problema (Fig. 5(c)), é composto por q_j funções linearmente independentes definidas para cada nó $\mathbf{x}_j$ com suporte na nuvem ϖ_j , conforme Eq. (2):

$$I_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$

Ao final do processo, as funções de forma $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, mostradas na Fig. 5(d), estão atreladas ao nó $\mathbf{x}_j$ e são construídas por meio do enriquecimento das funções PU, correspondentes à nuvem ϖ_j , como mostrado na Fig. 5(a), pelos componentes do conjunto I_j , da Eq. (2). Assim, $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ pode ser facilmente obtida através do produto das funções básicas que formam a PU (Fig. 5(b)), obtidas através do MEF convencional, pelas funções de enriquecimento, representadas na Fig. 5(c), conforme Eq. (3).

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^q = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (3)$$

sem somatório em j .

As funções do conjunto Eq. (2) podem ser polinomiais ou não, sendo selecionadas conforme o tipo de problema que se está analisando (Alves, 2012). Uma aproximação genérica $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ é, dessa maneira, obtida pela seguinte combinação linear das funções de forma (Eq. (4)):

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^q L_{ji}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{ji} \right\} \quad (4)$$

onde $\mathbf{u}_j$ e $\mathbf{b}_{ji}$ são parâmetros nodais associados com cada componente $N_j(\mathbf{x})$ e $N_j(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$, respectivamente.

Como resultado final do processo, obtém-se a função produto que apresenta as características aproximadoras da *função de aproximação local*, ao mesmo tempo que herda o suporte compacto da PU (Alves, 2012).

A utilização deste método proporciona o emprego das funções do MEF para a PU, bem como potencializa a análise de problemas em que o enriquecimento com funções especiais (com função degrau, por exemplo) apresenta significativa vantagem (Barros, 2002).

Como uma função degrau clássica, destaca-se a função de Heaviside. Diferentes definições foram adotadas para a função de Heaviside ao longo dos anos (Mohammadi, 2008). O primeiro tipo de função de Heaviside $H(\xi)$ pode ser definido como:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Logo, adotando a função de Heaviside como função de enriquecimento do MEEG, é possível descrever o campo de deslocamento decomposto em duas partes, uma contínua e uma descontínua (Wolff, 2010), permitindo-se simular a presença de descontinuidades na malha. Conforme Mohammadi (2008), Eq. (4) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m N_k(\mathbf{x}) H(\xi) \mathbf{b}_k \quad (6)$$

onde $\mathbf{u}_j$ são os graus de liberdade convencionais do MEF, $\mathbf{b}_k$ são os graus de liberdade adicionais e $H(\xi)$ é a função de enriquecimento descontínua.

Segundo Wolff (2010), de fato, os graus de liberdade convencionais $\mathbf{u}_j$ representam a parte contínua, enquanto os graus de liberdade adicionais $\mathbf{b}_k$ representam o salto no deslocamento ao longo da descontinuidade.

7 NUCLEAÇÃO DE FISSURAS - TENSOR ACÚSTICO

Uma importante questão quanto à definição de uma medida de nucleação de fissuras é a possibilidade de obtenção desta medida independentemente do modelo constitutivo adotado.

Segundo Klein e Gao (1998), o fenômeno de localização de deformações pode ser avaliado para indicar o surgimento de descontinuidades. Conforme Jirásek (2007), a partir do *tensor de localização*, tal como apresentado na Eq. (7), é possível avaliar a ocorrência deste fenômeno.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \quad (7)$$

onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário normal a uma dada superfície e $\mathbf{D}$ é o tensor constitutivo tangente.

Do ponto de vista matemático, a singularidade do *tensor de localização* indica a chamada perda de elipticidade, característica que fornece a condição clássica de localização de deformações (Jirásek, 2007) (Eq. (8)).

$$\det \mathbf{Q} = 0 \quad (8)$$

Portanto, a análise de localização de deformações consiste na busca de um vetor unitário $\mathbf{n}$ para que o *tensor de localização* se torne singular. Se tal vetor não existir, o campo de deslocamento deve permanecer contínuo. A singularidade do *tensor de localização* para um determinado vetor $\mathbf{n}$ indica que um salto no campo de deslocamento pode se desenvolver através de uma superfície definida pelo vetor normal unitário $\mathbf{n}$.

Segundo Jirásek (2007), o *tensor de localização* é às vezes referido como *tensor acústico*, pois, se o tensor constitutivo tangente $\mathbf{D}$ é tomado como o tensor constitutivo elástico $\mathbf{D}_e$, os autovalores do correspondente *tensor acústico* $\mathbf{Q}_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n}$ dividido pela densidade de massa são os quadrados das velocidades das ondas elásticas propagando na direção de $\mathbf{n}$. Os autovalores correspondentes são vetores de polarização que determinam os tipos de ondas (longitudinal, transversal e mista).

A singularidade do *tensor acústico* é usada neste trabalho como a medida para detectar o início da localização de deformações (nucleação de fissuras), bem como a medida avaliada para propagação de trincas. A lógica implementada no sistema INSANE para detecção do fenômeno de localização de deformações, especializada para problemas bidimensionais, é análoga às apresentadas em Klein e Gao (1998) e Thiagarajan et al. (2004).

O emprego do *tensor acústico* para definição desta medida destaca-se pela independência de um modelo constitutivo específico, alcançando a generalização requerida.

8 EXEMPLO

Através do sistema gráfico integrado apresentado na seção 5, a estrutura pode ser estudada considerando o processo de degradação material no decorrer da análise, utilizando-se de um processo incremental-iterativo (seção 3). Opcionalmente, esta análise pode ser realizada tal como proposto: o processo de degradação material é avaliado, inicialmente, de forma distribuída, empregando-se métodos constitutivos (seção 6.1). A partir da localização de deformações, detectada pelo tensor acústico definido na seção 7, trincas são introduzidas na análise através do enriquecimento das funções interpoladoras dos elementos finitos que as contêm (seção 6.2). A propagação destas trincas é também avaliada a partir do tensor acústico. Para ilustrar o uso do sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas em meios bidimensionais, o caso de flexão em três pontos ilustrado na Fig. 6 é simulado no sistema INSANE.

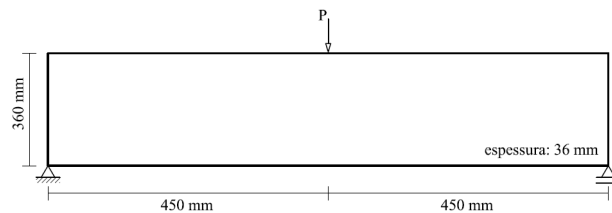


Figura 6: Configuração geométrica (Adaptado de Penna (2011))

O modelo de fissuração distribuída com lei de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, foi adotado na modelagem. Os seguintes parâmetros foram empregados: $E_0 = 44000.0 N/mm^2$; $\nu = 0.2$; $f_c = 40.0 N/mm^2$; $f_t = 3.8 N/mm^2$; $\epsilon_c = 0.0018$; $G_f = 0.164 N/mm$; $h = 100.0 mm$ e $\beta_r = 0.05$. A análise não linear foi realizada empregando o método de controle de deslocamento direto, com incremento de $0.0015 mm$ do deslocamento do apoio direito, carga de referência $P = 1.0 N$ e tolerância de 1×10^{-4} .

A malha de elementos finitos, construída com elementos quadriláteros de quatro nós de tamanho $60 \times 60 mm$, é mantida constante, tendo em vista que as descontinuidades decorrentes da propagação de fissuras são incorporadas nas funções interpoladoras dos elementos.

No sistema INSANE, após a definição do diretório para armazenamento das informações do modelo, abre-se automaticamente o Módulo *Geometria*. Consiste de recursos para desenho, seleção e visualização de entidades geométricas planas. Para o exemplo, desenha-se o retângulo $(900 \times 360) mm^2$, composto por vértices, arestas e face, como ilustrado na Fig. 7.

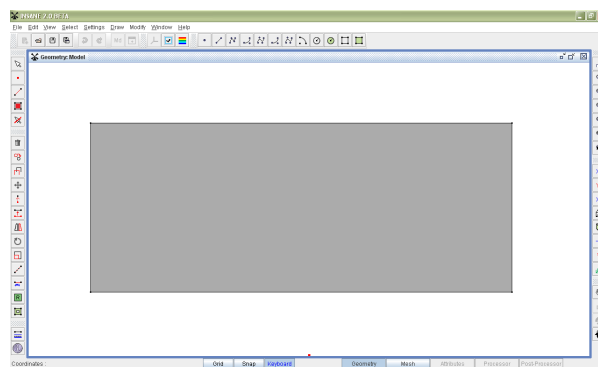


Figura 7: Módulo *Geometria*

Com a geometria definida, passa-se para o próximo módulo, o Módulo *Malha*. Este fluxo pode ocorrer para o número de malhas que o analista quiser processar, cumulando janelas deste módulo cujas estruturas de dados associadas, que serão modificadas quando da geração da malha, são independentes entre si. Ao acionar o comando de mudança para o Módulo *Malha*, abre-se um diálogo para especialização do tipo de análise. Neste estágio, é necessário escolher entre as análises estáticas com carregamentos no plano ou normal ao plano (placas). Da perspectiva da implementação, neste instante define-se qual a classe que irá gerenciar a continuidade da análise, classe apresentada anteriormente como *Combinable*.

Na sequência, outro diálogo é aberto, onde se escolhe a técnica de geração de malha. No estágio atual do sistema, são permitidos o Mapeamento Transfinito, Geração Nodal Aleatória, Malha Assimétrica Concentrada e Malha com base em Grade. O primeiro é uma técnica de mapeamento da fronteira, enquanto os demais são técnicas de decomposição de domínio.

O Módulo *Malha* é composto, além dos recursos para seleção e visualização, de comandos para geração de malha. No caso de Mapeamento Transfinito, o processo de mapeamento é realizado definindo, inicialmente, o número de divisões de determinadas arestas. Em seguida, o programa automaticamente se encarrega da propagação das divisões das demais arestas. Para o exemplo, basta definir que as arestas 1 e 2 deverão ser divididas em quinze e seis segmentos, respectivamente. Automaticamente as divisões se propagarão para as arestas 3 e 4 (Fig. 8(a)).

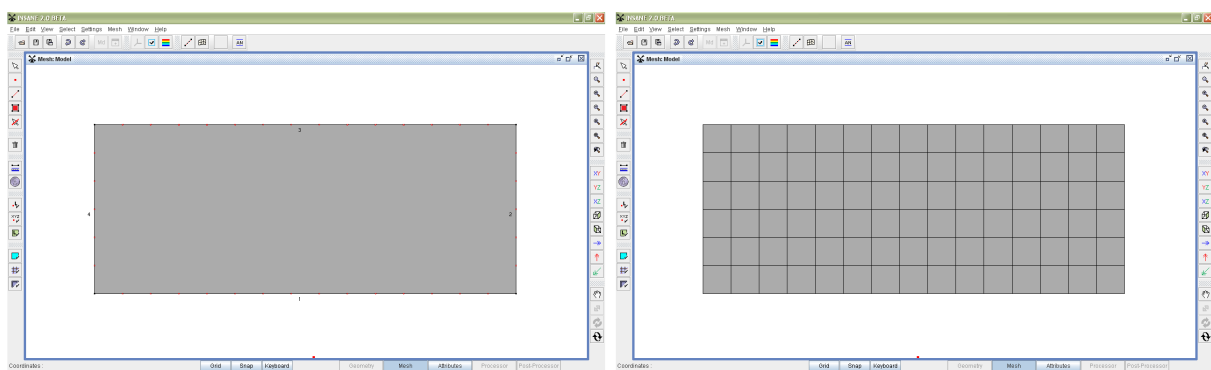


Figura 8: Módulo *Malha*: (a) Divisão de arestas e (b) Discretização

Nesta etapa, a discretização ainda não ocorreu. Porém, os pontos de divisão das arestas ficam em destaque para visualização (Fig. 8(a)). Isto permite avaliar previamente a discretização, podendo-se ainda optar pela modificação das divisões. Em seguida, acionando o comando de discretização, a malha será gerada (Fig. 8(b)). Neste módulo, define-se também o *Modelo de Análise*. Para o exemplo, adotou-se a análise em *Estado Plano de Tensão*.

Definida a discretização e o *Modelo de Análise*, passa-se para o Módulo *Atributos*. Ao acionar o comando de mudança para este módulo, primeiramente, abre-se o diálogo para definição dos tipos de elementos finitos (*Shapes*) a se adotar na análise. No atual estágio do sistema, são permitidos os elementos $Q4$, $Q8$, $Q9$, $Q12$ e $Q16$, aplicáveis às faces quadrilaterais, e os elementos $T3$, $T6$ e $T12$, aplicáveis às faces triangulares. A possível combinação destes elementos na malha se dá respeitando o critério da continuidade inerente ao método. Este módulo é composto, além dos recursos para seleção e visualização, de comandos para definição do *Modelo Constitutivo*, da lei material e seus parâmetros, dos parâmetros geométricos das seções, da lei de evolução de dano e seus parâmetros, se aplicável, das condições de contorno, além de parâmetros de enriquecimento nodal opcional. Permite-se carregamentos nodais, carregamen-

Após o processamento, o comando *Pós-Processador*, com diversos recursos para visualização de resultados, é liberado. Para o exemplo, Fig. 11 apresenta a deformada e a variação da tensão normal horizontal ao longo do domínio, para os passos 40 (14616.8N), 43 (13360.7N), 45 (5262.7N) e 100 (1421.4N), evidenciando a nucleação e propagação da trinca. Mostra-se, também, a trajetória de equilíbrio associada ao deslocamento horizontal do nó de controle.

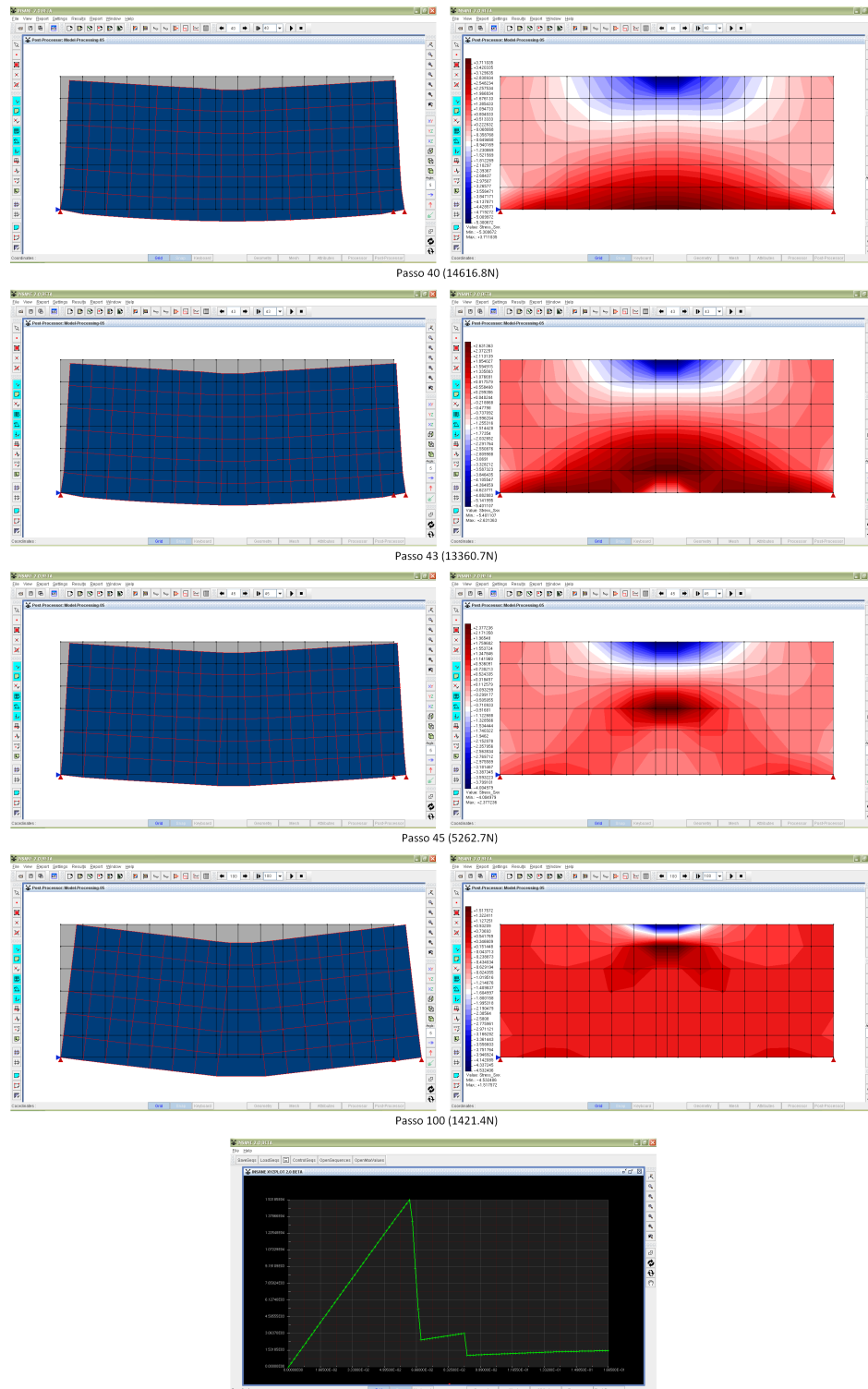


Figura 11: Módulo *Pós-Processador*: Recursos de visualização dos resultados

9 CONCLUSÕES

Uma visão geral da plataforma computacional INSANE é dada com ênfase no desenvolvimento de um sistema gráfico integrado. O sistema integra todos os recursos do núcleo numérico com o pré e o pós-processador.

O pré-processador permite gerar uma malha de MEF, com base em mapeamento transfinito ou em decomposição de domínio, a partir de um modelo geométrico bidimensional previamente definido. Além dos atributos padrões de um modelo de MEF (materiais, carregamentos, restrições), o pré-processador permite também combinar quaisquer tipos de modelo de análise, processo incremental-iterativo e modelo constitutivo a fim de gerar um modelo fisicamente não linear. Após a definição do modelo não-linear, o núcleo numérico do INSANE é acionado para realizar a análise. Em seguida, os resultados da análise podem ser visualizados utilizando os recursos da aplicação pós-processador.

Conforme destacado, o sistema gráfico integrado apresentado neste artigo é parte do desenvolvimento de uma aplicação mais geral para detectar nucleação de trincas e para processar suas propagações. Tal aplicação visa combinar as características de MEF e MEFG, bem como da degradação elástica e das funções interpoladoras com descontinuidades embutidas.

Como próximo passo, pretende-se incorporar ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discretizado (relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca), com base no conceito de fissura coesiva (ou fictícia). No modelo de Hillerborg (Hillerborg et al., 1976), todas as deformações inelásticas (que ocorrem na zona de processo de fratura) são representadas em uma linha através das forças coesivas que agem na trinca, ou em uma extensão fictícia desta. Sendo assim, pretende-se realizar as intervenções necessárias no núcleo numérico do INSANE para que uma lei coesiva *tensão* $\times$ *deslocamento*, definida pelo usuário, seja responsável por gerenciar a abertura das trincas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante apoio das agências de pesquisa brasileiras CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Grants 486959/2013-9, 309005/2013-2 e 308785/2014-2) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - Grant PPM-00669-15).

REFERÊNCIAS

- Alves, P.D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Barros, F.B., 2002. *Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Tese de doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Batoz, J.L. & Dhat, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:1262–1267.

- Boone, T., Wawrzynek, P.A. & Ingraffea, A.R., 1986. Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, 23 (3):255–265.
- Carol, I., Rizzi, E. & Willam, K., 1994. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *Int. J. Solids Structures*, 31:2835–2865.
- Carreira, D.J. & Chu, K., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *ACI Journal*, 82:797–804.
- Crisfield, M.A., 1983. An arc length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:1269–1289.
- de Borst, R. & Gutierrez, M.A., 1999. A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. *International Journal of Fracture* 95, pp. 261–277.
- de Vree, J.H., Brekelmans, W.A.M. & van Gils, M.A.J., 1995. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers e Structures* 55 (4), pp. 581–588.
- Del Savio, A.A., Santi, M.R. & Martha, L.F., 2004. Traçado de curvas offset para auxílio na geração de malhas. *XXV Congresso Ibero Latino Americano de Mecânica Computacional - CILAMCE, Recife, Pernambuco*.
- Fonseca, G.L., 1989. Geração de malhas através de mapeamentos transfinitos. Dissertação de mestrado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Fuina, J.S., 2009. *Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gonçalves, M.A.B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P.E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6(6), pp. 773–782.
- Ho-Le, K., 1988. Finite element mesh generation methods: a review and classification. *Computer Aided Design*, 20 (1):27–38.
- Ingraffea, A.R. & Wawrzynek, P.A., 2004. Computational fracture mechanics: A survey of the field. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004*, pp. 1–21.
- Jirásek, M., 2007. Mathematical analysis of strain localization. *Damage and fracture in geomaterials*, pp. 977–991.
- Ju, J.W., 1989. On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* 25 (7), pp. 803–833.

- Klein, P. & Gao, H., 1998. Crack nucleation and growth as strain localization in a virtual-bond continuum. *Engineering Fracture Mechanics*, 61:21–48.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual procedure for nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:823–839.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*, A Course on Damage Mechanics. Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mäntylä, M., 1987. *An Introduction to Solid Modeling*. New York, NY, USA: Computer Science Press, Inc.
- Mazars, J., 1984. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure*. Tese de doutorado, Université Paris, Paris.
- Mazars, J. & Lemaitre, J., 1984. Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. *Shah, S. P. (Ed.), Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro. Northwestern University*, pp. 375–378.
- Mohammadi, S., 2008. *Extended finite element method for fracture analysis of structures*. Blackwell Pub.
- Murakami, S., 2012. *Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*, Solid Mechanics and Its Applications. Springer.
- Penna, S.S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S.S., 2011. *Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pitangueira, R.L.S., 1998. *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*. Tese de doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Rots, J.G., 1988. *Computational modeling of concrete fracture*. Tese de doutorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda.
- Simo, J.C. & Ju, J.W., 1987. Strain- and stress-based continuum damage models - i. formulation. *International Journal of Solids and Structures* 23 (7), pp. 821–840.
- Strouboulis, T., Babuška, I. & Copps, K., 2000. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69.
- Thiagarajan, G., Hsia, K.J. & Huang Y., 2004. Finite element implementation of virtual internal bond model for simulating crack behavior. *Engineering Fracture Mechanics*, 71:401–423.

- Wolff, K.P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Yang, Y.B. & McGuire, W., 1985. A work control method for geometrically nonlinear analysis. *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application*, pp. 913–921.
- Yang, Y.B. & Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, 28(12):2110–2116.