



COMPARAÇÃO ENTRE TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES EM ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Marcia Mayumi Imoto

Max de Castro Rodrigues

Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

Solange Guimarães

marcia.kiy7490@globo.com

max.castro.rodrigues@gmail.com

bia@coc.ufrj.br

sol@coc.ufrj.br

Av. Horácio de Macedo 950, 21941-915, Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ

Abstract. *Difficult to handle, constrained optimization problems are commonly found in many knowledge areas. Several approaches are available to reach reliable and feasible solutions for these problems. In this context, handling the problem imply in finding not only an efficient algorithm but also an adequate method to reliably handle infeasible solutions. The present work investigates some well-known approaches to handle constraints in evolutionary algorithms, measuring its performances in two different searching algorithms. Differential evolution and particle swarm optimization are the evolutionary algorithms used in this work. The well-known CEC 2006 suite of benchmark functions was the set of problems used as case studies. The work highlights the remarkable characteristics of each handling technique as the sensitiveness to the parameter configuration of the algorithms, the stableness in delivering feasible solutions and the amount of best overall solutions.*

Keywords: *Constrained optimization, constraint handling, differential evolution, particle swarm optimization, evolutionary algorithms*

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, existem diversos algoritmos estocásticos baseados em população que visam resolver problemas de otimização. Entre os mais usados e conhecidos estão: o Algoritmo Genético de Holland, o Enxame de Partículas de Kennedy e Eberhart (1995) e a Evolução Diferencial de Storn e Price (1995). Em sua forma original, eles podem oferecer excelentes resultados para problemas sem restrições, entretanto, são incapazes de otimizar funções com restrição, que englobam a maioria dos problemas reais.

Para solucionar essa questão, diversas técnicas foram criadas, como: técnica de preservação de soluções viáveis, que rejeita soluções inviáveis e usa apenas as viáveis, técnica de tratamento de restrição, que incorpora as restrições à função de aptidão, transformando um problema com restrição em um problema sem restrição, e técnica de reparação de soluções inviáveis, que torna uma solução inviável em uma viável alterando as variáveis que geram a inviabilidade. Dentre elas, a técnica mais utilizada é a de tratamento de restrições e será o foco desse trabalho. O objetivo é testar, analisar e comparar os resultados de 6 técnicas, entre elas algumas bem conhecidas, como o Stochastic Ranking (Runarsson et al., 2000), e novas propostas, como o Balanced Ranking Method (Rodrigues et al., 2015), acoplados a 2 algoritmos de otimização, o Enxame de Partículas e a Evolução Diferencial.

2 ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO)

O enxame de partículas foi criado por Kennedy e Eberhart e apresentado pela primeira vez em 1995. Foi inspirado no comportamento social que rege os movimentos de um bando de pássaros, permitindo-os voar de forma sincronizada e evitar colisões entre os indivíduos.

No algoritmo, uma solução (vetor de variáveis) é chamada de partícula e um conjunto de partículas é chamado de enxame. O enxame está em constante movimento. Cada partícula ajusta sua trajetória de acordo com sua própria experiência e a de sua vizinhança, ou seja, de acordo com a melhor posição encontrada por ela e com a melhor posição encontrada pela sua vizinhança, sempre tendendo a voltar para essas posições.

A definição da vizinhança da partícula, ou seja, a topologia da vizinhança (Eberhart et al., 1996) é uma das variações do PSO. A mais conhecida é a variação gBest ou global best, na qual todas as partículas estão conectadas entre si. Dessa forma, a vizinhança de uma partícula é composta por todo o enxame. Outra variação conhecida é a lBest ou local best, na qual uma partícula está conectada aos seus vizinhos imediatamente anterior e posterior. Cada topologia tem suas características que, em geral, refletem na velocidade de convergência do enxame e na capacidade do enxame de evitar mínimos locais.

As partículas estão em constante movimento, o que significa que são atualizadas a cada iteração. Em problemas que o espaço de busca é limitado entre determinados valores, é possível que uma partícula saia dele ao ser atualizada. A definição da velocidade máxima, o fator de ponderação de inércia e o coeficiente de constrição ajudam a atenuar o número de ocorrências dessas violações, mas não são capazes de impedi-las. Por esse motivo, é necessário aplicar alguma técnica que trate as partículas violadoras, trazendo-as de volta para o espaço definido. No PSO, o tratamento envolve a alteração de dois valores: posição e velocidade. Para cada um destes já há um conjunto de técnicas conhecidas (Helwig et al., 2012) como: reinicialização e limite mais próximo, para o tratamento da posição, e reduzir a zero e ajustada, para o tratamento da velocidade.

Com a inicialização aleatória da posição e da velocidade, existe uma boa chance das partículas saírem do espaço já nas primeiras iterações. Por isso, a escolha do tratamento deve ser bem pensada, uma vez que refletirá no comportamento inicial do enxame e, conseqüentemente, na qualidade da convergência.

A implementação do PSO é bastante simples. O número de parâmetros depende da versão do PSO. Em sua versão original, são poucos os valores definidos a priori, mas o número aumenta consideravelmente se forem adicionados controladores de velocidade. Um ponto negativo do algoritmo, que já é conhecido, é a sua convergência. O PSO é capaz de chegar a valores próximos ao ótimo global, mas tem uma notória dificuldade em atingi-lo.

3 EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (DE)

A evolução diferencial foi criada por Storn e Price e apresentada em 1995. A proposta era trazer um algoritmo de otimização alternativo de rápida convergência, com poucos parâmetros e paralelizável.

No DE, todos os indivíduos ou vetores da população são usados na reprodução. Cada vetor pai é cruzado, segundo uma probabilidade predefinida, com um vetor mutante, gerando um vetor filho. Um valor aleatório garante que o filho herde pelo menos uma variável do vetor mutante, ou seja, que ele sempre seja diferente do pai. Uma vez gerado, pai e filho são comparados e aquele que tiver a menor função objetivo permanece na população, enquanto o outro é descartado.

O grande diferencial do algoritmo é a forma que o vetor mutante é criado. A estratégia básica é usar a diferença entre vetores aleatórios para gerar perturbações em um outro vetor, resultando no vetor mutante. Todavia, quando um vetor mutante é gerado, existe a chance de uma ou mais variáveis estarem fora dos limites impostos à ela(s). Por esse motivo, as variáveis precisam ser tratadas para que voltem para o espaço de busca. Em geral, esse tratamento envolve a alteração do valor da variável violadora e é realizada por técnicas conhecidas (Arabas et al., 2010), como: limite mais próximo e nova amostra.

O DE original é facilmente implementado, necessitando de poucas linhas de código. O número de parâmetros é pequeno, tendo apenas o tamanho da população, a taxa de reprodução e o fator diferencial. As diferentes variantes (Mezura-Montes et al., 2006) oferecem a variedade necessária para otimizar diferentes funções. A convergência é rápida e o algoritmo, em muitos casos, chega facilmente ao ótimo global.

4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO

Em problemas de otimização, as soluções sugeridas pelo método de busca podem ser consideradas viáveis ou inviáveis. Para serem viáveis, as soluções devem satisfazer as condições impostas pelo problema. Em geral, os problemas com restrição são definidos da seguinte forma:

Minimizar $f(\vec{x})$

Sujeito as seguintes restrições:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$h_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$lb_k < x_k < ub_k \quad k = 1, \dots, p \quad (3)$$

Onde f é a função objetivo, $\mathbf{x}$ é um vetor de soluções de tamanho p , x_k é a variável x de índice k vetor $\vec{x}$, lb_k é o limite inferior para a variável x_k , ub_k é o limite superior para a variável x_k , n é o número de restrições de desigualdade, m é o número de restrições de igualdade, g_i é a função de restrição de índice i de desigualdade e h_j é a função de restrição de índice j de igualdade. Para facilitar a busca, as funções de igualdade são transformadas em funções de desigualdade da seguinte forma:

$$|h_j(\vec{x})| - \varepsilon \leq 0 \quad (4)$$

Onde ε é a tolerância permitida.

5 TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE RESTRIÇÃO

A técnica de tratamento de restrição é a forma mais usada para solucionar problemas que envolvam restrição. Ela é de fácil implementação e uso pois pode funcionar como um módulo separado do algoritmo de otimização base. A população corrente é enviada para esse módulo que retorna os indivíduos já avaliados com suas devidas aptidões. Para tal, a técnica aplica uma penalidade as soluções inviáveis, qualificando-as de forma a manter soluções inviáveis promissoras entre o conjunto de soluções viáveis. Dessa forma, o algoritmo de otimização não precisa se preocupar com as restrições, resolvendo o problema como se elas não existissem.

Entretanto, o equilíbrio de seus parâmetros não é facilmente encontrado. Se o método penalizar demais as soluções inviáveis (overpenalization), o algoritmo geralmente fica preso em um mínimo local. Por outro lado, se a penalidade for muito baixa (underpenalization), o algoritmo dificilmente encontrará uma solução viável.

Ao longo dos anos, diferentes técnica de tratamento de restrição foram propostas para solucionar esses problemas. As técnicas que foram usadas nesse trabalho podem ser vistas a seguir.

5.1 Preferring Feasible Solution (PFS)

A técnica proposta por Deb (2000) prioriza as soluções viáveis em detrimento das inviáveis. As comparações são feitas em pares de soluções. Quando as duas soluções são viáveis, é escolhida a que tem a menor função objetivo. Quando as duas soluções são inviáveis, é escolhida a que tem o menor somatório de violações. Se uma solução for viável e a outra inviável, a viável é sempre escolhida. A aptidão pode ser calculada da seguinte forma:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{se } \vec{x} \text{ for viável} \\ f_{\max} + \sum_{j=1}^m |v_j(\vec{x})|, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

Onde $F(\vec{x})$ é a aptidão, $f(\vec{x})$ é a função objetivo, $f_{\max}$ é o pior valor da função objetivo das soluções viáveis e $v_j(\vec{x})$ é a função de restrição j

A equação mostra que a aptidão de uma solução viável é a sua própria função objetivo, enquanto a da solução inviável é a soma do pior valor da função objetivo das soluções viáveis com o somatório de suas violações. Dessa forma, uma solução inviável será sempre inferior a uma solução viável.

A vantagem dessa técnica é que ela não necessita da definição de um parâmetro de penalização, uma vez que não há comparação que envolva função objetivo e somatório das violações ao mesmo tempo. A desvantagem está relacionada a diferença de magnitude que

pode existir entre os valores de função objetivo e violações, levando a comportamentos discrepantes ao se tratar problemas muito diferentes.

5.2 Stochastic Rank (SR) e Global Competitive Ranking (GCR)

As técnicas Stochastic Rank e Global Competitive Ranking foram propostas por Runarsson e Yao (2000 e 2002). Ambas são baseadas na ordenação dos indivíduos da população corrente em uma fila e fazem uso de um parâmetro P_f para promover o equilíbrio entre under e overpenalization.

No SR, cada indivíduo é comparado com o seu adjacente. Se ele for considerado melhor do que o seu vizinho de melhor colocação, eles trocam de posição. As regras usadas para definir a troca são parecidas com as da técnica PFS. O diferencial fica por conta do P_f que gera uma probabilidade dos indivíduos serem comparados apenas pela sua função objetivo. Dessa forma, indivíduos inviáveis têm uma chance de não serem penalizados e assim atingirem posições melhores na fila. Entretanto, achar um valor adequado para o P_f pode ser um processo trabalhoso, principalmente quando se quer usar o mesmo valor para diferentes funções mantendo a qualidade dos resultados. Um valor baixo pode gerar pouca perturbação no processo de ordenação dos indivíduos, enquanto um valor alto pode fazer com que todas as comparações sejam feitas pela função objetivo.

No GCR, cada indivíduo é comparado com toda a população corrente. O parâmetro P_f indica a ênfase que será dada a função objetivo e ao somatório das violações no cálculo da aptidão. Quanto maior for o valor de P_f , maior será a importância da função objetivo. Quanto menor for o valor de P_f , maior será a importância do somatório das violações. Os autores indicam um valor entre 0 e 0.5 para garantir que seja encontrada uma solução viável. A aptidão pode ser calculada da seguinte forma:

$$F(x_i) = P_f \frac{\text{rankFO}(i) - 1}{\text{tamPop} - 1} + (1 - P_f) \frac{\text{rankViol}(i) - 1}{\text{tamPop} - 1} \quad (6)$$

Onde $F(x_i)$ é a aptidão, $\text{rankFO}(i)$ é a posição do indivíduo i na lista ordenada de função objetivo, $\text{rankViol}(i)$ é a posição do indivíduo i na lista ordenada de somatório de violação e tamPop é o tamanho da população corrente.

5.3 Multiple Ranking (MR)

O Multiple Ranking (Ho & Shimizu, 2007) é uma técnica que propõe uma forma de contornar o problema da junção dos valores das diferentes propriedades de um indivíduo (função objetivo, somatório de violações e número de restrições violadas) em uma única função. Uma vez que cada propriedade tem a sua ordem de grandeza, a qualidade da comparação dos valores gerados pela junção delas é questionável. Por esse motivo, o MR faz uma comparação separada para cada propriedade, ordenando os indivíduos em diferentes listas. As posições são então usadas no cálculo da aptidão, como pode ser visto a seguir:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} R_s + R_v, & \text{se não houver soluções viáveis} \\ R_s + R_v + R_f, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

Onde $F(\vec{x})$ é a aptidão, R_s é a posição do indivíduo na lista ordenada de somatório do quadrado das violações, R_v é a posição do indivíduo na lista ordenada de número de violações e R_f é a posição do indivíduo na lista ordenada de função objetivo.

A técnica só calcula a função objetivo quando existir pelo menos um indivíduo viável na população. Nesse caso, os valores de R_s e R_v servem como função de penalização. A aptidão

calculada dessa forma permite que algumas soluções inviáveis tenham uma posição melhor do que soluções viáveis de função objetivo ruim. Uma das vantagens deste método é não precisar executar o cálculo da função objetivo em iterações sem soluções viáveis, o que pode ser útil em problemas com grande esforço computacional associado a este cálculo. E.g., casos onde a função objetivo é fornecida por um simulador numérico, muito comum em problemas envolvendo dinâmica de fluxo.

5.4 Adaptive Penalty Method (APM)

Barbosa e Lemonge (2008) propuseram uma técnica capaz de adaptar os seus valores de penalização com base nas características da própria população. Dessa forma, ela não necessita de qualquer parâmetro, o que facilita bastante o seu uso. Os coeficientes de penalização variam de acordo com o grau de dificuldade da restrição. As funções de restrição mais difíceis têm um valor maior. O cálculo da aptidão pode ser visto a seguir:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{se } \vec{x} \text{ for viável} \\ \bar{f}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(\vec{x}), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{se } f(\vec{x}) > \langle f(\vec{x}) \rangle \\ \langle f(\vec{x}) \rangle, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9)$$

$$k_j = |\langle f(\vec{x}) \rangle| \frac{\langle v_j(\vec{x}) \rangle}{\sum_{n=1}^m [\langle v_n(\vec{x}) \rangle]^2} \quad (10)$$

Onde $F(\vec{x})$ é a aptidão, $f(\vec{x})$ é a função objetivo, k_j é o coeficiente de penalização j , $v_j(\vec{x})$ é a função de restrição j , $\langle f(\vec{x}) \rangle$ é a média dos valores da função objetivo da população corrente $\langle v_j(\vec{x}) \rangle$ é a média das violações da função de restrição j da população corrente e $\langle v_n(\vec{x}) \rangle$ é a média das violações da n -ésima função de restrição da população corrente.

5.5 Balanced Ranking Method (BRM)

O BRM foi inspirado por diversas técnicas de tratamento de restrição já conhecidas, como o Multiple Ranking e o Adaptive Penalty Method. A ideia é usar as diferentes propostas para solucionar alguns problemas enfrentados pelas funções de penalização. O uso de listas ordenadas de indivíduos para resolver o problema das diferentes ordens de grandeza, os coeficientes de penalização adaptativos que mudam de acordo com a população corrente e tornam desnecessário o uso de parâmetros e a preferência a soluções viáveis em detrimento das inviáveis, resguardando as melhores viáveis, são alguns exemplos. Tudo isso, tentando manter um equilíbrio entre under e overpenalization.

O cálculo da aptidão pode ser visto a seguir:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} \text{rank}(f(\vec{x})) & \text{se } \vec{x} \text{ for viável} \\ \text{rank}(p(\vec{x})) + \Delta + \Psi & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

$$p(\vec{x}) = \sum_{n=1}^m (|v_n(\vec{x})|)^\beta \quad (12)$$

Onde $F(\vec{x})$ é a aptidão, $\text{rank}(f(\vec{x}))$ é a posição do indivíduo na lista de função objetivo, $\text{rank}(p(\vec{x}))$ é a posição do indivíduo na lista de função de penalização, $v_n(\vec{x})$ é a n -ésima função de restrição, Δ e Ψ são espaçadores e β é um fator atenuante. As equações dos 3 últimos podem ser encontradas em (Rodrigues et al., 2015).

Em suma, o método gera duas filas ordenadas, uma para soluções viáveis e outra para soluções inviáveis, e as mescla em uma terceira fila virtual. Para priorizar as melhores soluções viáveis, as soluções inviáveis são “empurradas” em direção do final da fila.

Posteriormente, um espaçamento é gerado entre as soluções inviáveis para que não fiquem aglomeradas. Finalmente, a posição do indivíduo nessa fila virtual é a sua aptidão.

6 METODOLOGIA

Nesse trabalho, foram utilizados 2 algoritmos de otimização: o Enxame de Partículas e a Evolução Diferencial. Ambos foram mantidos próximos de suas versões originais, sem grandes modificações. Acopladas à eles, foram testadas 6 técnicas de tratamento de restrições: BRM, APM, GCR, SR, PFS e MR. O PSO foi testado com 3 configurações diferentes na topologia e no tratamento de soluções que saem do espaço de busca. O DE foi testado com 2 configurações diferentes no tratamento das soluções que saem do espaço de busca.

Tabela 1. Configurações do Enxame de Partículas

Configurações do PSO	Topologia	Tratamento de partículas	
		Posição	Velocidade
Configuração 1	Estrela	Limite mais próximo	Inalterada
Configuração 2	Anel	Limite mais próximo	Inalterada
Configuração 3	Anel	Inalterada	Zero

Tabela 2. Configurações da Evolução Diferencial

Configurações do DE	Tratamento de vetores
Configuração 4	Nova amostra
Configuração 5	Limite mais próximo

Inicialização

Os indivíduos foram inicializados de forma aleatória com uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. No caso do PSO, tanto a velocidade quanto a posição das partículas foram inicializadas dessa forma.

Avaliação

As técnicas de tratamento de restrição funcionam de forma semelhante a uma caixa preta, ou seja, recebem a população composta por um conjunto de soluções candidatas e retornam a aptidão de cada solução. Para tal, a maioria delas utiliza o método de ordenação das soluções em uma fila (ou rank) de acordo com as características da população corrente, e retorna como aptidão a posição da solução nessa fila. Consequentemente, apenas as soluções que são avaliadas juntas, ou seja, que estão na mesma população, podem ser comparadas entre si corretamente. Uma vez que os dois algoritmos de busca comparam soluções da população corrente com soluções de populações passadas, é necessário alterá-los ligeiramente para que juntem todas em uma única população para serem avaliadas. Para o PSO, isso significa juntar a população corrente e o pbest de todas as partículas (na topologia estrela) em um único enxame. Já, para o DE, é necessário utilizar a sua versão geracional e juntar os pais com os filhos no momento de avaliar.

É importante frisar que, apesar de haver uma reavaliação de soluções passadas, não é necessário o recálculo da função objetivo e das funções de restrição delas, uma vez que os

valores não mudam. Sendo assim, o número de cálculos de função objetivo por iteração é no máximo igual ao tamanho da população corrente.

Condições de Parada

O principal critério de parada é o número de cálculos de função objetivo. As técnicas que calculam a função objetivo de todos os indivíduos, como o BRM, o APM e o GCR, funcionam bem com essa condição. Entretanto, técnicas como o MR, que só calculam a função objetivo quando acham pelo menos uma solução viável na população, necessitam de mais critérios para não prologarem excessivamente a rodada. Por esse motivo, optou-se também em adicionar um número máximo de cálculos de violação e um número máximo de iterações consecutivas sem soluções viáveis.

É importante deixar claro que essas condições de paradas podem não ser ideais. Encontrar o número máximo de cálculos de função objetivo e o número máximo de cálculos de violação, de forma a equilibrar o custo computacional para os dois tipos de técnicas citadas acima, não é uma tarefa fácil e os valores variam de função para função.

Solução Final

Nos dois algoritmos, a solução final é sempre a de menor aptidão independentemente de haver solução viável ou não na população final. Resguardar ou não a melhor solução viável é vista como uma característica da técnica de tratamento de restrição e por isso optou-se por não adicionar uma verificação de viabilidade da solução dentro do algoritmo de otimização.

7 EXPERIMENTOS

Em todos os testes, a população *pop* foi mantida com 70 indivíduos. O número máximo de cálculos de função objetivo *maxFO* foi de 500000, o número máximo de cálculos de violação de restrição *maxViol* foi de 1500000 e o número máximo de iterações consecutivas sem soluções viáveis *maxItInv* foi igual a 7150.

No Enxame de Partículas, foram adicionados o fator de ponderação de inércia (Shi et al., 1998) e o coeficiente de constrição (Clerc, 1999) no cálculo da velocidade. Os valores dos parâmetros usados foram: $\omega_{max} = 0.9$; $\omega_{min} = 0.4$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 2.05$ e $k = 1$

Na Evolução Diferencial, foi usada a variante DE/rand/1/bin (Storn et al., 1996) com a taxa de recombinação Cr igual a 0.9. O fator diferencial F foi escolhido de forma aleatória com distribuição uniforme entre 0.4 e 0.9 a cada iteração do algoritmo (Karaboga et al., 2004).

Em cada configuração do PSO e do DE, foram aplicados os 6 métodos de penalização mencionados nesse trabalho. O GCR e o SR usaram um P_f igual a 0.35.

Para realizar os testes, foram usadas as 24 funções de benchmark do CEC 2006 (Liang et al., 2006) que compõem a chamada G-Suite. Cada função foi rodada 25 vezes. A tolerância para violações de equações de restrição ε foi de 0.0001.

Os valores de *maxFO*, ε e rodadas são iguais aos de Max_FES, ϵ e runs, respectivamente, do CEC 2006. O valor de *maxItInv* é a aproximação da divisão de *maxFO* por *pop*. Os valores de *pop*, *maxViol*, Cr, F e P_f e a variante DE/rand/1/bin foram escolhidos empiricamente.

8 RESULTADOS

As tabelas a seguir mostram os resultados das 6 técnicas de tratamento de restrição nas 24 funções de benchmark das 5 configurações. O campo “Melhor” contém o melhor resultado das 25 rodadas, o campo “Média” contém a média aritmética das rodadas viáveis e o campo “Viáveis” contém a quantidade de rodadas viáveis. O negrito indica a(s) melhor(es) resposta(s) de cada função. O * significa que não houve rodada viável.

Tabela 3. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 1)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	-13	-11	-13.8281	-15.00	-12	-12
	MÉDIA	-9.36	-7.12	-8.033124	-11.72	-7.52	-6.52
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.697264	-0.754143	-0.674479	-0.617677	-0.67969	-0.666165
	MÉDIA	-0.417009	-0.454789	-0.469264	-0.47392	-0.46663	-0.446104
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.849003	-1.00015	-1.00019	-1.00015	-0.999137	-0.997697
	MÉDIA	0	-0.110149	-0.296253	-0.825277	-0.222518	-0.216928
	Viáveis	25	25	25	20	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	MÉDIA	-30665.5	-30646.33	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5128.18	5137.02	5126.51	5126.52	5126.56	5127.63
	MÉDIA	5720.30315	5818.1939	5133.62	5462.15647	5756.63	5868.4405
	Viáveis	19	23	24	17	17	19
G6 [-6961.81]	MELHOR	-6961.81	*	*	*	-6961.81	-6961.81
	MÉDIA	-6961.81	*	*	*	-6961.81	-6961.81
	Viáveis	10	0	0	0	5	13
G7 [24.3062]	MELHOR	25.0505	25.3207	25.0327	25.1649	25.6192	25.0196
	MÉDIA	86.87802	98.6656	49.8247	136.86287	78.0624	245.1898
	Viáveis	25	25	24	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	MÉDIA	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	Viáveis	25	25	25	24	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.637	680.633	680.638	680.633	680.635	680.632
	MÉDIA	680.702	680.681	680.671	680.668	680.689	680.6773
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7313.86	7358.2	7429.75	*	7092.91	7223.13
	MÉDIA	11136.2	9450.84	7429.75	*	9173.97	8854.29
	Viáveis	25	8	1	0	23	24
G11 [0.7499]	MELHOR	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.750441	0.7499
	MÉDIA	0.759943	0.849924	0.90996	0.7499	0.990014	0.91994
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12 [-1]	MELHOR	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	MÉDIA	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 4. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 1)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.067569	0.596451	0.053946	0.46306	0.133383	0.49351
	MÉDIA	0.800617	0.948913	0.286604	1.29663	0.713099	1.01053
	Viáveis	25	24	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	-47.3733	-47.3733	-47.3739	-47.43	-47.3733	-43.2702
	MÉDIA	-38.5417	-38.2754	-41.59424	-46.7272	-39.9189	-37.9594
	Viáveis	24	23	24	25	23	21
G15 [961.715]	MELHOR	961.719	961.715	961.715	961.722	961.716	961.715
	MÉDIA	964.536	965.6438	961.7321	965.685	963.0937	965.2241
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90182	-1.90516	-1.90516
	MÉDIA	-1.6337	-1.80768	-1.90196	-1.69133	-1.75101	-1.63447
	Viáveis	25	25	21	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	8862.93	8862.27	*	9009.41	8870.98	8939.42
	MÉDIA	9035.31	9073.0892	*	9011.6	9009.873	9124.8475
	Viáveis	14	13	0	6	8	8
G18 [-0.866025]	MELHOR	-0.865977	-0.866016	-0.866025	-0.866025	-0.865946	-0.866024
	MÉDIA	-0.830103	-0.860831	-0.863107	-0.848297	-0.849459	-0.843231
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	398.168	369.77	427.933	277.046	379.709	652.684
	MÉDIA	594.0126	394.8235	427.933	593.533	516.8767	736.5465
	Viáveis	5	2	1	5	3	2
G20 [-]	MELHOR	0.218538	*	*	*	0.382517	0.147429
	MÉDIA	0.218538	*	*	*	0.382517	0.175340
	Viáveis	1	0	0	0	1	3
G21 [193.725]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	-138.747	-187.433	*	*	-0.56575	-400.003
	MÉDIA	229.573	242.838	*	*	172.061	265.259
	Viáveis	11	20	0	0	3	5
G24 [-5.50801]	MELHOR	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	MÉDIA	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 5. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 2)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	-15	-15	-15	-15	-12	-12
	MÉDIA	-10.6	-8.76	-9.72	-13.92	-8.4	-8.04
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.67578	-0.783961	-0.802828	-0.803392	-0.785176	-0.792067
	MÉDIA	-0.543761	-0.684575	-0.683832	-0.690319	-0.644725	-0.72155
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.364406	-0.0495238	-0.096378	-0.534839	-0.386852	-0.279344
	MÉDIA	-0.046819	-0.0054146	-0.01387	-0.224254	-0.0632641	-0.027967
	Viáveis	25	25	25	16	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	MÉDIA	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5126.79	5126.74	5126.5	5126.52	5126.5	5126.5
	MÉDIA	5235.4	5298.43	5129.01	5160.12	5166.5932	5372.22
	Viáveis	25	24	25	23	25	25
G6 [-6961.81]	MELHOR	-6961.81	-6961.81	*	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	MÉDIA	-6961.81	-6961.81	*	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	Viáveis	16	7	0	1	13	22
G7 [24.3062]	MELHOR	24.3327	24.3895	24.347	24.374	24.346	24.3882
	MÉDIA	25.9176	24.745	24.7547	24.9596	24.847656	24.929736
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	MÉDIA	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.633	680.632	680.635	680.631	680.632	680.631
	MÉDIA	680.669	680.642	680.649	680.644	680.64316	680.63924
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7099.21	7056.52	7063.87	*	7066.98	7076.74
	MÉDIA	7715.56	7843.88	7604.16	*	7333.2524	7457.1384
	Viáveis	25	22	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499
	MÉDIA	0.7517	0.749952	0.750374	0.749921	0.769552	0.757948
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12 [-1]	MELHOR	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	MÉDIA	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 6. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 2)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.072143	0.0546468	0.0540503	0.066421	0.0569083	0.088176
	MÉDIA	0.483425	0.225142	0.0748657	0.415571	0.324129	0.473934
	Viáveis	25	23	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	-47.3739	-47.3752	-47.6317	-47.4662	-47.5669	-47.5986
	MÉDIA	-43.7285	-44.2435	-46.5747	-46.7483	-44.924	-43.2147
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15 [961.715]	MELHOR	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715
	MÉDIA	962.186	962.076	961.719	961.776	961.739	961.801
	Viáveis	25	22	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	MÉDIA	-1.90488	-1.90489	-1.90516	-1.90275	-1.90516	-1.90516
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	8857.43	8877.95	8866.97	8929.29	8856.87	8854.92
	MÉDIA	8947.59	8982.76	8942.4	8985.348	8955.14583	8981.8672
	Viáveis	25	22	23	10	24	25
G18	MELHOR	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.866023	-0.866025	-0.866025

[-0.866025]	MÉDIA	-0.863784	-0.865072	-0.8653	-0.86539	-0.865024	-0.864967
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	125.895	268.573	38.9536	34.1933	159.515	117.754
	MÉDIA	426.496	580.014923	270.4945	244.8747	384.875833	477.307
	Viáveis	25	13	19	19	24	19
G20 [-]	MELHOR	0.146598	0.147429	0.14739	0.144519	0.143938	0.147197
	MÉDIA	0.177861	0.17545	0.163078	0.166487	0.187977	0.18172
	Viáveis	18	17	8	3	15	19
G21 [193.725]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	-400.003	0	-87.2076	*	-246.926	-230.583
	MÉDIA	3.402009	42.857143	49.1135	*	-6.76979	52.3064
	Viáveis	25	21	19	0	25	25
G24 [-5.50801]	MELHOR	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	MÉDIA	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 7. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 3)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	-15	-15	-15	-15	-15	-15
	MÉDIA	-15	-15	-15	-15	-15	-15
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.803517	-0.803461	-0.803517	-0.803597	-0.802143	-0.803506
	MÉDIA	-0.709946	-0.780352	-0.773936	-0.762207	-0.768595	-0.774332
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.788153	-1.00028	-0.951054	-0.925788	-0.784841	-0.907397
	MÉDIA	-0.417758	-0.911138	-0.84619	-0.71886	-0.500498	-0.661026
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	MÉDIA	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5126.51	5126.55	5126.5	5126.55	5126.5	5126.5
	MÉDIA	5128.31	5156.24	5129.34	5132.9	5132.62	5131.9
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G6 [-6961.81]	MELHOR	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	MÉDIA	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G7 [24.3062]	MELHOR	24.3726	24.3487	24.3423	24.3769	24.3928	24.375
	MÉDIA	24.7911	24.5304	24.6278	24.6028	24.5267	24.6112
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	MÉDIA	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.632	680.634	680.634	680.632	680.636	680.632
	MÉDIA	680.687	680.65	680.642	680.664	680.647	680.64

	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7057.69	7067.82	7053.21	*	7052.03	7049.33
	MÉDIA	7196.42	7438.39	7215.65	*	7176.27	7191.33
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499
	MÉDIA	0.75001	0.7499	0.7499	0.7499	0.749938	0.749908
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12 [-1]	MELHOR	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	MÉDIA	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 8. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 3)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.058324	0.0542655	0.054054	0.054713	0.053945	0.0583942
	MÉDIA	0.262498	0.232393	0.059586	0.239011	0.245526	0.394895
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	-47.5335	-47.4444	-47.3009	-47.0934	-46.6571	-47.0287
	MÉDIA	-45.256	-46.1327	-46.279	-45.8512	-45.5659	-45.0097
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15 [961.715]	MELHOR	961.715	961.715	961.715	961.718	961.716	961.715
	MÉDIA	962.0327	961.8938	961.7319	962.207	961.93	962.057
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	MÉDIA	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	8870.49	8873.65	8856.52	8862.02	8853.81	8866.42
	MÉDIA	8911.584	8944.0084	8885.409	8898.51	8896.3332	8911.6932
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G18 [-0.866025]	MELHOR	-0.86602	-0.866024	-0.866023	-0.866011	-0.86596	-0.866025
	MÉDIA	-0.816907	-0.856863	-0.864011	-0.860812	-0.818335	-0.853488
	Viáveis	25	25	14	25	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	111.285	46.3742	35.0995	75.037	80.8946	101.786
	MÉDIA	219.6506	232.354	44.4766	147.404	144.4634	263.113
	Viáveis	25	22	25	25	25	25
G20 [-]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G21 [193.725]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	-147.176	-160.962	699.249	*	-88.2519	-133.076
	MÉDIA	20.9583	100.776	699.249	*	99.0968	75.8087
	Viáveis	16	15	1	0	16	10
G24 [-5.50801]	MELHOR	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	MÉDIA	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 9. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 4)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	-15	-15	-15	-15	-15	-15
	MÉDIA	-15	-15	-15	-15	-15	-15
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.803619	-0.803619	-0.803619	-0.803619	-0.803619	-0.803619
	MÉDIA	-0.800782	-0.801368	-0.801215	-0.799293	-0.80238	-0.80127
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-1.0005	-1.0005	-1.0005	-1.0005	-1.0005	-1.0005
	MÉDIA	-0.625605	-1.0005	-1.0005	-1.0005	-0.798018	-1.0005
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	MÉDIA	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5
	MÉDIA	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G6 [-6961.81]	MELHOR	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	MÉDIA	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G7 [24.3062]	MELHOR	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062
	MÉDIA	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	MÉDIA	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63
	MÉDIA	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7049.25	7049.25	7049.25	*	7049.25	7049.25
	MÉDIA	7049.25	7049.25	7049.25	*	7049.25	7049.25
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499
	MÉDIA	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499	0.7499
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12 [-1]	MELHOR	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	MÉDIA	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 10. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 4)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.0539415	0.0539415	0.0539415	0.0539415	0.0539415	0.0539415
	MÉDIA	0.290724	0.22328	0.0539415	0.315647	0.331042	0.315647
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649
	MÉDIA	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

G15 [961.715]	MELHOR	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715
	MÉDIA	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	MÉDIA	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	8853.539	8853.539	8853.539	8853.539	8853.539	8853.539
	MÉDIA	8899.21	8912.85	8853.539	8886.14	8877.23	8909.84
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G18 [-0.866025]	MELHOR	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.865909	-0.866025	-0.866025
	MÉDIA	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.865786	-0.866025	-0.866025
	Viáveis	25	25	25	8	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	47.9033	36.1192	32.6783	39.0002	39.6382	38.9132
	MÉDIA	124.923	49.9231	33.2089	57.8971	62.5989	65.4858
	Viáveis	25	25	25	24	25	25
G20 [-]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G21 [193.725]	MELHOR	193.725	193.725	193.725	*	193.725	193.725
	MÉDIA	233.752	198.964	214.681	*	219.92	209.442
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	-400.055	-400.055	-400.055	-400.055	-400.055	-400.055
	MÉDIA	-400.055	-400.055	-400.055	-400.055	-400.055	-400.055
	Viáveis	25	25	25	2	25	25
G24 [-5.50801]	MELHOR	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	MÉDIA	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 11. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 5)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	-15	-15	-15	-15	-15	-15
	MÉDIA	-14.9531	-14.2331	-14.88	-14.92	-14.7781	-14.76
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.803619	-0.803619	-0.803619	-0.803619	-0.803619	-0.803619
	MÉDIA	-0.781878	-0.782107	-0.789324	-0.789581	-0.787272	-0.784976
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.993497	-1.0005	-1.0005	-1.0005	-0.797025	-1.0005
	MÉDIA	-0.275469	-1.0005	-0.903183	-1.0005	-0.327433	-0.430293
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	MÉDIA	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5	-30665.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5
	MÉDIA	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5	5126.5
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G6	MELHOR	-6961.81	-6961.81	*	-6961.81	-6961.81	-6961.81

[-6961.81]	MÉDIA	-6961.81	-6864.51	*	-6961.81	-6961.81	-6961.81
	Viáveis	25	16	0	25	25	25
G7 [24.3062]	MELHOR	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062
	MÉDIA	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062	24.3062
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	MÉDIA	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825	-0.095825
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63
	MÉDIA	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63	680.63
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7049.25	7049.25	7049.25	*	7049.25	7049.25
	MÉDIA	7073.45	7049.25	7049.25	*	7049.25	7049.25
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	0.7499	0.7611	0.900413	0.7499	0.803825	0.751044
	MÉDIA	0.866404	0.964253	0.993085	0.876328	0.992153	0.982656
	Viáveis	25	25	25	23	25	25
G12 [-1]	MELHOR	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	MÉDIA	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 12. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 5)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.0539545	0.0539415	0.0539415	0.0539415	0.0539415	0.0539415
	MÉDIA	0.352768	0.254069	0.177097	0.331042	0.269464	0.254069
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649
	MÉDIA	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649	-47.7649
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15 [961.715]	MELHOR	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715
	MÉDIA	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715	961.715
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	MÉDIA	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516	-1.90516
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	8853.53	8853.53	8853.53	8853.53	8853.53	8853.53
	MÉDIA	8897.57	8909.93	8853.53	8882.51	8862.42	8892.04
	Viáveis	25	25	25	23	25	25
G18 [-0.866025]	MELHOR	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.866025
	MÉDIA	-0.866025	-0.866025	-0.866025	-0.865999	-0.866025	-0.866025
	Viáveis	25	25	25	19	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	77.975	45.314	32.6554	34.8305	47.4034	32.992
	MÉDIA	193.232	94.2253	32.6843	44.2973	80.084736	59.8133
	Viáveis	25	25	25	24	25	25
G20 [-]	MELHOR	0.121921	0.12192	0.12192	*	*	*
	MÉDIA	0.124155	0.128314	0.121921	*	*	*
	Viáveis	21	25	25	0	0	0
G21 [193.725]	MELHOR	193.725	193.755	*	*	193.725	193.725
	MÉDIA	425.536	193.755	*	*	229.462	213.898

	Viáveis	11	10	0	0	11	13
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	-400.055	-400.054	-400.055	*	-400.055	-400.055
	MÉDIA	-131.889	78.1151	-356.301	*	-160.898	-44.0264
	Viáveis	25	16	16	0	23	25
G24 [-5.50801]	MELHOR	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	MÉDIA	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

9 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para o melhor entendimento do conteúdo seguinte, as técnicas de tratamento das soluções que saem do espaço de busca foram mencionadas pelo acrônimo TTS e as técnicas de tratamento de restrição pelo acrônimo TTR.

A primeira configuração (Configuração 1) possui a topologia estrela (ou gbest). Ela foi escolhida por ser a versão mais conhecida do Enxame de Partículas. A sua convergência é rápida, mas o enxame é facilmente atraído para mínimos locais. Essa característica foi observada em quase todas as funções, levando a médias ruins e a diversas rodadas sem soluções viáveis. Nestes últimos casos, era comum a melhor solução até então encontrada ficar oscilando entre valores inviáveis de um determinado local até o final da rodada. Além disso, as técnicas MR, GCR, APM e SR não resguardam a melhor solução viável da população, o que possibilitou a troca dela por uma solução inviável de melhor aptidão e levou a algumas rodadas inviáveis.

Para verificar até que ponto esses resultados estavam realmente sendo causadas pela estagnação em mínimos locais, um segundo teste (Configuração 2) foi realizado com a topologia anel (ou lbest), que é conhecida por sua lenta convergência e maior facilidade em sair de mínimos locais em relação a versão estrela.

Na Configuração 2, a melhora foi considerável em todos os aspectos em quase todas as funções. As médias da G19 do MR e da G10 do GCR pioraram por causa do aumento expressivo no número de rodadas viáveis. As alterações na G23, para melhor e para pior, são duvidosas. A maioria dos resultados foi zero, que é provavelmente um mínimo local, e o restante ficou bastante espalhado, com soluções finais bem distantes umas das outras. A função G3 mostrou uma alteração significativamente ruim nas médias das rodadas. Além disso, algumas funções, como a G6, continuaram com uma quantidade expressiva de rodadas inviáveis.

É de comum conhecimento que a TTS até então usada, a do limite mais próximo, pode melhorar ou piorar o resultado de uma função. Se ela tiver um mínimo local perto das bordas do espaço de busca, essa técnica pode “empurrar” o enxame para esse local. Se isso ocorrer logo no início da rodada, pode não existir partícula com aptidão menor do que a que está perto desse mínimo e consequentemente todo o enxame tenderá a ir para esse local.

Por esse motivo, um terceiro teste (Configuração 3) foi realizado com outra TTS, a que zera a velocidade da partícula. Os resultados deixam bem claro que houve de fato alguma influência da TTS no enxame. De um modo geral, na maioria das funções, o número de rodadas viáveis chegou ao máximo definido. As médias também melhoraram significativamente, devido a menor quantidade de rodadas presas em mínimos locais. Apenas

nas funções G18, G20 e G23 ficou evidente que a Configuração 2 teve um desempenho melhor.

Ao comparar as diferentes configurações do PSO, algumas TTR tiveram resultados bem diferentes das demais em determinadas funções. Nas funções G10 e G23, o APM foi o único que não conseguiu chegar ao melhor conhecido em nenhuma das configurações testadas. Na função G18, da Configuração 3, o GCR foi o único a retornar um número inferior de resultados viáveis em relação à Configuração 2. Isso ocorreu devido as diversas trocas da melhor solução viável por uma inviável. Nas configurações 1 e 2, é possível que o GCR tenha sido beneficiado pela TTR, que o ajudou a manter os resultados viáveis. Na função G6, nas Configurações 1 e 2, todas as TTR tiveram problemas de estagnação em locais inviáveis, principalmente o GCR e o APM. Por outro lado, na configuração 3, todas as TTR chegaram ao ótimo nas 25 rodadas. Isso mostra como a TTS pode influenciar negativamente o resultado.

No geral, o GCR e o APM mostraram uma maior sensibilidade em relação as alterações no PSO. Dependendo do caso, eles sequer conseguem entregar uma solução viável. Porém, foram as TTR que entregaram as melhores médias em um maior número de funções. Já o BRM e o PFS foram os que entregaram mais resultados viáveis, apesar de também mostrarem oscilações de desempenho nas diferentes configurações.

De todas as TTR, o GCR é o que demonstra ter a maior capacidade de evitar mínimos locais viáveis. Isso é evidente na Configuração 1, devido a característica da topologia estrela de estagnar em mínimos locais. Nas funções G5, G7, G13, G15, G16, as médias obtidas por ele foram bem próximas do melhor conhecido, ao contrário das demais TTR. Tal característica está ligada ao seu comportamento no início da busca, enquanto não há partículas viáveis no enxame. O GCR é a técnica que é melhor “guiada” pelas soluções inviáveis. Quando ele encontra uma solução viável, ela está relativamente próxima do ótimo, o que o faz evitar diversos mínimos locais viáveis.

Para tentar confirmar os resultados obtidos com o PSO, novos testes foram feitos com um outro algoritmo de otimização, a Evolução Diferencial. O DE/rand/1/bin foi escolhido por ser uma versão clássica, fácil de usar e que obtém bons resultados em uma grande variedade de funções. Duas configurações foram testadas alterado apenas a TTS. A Configuração 4 usou a técnica que gera um novo vetor mutante para substituir a variável violadora e a Configuração 5 usou a técnica do limite mais próximo.

A comparação dos resultados das Configurações 4 e 5 confirma algumas das observações feitas no PSO sobre a influência das TTS e algumas das características das TTR. O GCR foi novamente um dos mais sensíveis as alterações, especialmente na G6 e na G21. Em todas as rodadas dessas duas funções na configuração 5, ele foi rapidamente “empurrado” para um local inviável, onde ficou estagnado até o final da rodada. O DE também confirmou a capacidade do GCR em evitar mínimos locais, que é facilmente observada nas funções G13, G17 e G19.

O APM manteve a sua incapacidade de encontrar soluções viáveis na G10 e a sua dificuldade na G23. Além disso, ele foi o único a não retornar rodadas viáveis na G21 em todas as configurações. Na função G18 com a Configuração 4, ele teve problema com a troca da melhor solução viável por uma inviável, que amenizou na Configuração 5 com a ajuda da TTS.

A técnica de tratamento para o limite mais próximo tem uma influência negativa na função G3, o que pode explicar os resultados das configurações 1, 2 e 5. Porém, tal explicação não é suficiente para o BRM e o SR que continuaram com as médias ruins mesmo nas demais

configurações. As duas TTR são capazes de chegar ao ótimo nessa função, mas têm problemas relacionados à velocidade de convergência e estagnação em mínimos locais.

Nem todos os resultados foram parecidos entre os dois algoritmos, alguns foram diferentes do esperado. Na função G23, o PSO teve resultados melhores com o tratamento do limite mais próximo, porém, os resultados do DE foram piores com ele. Analisando os retornos das funções, o que aparentemente está acontecendo é que essa TTS tende a empurrar o enxame para dois prováveis mínimos locais viáveis, 0 e 900. Dessa forma, ela aumenta o número de rodadas viáveis, mas tem o potencial de piorar as médias uma vez que esses mínimos estão longe do ótimo dessa função. O GCR e o MR mostraram um comportamento um pouco diferente das demais TTR na configuração 5, sendo atraídos não só para os mínimos locais viáveis como também para um determinado local inviável.

O DE obteve resultados bem impressionantes, chegando ao ótimo em até 22 das 24 funções. O GCR na configuração 4 chegou a 19 funções com todas as rodadas perfeitas e o BRM e o MR chegaram a encontrar soluções viáveis em 23 funções na configuração 5. Na maioria das funções, as soluções finais podem ser divididas em 2 categorias: soluções iguais ao ótimo e soluções iguais a um mínimo local (viável ou inviável). Ou seja, ou o algoritmo chega ao ótimo ou fica preso em um mínimo local. Dessa forma, a média vira um indicador da capacidade da TTR em evitar mínimos locais.

10 CONCLUSÃO

Esse trabalho mostrou que todas as técnicas de tratamento de restrição testadas aqui têm potencial para chegar a resultados satisfatórios na maioria das funções, tanto com o Enxame de Partículas quanto com a Evolução Diferencial. Entretanto, uma configuração mal escolhida pode mudar consideravelmente os resultados. Muitos autores negligenciam uma parte importante dos algoritmos, a técnica de tratamento das soluções que saem do espaço de busca. É comum encontrar artigos que sequer indicam qual técnica foi usada em seus testes. Os resultados obtidos aqui mostram como as técnicas de tratamento de restrição são afetadas pelos diferentes algoritmos de busca e configurações, e deixam visíveis algumas características bem peculiares delas.

Com a análise dos resultados, é possível dizer que o GCR é um dos mais sensíveis as mudanças nas configurações e por isso precisa de uma maior atenção nas definições das diferentes partes do algoritmo e um maior número de testes para calibrá-lo. Porém, é o que pode gerar os melhores resultados em diferentes funções. O BRM, seguido pelo PFS e pelo SR, é o mais constante na entrega de resultados viáveis, independente da configuração escolhida. O APM é o que entrega resultados viáveis em um menor número de funções, mas mostra bons valores em algumas configurações, chegando a competir com o GCR.

A escolha do método a ser usado depende muito do esforço que vai ser posto no algoritmo de otimização e do tipo de resposta visado. Se a busca for pela quantidade de soluções viáveis sem ter que se preocupar muito com o algoritmo base, o BRM é uma ótima escolha. Agora, se a busca for pela qualidade das soluções viáveis entregues, o GCR apresenta melhores resultados. Todavia, ele exige um tempo maior do usuário no equilíbrio das diferentes partes do algoritmo de otimização e do parâmetro P_f da própria técnica.

REFERÊNCIAS

Arabas, J., Szczepankiewicz, A., & Wroniak, T., 2010. Experimental Comparison of Methods to Handle Boundary Constraints in Differential Evolution. *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN XI*, LNCS, vol. 6239, pp. 411-420.

Barbosa, H. J. C., & Lemonge, A. C. C., 2008. An adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. *Frontiers in Evolutionary Robotics*, vol. 1, pp.9-34.

Clerc, M., 1999. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. *Proceeding of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*, Washington, DC, pp.1951-1957.

Deb, K., 2000. An Efficient Constraint Handling Method for Genetic Algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, n. 2, pp. 311-338.

Eberhart, R. C., Simpson, P., & Dobbins, R., 1996. *Computational Intelligence PC Tools*. Academic Press.

Helwig, S., Branke, J., & Member, S. M., 2012. Experimental analysis of bound handling techniques in particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 17, pp. 259-271.

Ho, P. Y., & Shimizu, K., 2007. Evolutionary constrained optimization using an addition of ranking method and a percentage-based tolerance value adjustment scheme. *Information Sciences*, vol. 177, n. 14, pp. 2985-3004.

Liang, J. J., Runarsson, T. P., Mezura-Montes, E., Clerc, M., Suganthan, P.N., Coello, C. A. C., & Deb, K., 2006. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2006 Special Session on Constrained Real-Parameter Optimization. Technical Report, Nanyang Technological University, Singapore.

Karaboga, D., & Ökdem, S., 2004. A simple and global optimization algorithm for engineering problems: differential evolution algorithm. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences* 12(1), 53–60.

Kennedy, J., & Eberhart, R., 1995. Particle Swarm Optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948. Perth, Australia.

Mezura-Montes, E., Velázquez- Reyes, J., & Coello, C.A.C., 2006. A Comparative Study of Differential Evolution Variants for Global Optimization. *Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation- GECCO06*, pp.485-492.

Rodrigues, M.C., de Lima, B.S.L.P. & Guimarães, S., 2015. Balanced ranking method for constrained optimization problems using evolutionary algorithms. *Information Sciences*. (Aceito para publicação em 2015, doi:10.1016/j.ins.2015.08.012).

Runarsson, T.P., & Yao, X., 2000. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 4, n.3, pp. 284-294.

Runarsson, T.P., & Yao, X., 2002. Constrained Evolutionary Optimization: The Penalty Function Approach. Sarker, R., Mohammadian, M., & Yao, X. (eds.) *Evolutionary Optimization: International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 48, pp. 87-113. Springer, New York.

Shi, Y., & Eberhart, R., 1998. Parameter selection in Particle Swarm Optimization. *Proceeding of the 7th Annual Conference on Evolutionary Programming*, pp. 591-600. Springer-Verlag.

Storn, R., & Price, K., 1995. Differential evolution - A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. Technical Report TR-95-012, ICSI, USA.

Storn, R., & Price, K., 1996. Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, vol. 4, n. 11, pp. 341–359.