



ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS AO COLAPSO PROGRESSIVO

Murillo V. B. Santana

Paulo B. Gonçalves

murillobento@yahoo.com.br

paulo@puc-rio.br

Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente nº 225, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Ricardo A. M. Silveira

ricardo@em.ufop.br

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35.400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Péter Z. Berke

pberke@ulb.ac.be

BATir department CP 194/2, Université libre de Bruxelles (ULB)

50 av. F. D. Roosevelt, 1050 Brussels, Belgium

Resumo. Com os recentes avanços tecnológicos e computacionais a concepção de estruturas esbeltas tem se tornado mais frequente. Quando essas estruturas são submetidas a algum tipo de dano local é possível que o mesmo se propague, causando o colapso progressivo do sistema. Este trabalho tem como objetivo a avaliação do comportamento de estruturas de concreto armado submetidas ao colapso progressivo. Uma formulação corrotacional de viga de Euler - Bernoulli é aplicada à análise computacional. A não linearidade física é representada considerando o comportamento elasto-plástico dos materiais, via zona plástica. Análises não lineares estáticas são realizadas e os resultados obtidos são comparados a literatura.

Palavras-Chave: Formulação não linear, Concreto armado, Análise inelástica, Colapso progressivo

1 INTRODUÇÃO

O projeto de estruturas esbeltas tem se tornado cada vez mais comum em função dos avanços científicos e computacionais recentes. Quando essas estruturas são sujeitas a ações excepcionais, como explosões, terremotos e ataques terroristas é possível que o dano causado em alguns elementos estruturais se propague ao longo do sistema, causando a falha total do mesmo (Oliveira, 2015). Como consequência das cargas aplicadas, o sistema estrutural passa a sofrer grandes deslocamentos e deformações inelásticas. Assim, a identificação do potencial de colapso progressivo, através da consideração dos efeitos de segunda ordem dos elementos estruturais e do comportamento elasto-plástico dos materiais é de grande importância prática.

No estudo de sistemas estruturais reticulados planos de concreto armado, o comportamento inelástico dos materiais pode ser introduzido através do método da zona plástica, onde a seção transversal dos elementos é dividida em camadas formadas por concreto e aço. Neste método a resistência dos elementos estruturais é determinada segundo uma integração ao longo do comprimento, realizada numericamente em pontos selecionados, e ao longo da seção transversal, através da discretização em camadas. Assim, os modelos inelásticos podem ser introduzidos localmente, com respeito aos materiais de cada camada. Simo & Hughes (1997) e Kojic & Bathe (2005) desenvolveram modelos locais para plasticidade uniaxial que considera um tipo de encruamento cinemático geral. Uma formulação de viga de Timoshenko com discretização em camadas é apresentada em Silva & Silva (2014), também Stramandinoli & Rovere (2012) desenvolveram uma formulação para elementos em concreto armado sensível ao cisalhamento.

A não linearidade geométrica pode ser introduzida a partir de um referencial corrotacional, que acompanha o movimento do elementos ao longo de toda a análise (Battini, 2002). Com relação ao mesmo, os deslocamentos de corpo rígido são nulos e os deslocamentos que geram deformações são considerados pequenos e os efeitos não lineares se manifestam na transformação para o sistema global (Crisfield, 1991). O referencial corrotacional, além de ser sensível aos efeitos de segunda ordem e às instabilidades do sistema, permite o desacoplamento dos efeitos físicos e geométricos. Assim, o comportamento elasto-plástico pode ser tratado com relação ao sistema corrotacional e os grandes deslocamentos através da transformação do sistema local para o global. Oliveira (2015) desenvolveu uma formulação de viga corrotacional via zona plástica para seções mistas de concreto e aço, onde a teoria clássica de Euler Bernoulli foi adotada.

O objeto do presente trabalho é aplicar o tratamento corrotacional apresentado em Crisfield (1991), o modelo inelástico uniaxial desenvolvido em Simo & Hughes (1997) e o método da zona plástica descrito nas formulações apresentadas por Owen & Hinton (1980) e Oliveira (2015) ao estudo de sistemas estruturais simples de concreto armado. Para tanto, uma formulação de viga não linear que inclui as características é utilizada. Inicialmente serão estudados membros isolados. O último exemplo consiste de um pórtico formado por seções retangulares de concreto com barras de reforço de aço. Para a solução desses problemas é realizada uma análise estática não linear no contexto do método dos elementos finitos. A solução do problema não linear é computada através de um ciclo incremental - iterativo com o auxílio do método de Newton - Raphson e uso das estratégias de comprimento de arco cilíndrico e norma mínima dos sub-incrementos (Silva, 2009).

A organização do presente trabalho é dada como se segue. Na Seção 2 o modelo elasto-plástico uniaxial dos materiais é explicado, bem como a condição de falha e o algoritmo de

retorno utilizados. Na Seção 3 o referencial corrotacional é apresentado, e suas características referentes a transformação dos sistemas são mostradas. Na sequência, na Seção 4, a formulação não linear de viga com discretização em camadas desenvolvida é descrita. Os procedimentos de inclusão dos efeitos inelásticos dos materiais via zona plástica e dos efeitos de segunda ordem do referencial corrotacional são detalhados. Ainda nessa seção, as expressões para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez são apresentadas. Na Seção 5 esta formulação é aplicada à estruturas simples de concreto armado. Por fim, na Seção 6, os resultados obtidos são discutidos.

2 MODELO INELÁSTICO

Para sistemas estruturais reticulados, mobilizados principalmente pela flexão, relações constitutivas uniaxiais são suficientes para descrever o comportamento elasto-plástico dos materiais. No presente trabalho é considerado que o concreto, quando submetido a plastificação, sofre *softening* na forma exponencial (Oliveira, 2015). Esse comportamento pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\sigma_{yc}(\alpha) = \sigma_{0c}e^{-\mu_c\alpha_c} \quad (1)$$

em que σ_{yc} é a tensão de plastificação atual, σ_{0c} é a tensão de plastificação inicial, α_c é o parâmetro de plastificação e μ_c é o coeficiente de *softening*. O módulo plástico do concreto K_c é dado por:

$$K_c = \frac{d\sigma_{yc}}{d\alpha_c} = -\mu_c\sigma_{0c}e^{-\mu_c\alpha_c} \quad (2)$$

Quando a deformação de ruptura é atingida, o material perde completamente a capacidade de carga e rigidez, como mostrado na Fig. 1a. Ainda, por ser pequena se comparada à resistência a compressão, a resistência a tração do concreto é desprezada.

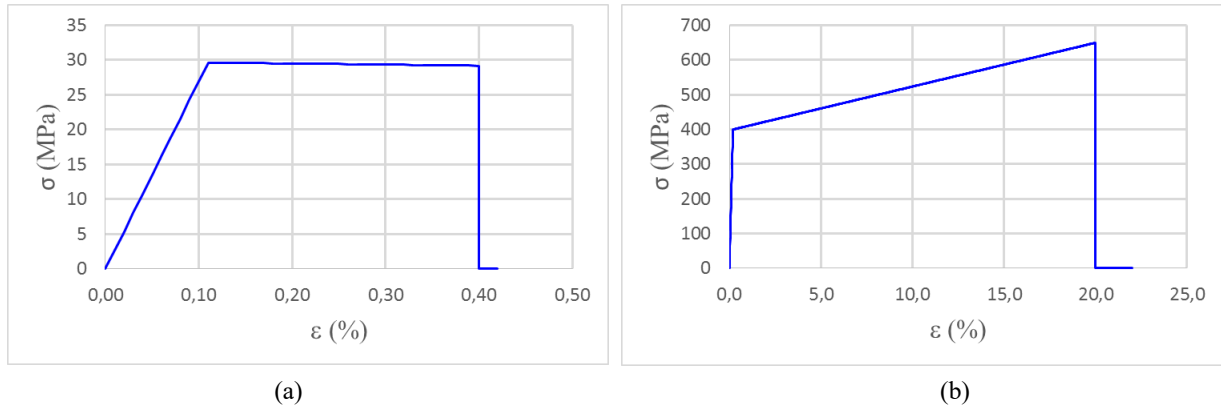


Figura 1: Comportamento inelástico: (a) Concreto submetido a compressão; (b) Aço

Quando sujeito a plastificação, é considerado que o aço sofre um encruamento linear, de tal forma que o ganho de resistência pode ser expresso como:

$$\sigma_{ys}(\alpha) = \sigma_{0s} + K_s\alpha_s \quad (3)$$

sendo σ_{ys} e K_s a tensão de escoamento e o módulo plástico, respectivamente. Analogamente ao concreto, é adotado um critério de ruptura baseado em uma deformação limite. Assim, quando

esta deformação é atingida, o aço perde completamente a capacidade de carga e rigidez, como ilustrado na Fig. 1b.

No modelo uniaxial dos materiais é assumido que as deformações sofridas são pequenas, de modo que uma divisão aditiva pode ser empregada (Simo & Hughes, 1997; Kojic & Bathe, 2005). Assim, a deformação total ε é composta por uma parcela elástica ε^e e uma parcela plástica ε^p , ou seja:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4)$$

A relação constitutiva elástica relaciona a tensão atuante σ com a deformação elástica ε^e através do módulo de elasticidade longitudinal E , portanto:

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (5)$$

O limite de resistência dos materiais é representado pela curva de escoamento f (Souza Neto et al., 2008):

$$f(\sigma, \alpha, q) = |\sigma - q| - \sigma_y(\alpha) \leq 0 \quad (6)$$

com q sendo a tensão de referência atual. Para que um conjunto de variáveis internas (σ, α, q) seja admissível aos limites de resistência do material, deve-se ter $f \leq 0$. Diz-se que o material está sofrendo plastificação quando as variáveis internas (σ, α, q) se encontram sobre a curva de escoamento, ou seja, $f = 0$. A taxa de evolução das variáveis plásticas (ε^p, α, q) é dada por (Simo & Hughes, 1997):

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma - q) \quad (7)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \quad (8)$$

$$\dot{q} = \gamma H \text{sign}(\sigma - q) \quad (9)$$

onde $\gamma \geq 0$ representa o multiplicador plástico e H é módulo de encruamento cinemático. Finalizando a descrição do modelo adotado para os materiais, a seguinte condição de Kuhn - Tucker deve ser satisfeita (Simo & Huges, 1997):

$$\gamma f = 0 \quad (10)$$

A equação anterior garante que as variáveis plásticas só podem ser modificadas quando o material sofre plastificação, ou seja, $f = 0$. Caso o material sofra uma resposta elástica ($f < 0$), deve-se ter $\gamma = 0$.

Para obtenção da resposta da estrutura é necessário determinar um novo estado de deformação ($\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}, q_{n+1}$) de um ponto material sujeito a um histórico de deformação ($\varepsilon_n^p, \alpha_n, q_n$) e uma nova deformação ε_{n+1} . Assim, com auxílio do método implícito de Euler, as Eqs. (7-9) podem ser expressas como:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1} - q_{n+1}) \quad (11)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_{n+1} \quad (12)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta\gamma_{n+1} H \text{sign}(\sigma_{n+1} - q_{n+1}) \quad (13)$$

Inicialmente um preditor elástico é adotado tomando o incremento de plastificação nulo ($\Delta\gamma_{n+1} = 0$), de modo que a evolução da plastificação é congelada e um estado teste (ε_{n+1}^{p0} ,

$\alpha_{n+1}^0, q_{n+1}^0$) é obtido. Com auxílio da Eqs. (4 - 5) a tensão teste pode ser expressa como:

$$\sigma_{n+1}^0 = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (14)$$

Ainda, é possível mostrar (Simo & Hughes, 1997) que:

$$\text{sign}(\sigma_{n+1}^0 - q_{n+1}^0) = \text{sign}(\sigma_{n+1} - q_{n+1}) \quad (15)$$

Como a solução do problema plástico é única (Souza Neto et al., 2008), se o limite de resistência $f(\sigma_{n+1}^0, \alpha_{n+1}^0, q_{n+1}^0) \leq 0$ do material for atendido, o estado teste é equivalente ao novo estado de deformação do ponto material. Caso contrário, um corretor plástico é aplicado considerando um incremento de plastificação $\Delta\gamma_{n+1}$ não nulo. O método de Newton-Raphson é utilizado na determinação do incremento plástico de modo que $f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, q_{n+1}) = 0$. Em uma iteração j , o novo incremento de plastificação $\Delta\gamma_{n+1}^j$ é obtido como (Kojic & Bathe, 2005):

$$\Delta\gamma_{n+1}^j = \Delta\gamma_{n+1}^{j-1} - \frac{f_{n+1}^{j-1}}{E + K + H} \quad (16)$$

em que $\Delta\gamma_{n+1}^{j-1}$ e f_{n+1}^{j-1} são o incremento plástico e a função de escoamento avaliados na iteração $j - 1$, respectivamente. Uma vez determinado um novo incremento plástico, um novo estado de deformação pode ser obtido através das Eqs. (11 - 13) e da Eq. (15). Ainda, um novo valor para a tensão e para a função de escoamento podem ser obtidos a partir das Eqs. (4 - 6). As iterações são realizados até que o valor absoluto da função de escoamento seja suficientemente pequeno.

Para a determinação da rigidez do sistema estrutural em um passo de carga $n + 1$ é preciso calcular o módulo tangente C_{n+1} de cada ponto material. O módulo tangente consiste da taxa de variação instantânea das tensões σ_{n+1} com relação a variação das deformações ε_{n+1} . É possível mostrar que o módulo tangente varia com o estado do ponto material obtido no algoritmo de retorno (Simo & Hughes, 1997), isto é:

$$C_{n+1} = \frac{\partial\sigma_{n+1}}{\partial\varepsilon_{n+1}} = \begin{cases} E & \text{se } f_{n+1}^0 \leq 0 \\ \frac{E(K+H)}{E+K+H} & \text{se } f_{n+1}^0 > 0 \end{cases} \quad (17)$$

Por fim, se um ponto material atingi sua deformação de ruptura em algum passo do processo de análise, o algoritmo de retorno fornece uma tensão e módulo tangente nulos e o ponto material é marcado como rompido. Deste momento em diante, este ponto material é incapaz e fornecer qualquer capacidade de carga ou rigidez. Para o concreto, em especial, caso a deformação atuante seja de tração, o ponto material é marcado como rompido.

3 REFERENCIAL CORROTACIONAL

O movimento sofrido por um elemento estrutural pode ser decomposto em duas parcelas. Uma parcela é devida aos movimentos de corpo rígido, onde o elemento sofre translação e rotação como um todo, sem que sua configuração seja alterada. A outra parcela é a dos movimentos que geram deformações (Crisfield, 1991). Na análise estrutural é de interesse particular o segundo tipo de movimento, uma vez que é esse que gera esforços na estrutura.

Para eliminar os movimentos de corpo rígido do movimento total do elemento, é introduzido o referencial corrotacional, como mostrado na Fig. 2. Esse referencial acompanha o movimento do elemento, de tal modo que, com relação ao mesmo, somente movimentos que causam deformações são detectados (Battini, 2002).

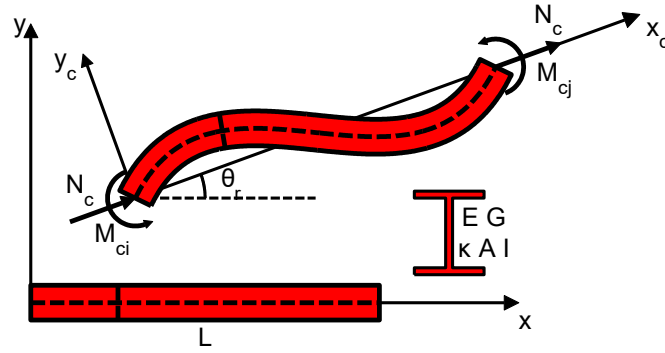


Figura 2: Referencial corrotacional

O sistema corrotacional pode ser definido como:

$$\bar{x} = (x - x_i) \cos(\beta) + (y - y_i) \sin(\beta) \quad (18)$$

$$\bar{y} = (y - y_i) \cos(\beta) - (x - x_i) \sin(\beta) \quad (19)$$

com (x_i, y_i) e (x_j, y_j) sendo as posições atuais dos pontos nodais i e j , e β é a orientação atual do elemento, dada por:

$$\beta = \arctan\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right) \quad (20)$$

Nesse sistema, os deslocamentos nodais não nulos são dados por (Crisfield, 1991):

$$\bar{u}_j = L - L_0 \quad (21)$$

$$\bar{\theta}_i = \theta_i - \theta_r \quad (22)$$

$$\bar{\theta}_j = \theta_j - \theta_r \quad (23)$$

sendo que L e L_0 são os comprimentos atual e inicial do elemento respectivamente, e θ_r é a rotação de corpo rígido, que é definida por:

$$\theta_r = \beta - \beta_0 \quad (24)$$

em que β_0 é a orientação inicial do elemento.

Nas formulações corrotacionais é importante relacionar o sistema local com o sistema global, para que o equilíbrio do sistema possa ser obtido com relação ao último. Isso é feito através da variação dos deslocamentos corrotacionais $\bar{\mathbf{u}}$ com relação aos deslocamentos globais $\mathbf{u}$, ou seja:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (25)$$

em que $\mathbf{T}$ é a matriz de transformação (Battini, 2002):

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{a} \quad \mathbf{c}_i - \frac{1}{L} \mathbf{b} \quad \mathbf{c}_j - \frac{1}{L} \mathbf{b} \right]^T \quad (26)$$

com os vetores direcionais $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_i$ e $\mathbf{c}_j$ dados por:

$$\mathbf{a} = \left[-\cos(\beta) \quad -\sin(\beta) \quad 0 \quad \cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad 0 \right]^T \quad (27)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sin(\beta) & -\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (28)$$

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

O vetor de forças internas no sistema global, $\mathbf{F}_i$, pode ser relacionado ao mesmo no sistema local, $\bar{\mathbf{F}}_i$, através do trabalho virtual interno δW_{int} (Battini, 2002), como mostrado a seguir:

$$\delta W_{int} = \mathbf{F}_i^T \cdot \delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}}_i^T \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}}_i^T \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (31)$$

isto é:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{T}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_i \quad (32)$$

Já a matriz de rigidez tangente no sistema global, $\mathbf{K}$, é obtida a partir da variação do vetor de forças internas no sistema global e pode ser relacionada à matriz de rigidez tangente no sistema local $\bar{\mathbf{K}}$ como:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \cdot \bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{T} + \frac{\bar{N}}{L} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T + \frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{L^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T) \quad (33)$$

com $\bar{N}$, $\bar{M}_i$ e $\bar{M}_j$ sendo o esforço normal e os esforços de flexão no sistema local, respectivamente.

O procedimento descrito acima é o mesmo apresentado em Crisfield (1991) e Oliveira (2015). Na equação anterior, a primeira parcela se refere aos incrementos de deformações sofridos pelo elemento. As demais parcelas formam a matriz de rigidez geométrica, que se refere as mudanças de direções das forças atuantes no elemento. Diferentes formulações podem ser obtidas a partir de diferentes considerações do comportamento do elemento no sistema local, contudo, todas elas possuem a mesma transformação para o sistema global (Eqs. 32 - 33).

4 ELEMENTO DE VIGA COM DISCRETIZAÇÃO EM CAMADAS

Uma formulação não linear de elemento de viga de concreto armado é utilizada no presente trabalho considerando os modelos constitutivos discutidos anteriormente e o uso do sistema corrotacional. As seções transversais do elemento são discretizadas em camadas com espessura Δh e largura Δw , como mostrado na Fig. (3). Para a determinação do vetor de forças internas e da matriz de rigidez do elemento, as integrais envolvidas são avaliadas em pontos de integração específicos ao longo do comprimento, segundo o método de Gauss (2014 & Silva, 2014). As integrações ao longo das seções transversais são realizadas computando a função integrada em cada camada, e ponderando os valores obtidos com relação à área e à porção de cada material na camada (Oliveira, 2015). Ainda, é assumido que não há deslizamento entre o concreto e o aço, de modo que os dois materiais estão sujeitos aos mesmos campos de deslocamentos e deformações.

Os deslocamentos locais no elemento $(\bar{u}, \bar{v})$ em um ponto (x, y) podem ser interpolados a partir dos deslocamentos nodais no sistema corrotacional segundo a teoria de viga de Euler - Bernoulli. Conforme apresentado a seguir, para atender os requisitos de continuidade, uma interpolação linear é adotada para a componente axial, e uma interpolação cúbica para a com-

ponente transversal, assim tem-se:

$$\bar{u} = \left(\frac{x}{L_0}\right) \bar{u}_j - y \left\{ \left[3 \left(\frac{x}{L_0}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L_0}\right) + 1 \right] \bar{\theta}_i + \left(\frac{x}{L_0}\right) \left[3 \left(\frac{x}{L_0}\right) - 2 \right] \bar{\theta}_j \right\} \quad (34)$$

$$\bar{v} = L_0 \left(\frac{x}{L_0}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{L_0}\right) \right]^2 \bar{\theta}_i - L_0 \left(\frac{x}{L_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{x}{L_0}\right) \right] \bar{\theta}_j \quad (35)$$

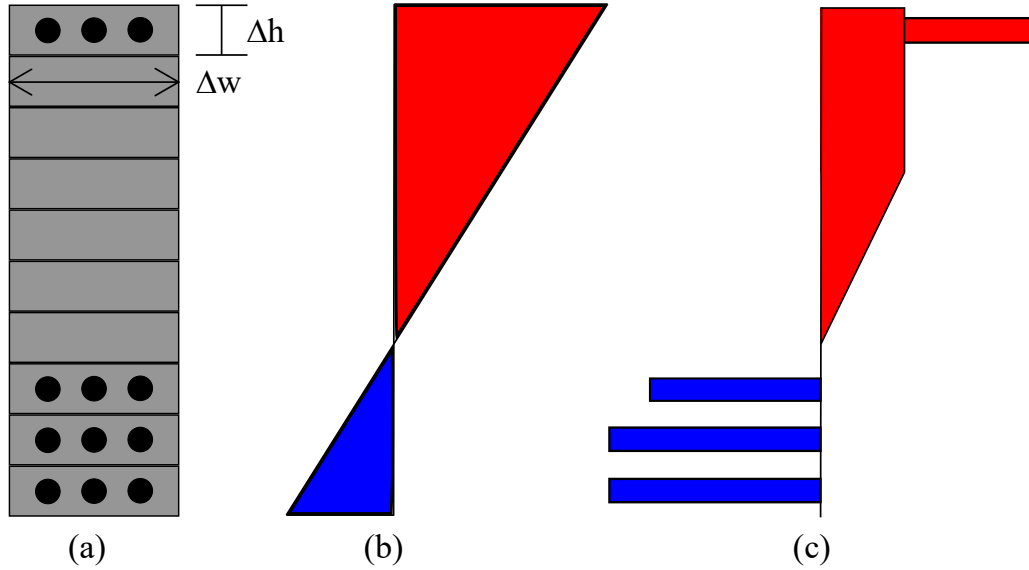


Figura 3: (a) Discretização da seção transversal em camadas; (b) Deformações; (c) Tensões

Portanto, a deformação total pode ser expressa como:

$$\varepsilon = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \left[\frac{1}{L_0} \quad \frac{-y}{L_0} \left[6 \left(\frac{x}{L_0}\right) - 4 \right] \quad \frac{-y}{L_0} \left[6 \left(\frac{x}{L_0}\right) - 2 \right] \right] \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (36)$$

Em cada camada, a deformação é calculada e, a partir da mesma, as tensões no concreto e no aço podem ser determinadas com auxílio do algoritmo de retorno. A contribuição dos materiais é ponderada através da fração de concreto f_c e de aço f_s nas camadas (Oliveira, 2015). O vetor de forças internas é computado através do somatório dos esforços em cada ponto material nos n_i pontos de integração e nas n_l camadas, e dessa forma escreve-se (Oliveira, 2015):

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \int_0^{L_0} \int_{A_0} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dA_0 dx_0 \approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_l} \mathbf{B}_{ij} \cdot (f_s \sigma_s + f_c \sigma_c) \Delta w_j \Delta h_j P_i \quad (37)$$

onde P_i é o peso do ponto de integração i , e σ_c e σ_s são as tensões no concreto e no aço, respectivamente. De modo análogo, a matriz de rigidez tangente pode ser obtida como (Oliveira, 2015):

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \int_0^{L_0} \int_{A_0} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dA_0 dx_0 \approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_l} \mathbf{B}_{ij}^T \cdot (f_s C_s + f_c C_c) \cdot \mathbf{B}_{ij} \Delta w_j \Delta h_j P_i \quad (38)$$

onde C_c e C_s são os módulos tangente do concreto e do aço, respectivamente.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Alguns exemplos de aplicação da formulação descrita acima em estruturas reticuladas de concreto armado são apresentados nesta seção. No primeiro exemplo, uma viga bi-apoiada é submetida a uma carga concentrada no meio do vão, de modo que se pode observar a formação de uma rótula plástica no ponto de aplicação da carga. O segundo exemplo consiste em uma coluna engastada e livre sujeita a uma carga de compressão excêntrica na extremidade livre, causando a instabilidade do sistema. A carga de flambagem da coluna é verificada, bem como o comportamento pós-crítico. Por fim, o colapso plástico de um pórtico simples é analisado. A formação das rótulas plásticas, os efeitos de segunda ordem e o colapso do sistema são identificados. Em todos os exemplos, três pontos de Gauss são usados ao longo do comprimento dos elementos para garantir uma boa precisão dos resultados obtidos na integração numérica.

5.1 Viga bi-apoiada

Para a validação do comportamento elasto-plástico dos materiais na formulação desenvolvida, foi estudado o desenvolvimento de uma rótula plástica em uma viga bi- apoiada, submetida a uma carga concentrada na metade do vão, como mostrado na Fig. (4). A seção transversal de concreto armado escolhida é mostrada na Fig. (5), junto com as deformações e tensões do estado plástico. As barras de reforço inferiores possuem diâmetro de 20 mm e as superiores e 12.5 mm, ainda uma distância de cobrimento e 30 mm é adotada. É adotado um concreto com resistência característica (f_{ck}) de 32 MPa e um aço com tensão de escoamento (σ_y) de 400 MPa. Para a consideração do comportamento plástico perfeito, o *softening* do concreto e o encruamento do aço são desativados considerando $\mu_c = 0$, $K_s = 0$ MPa e $H_c = H_s = 0$ MPa. Os módulos de elasticidade longitudinal dos materiais são tomados segundo as recomendações dos códigos brasileiros para o concreto (NBR 6118, 2003) e para o aço (NBR 8800, 2008), a saber:

$$E_c = 4.76 \times 10^6 \sqrt{f_{ck}} = 26.93 GPa \quad (39)$$

$$E_s = 200 GPa \quad (40)$$

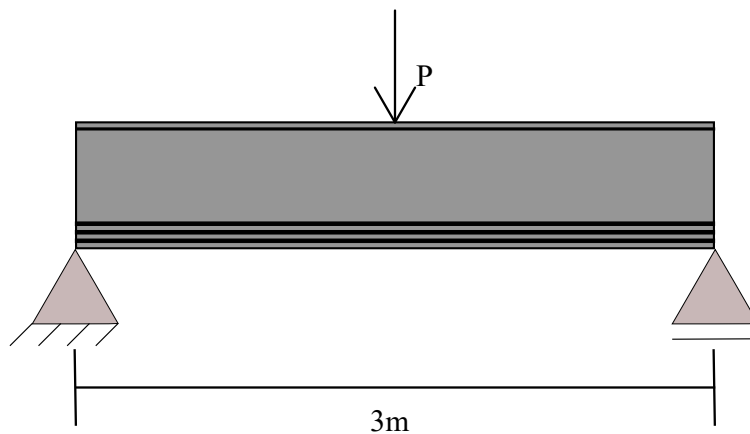


Figura 4: Viga bi-apoiada submetida a carga centrada na metade do vão

Ainda, a deformação de ruptura do concreto (ε_c) e do aço (ε_s) são 0.4% e 20%, respectivamente. O momento resistente da seção, considerando a plastificação completa do concreto e do aço, é de $M_r = 623$ kNm, sendo que a carga que gera uma rótula plástica no centro do vão é de

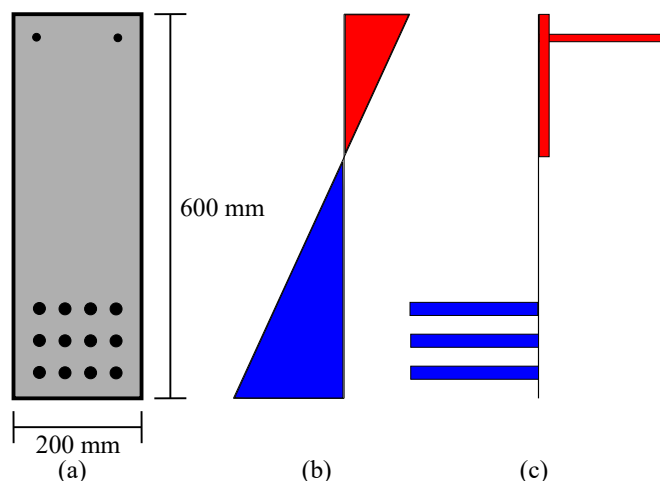


Figura 5: Seção de concreto armado da viga bi-apoiada: (a) Detalhamento; (b) Deformações; (c) Tensões

$P_r = 4M_r/3 \text{ m} = 831 \text{ kN}$. Para a análise, a viga foi modelada com dez elementos, sendo que a seção transversal foi discretizada em sessenta camadas para enfatizar a perda de capacidade de carga ao longo do colapso. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. (6), em que o parâmetro de carregamento é definido como $\lambda = P/P_r$.

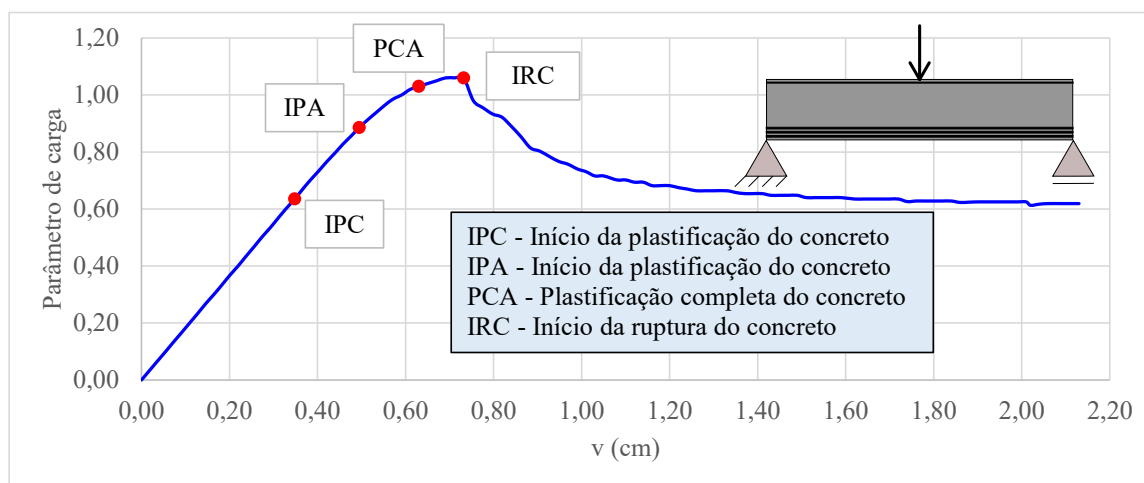


Figura 6: Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga concentrada

Como pode ser observado, quando as primeiras camadas de concreto sofrem plastificação (IPC, $\lambda = 0.67$), a rigidez do sistema praticamente não se altera, uma vez que o aço possui um módulo de elasticidade consideravelmente maior que o do concreto. Quando as camadas com as barras de aço começam a sofrer plastificação (IPA, $\lambda = 0.91$), a perda de rigidez do sistema se torna acentuada. O processo de deformação segue até que as barras de aço sofram a plastificação completa (PCA, $\lambda = 1.04$).

Antes que a plastificação completa do concreto seja alcançada, as primeiras camadas começam a romper (IRC, $\lambda = 0.98$), e a capacidade de carga do sistema diminui. Na sequência, a medida que as camadas de concreto vão se rompendo, as barras de aço passam a ser completamente responsáveis pela resistência da seção transversal.

5.2 Coluna engastada e livre

Analisa-se agora uma coluna engastada na base e submetida à um carregamento excêntrico, caracterizado por uma força de compressão P e um pequeno momento de flexão M , na outra extremidade. A seção transversal de concreto armado da coluna conta com doze barras de aço dispostas simetricamente. A Figura 7 ilustra o modelo adotado e os detalhes da seção. As barras de aço possuem um diâmetro de 20 mm e a seção possui uma distância de comprimento de 30 mm. Ainda, as características do concreto e do aço são as mesmas que foram adotadas para o exemplo anterior. Mais uma vez, o comportamento plástico perfeito é considerado. Para este exemplo, a carga de última da coluna, considerando a plastificação completa do concreto e do aço, é de $P_r = 4267$ kN.

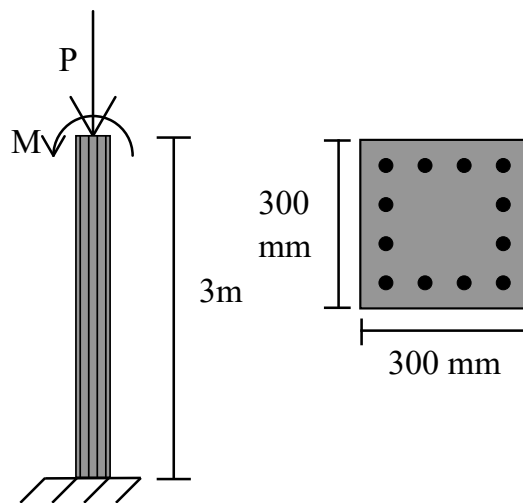


Figura 7: Coluna sujeita a carregamento excêntrico e detalhamento da seção transversal

Foram realizadas duas análises: uma considerando a carga centrada; e outra com a carga excêntrica, em que se assume uma excentricidade de 1 cm. Em ambos os casos, a coluna foi modelada com dez elementos e a seção transversal foi discretizada em sessenta camadas para uma obtenção mais precisa do comportamento pós-crítico. Os resultados obtidos são mostrados na Fig. (8), em que o parâmetro de carga é dado por $\lambda = P/P_r$.

Para a carga centrada, a força aplicada cresce até que o concreto começa a plastificar (IPC, $\lambda = 0.87$), e parte da rigidez do sistema é perdida. A força aplicada continua a ser incrementada até que a plastificação das barras de concreto é atingida (IPA, $\lambda = 1.00$), e a rigidez do sistema se torna nula. O patamar de escoamento obtido é condizente com a capacidade de resistência da seção considerando a plastificação completa dos materiais.

Quando a força apresenta à carga excêntrica, a capacidade de carga do pilar diminui consideravelmente. Como no caso anterior, conforme a força aplicada cresce o concreto sofre plastificação (IPC, $\lambda = 0.46$). A seguir, a instabilidade gera efeitos de segunda ordem, e parte da seção transversal começa a sofrer tração. Assim, as primeiras camadas de concreto começam a apresentar resistência nula e as barras de aço começam a plastificar (IPA, $\lambda = 0.55$). Deste ponto em diante, a estrutura sofre perda da capacidade de carga, e o processo de deformação continua, de forma que as camadas de concreto sujeitas a compressão começam a romper (IRC, $\lambda = 0.40$). Conforme a deformação do sistema prossegue, a sua capacidade de carga continua a reduzir, até que as barras de aço atingem a plastificação completa (PCA, $\lambda = 0.24$). A perda

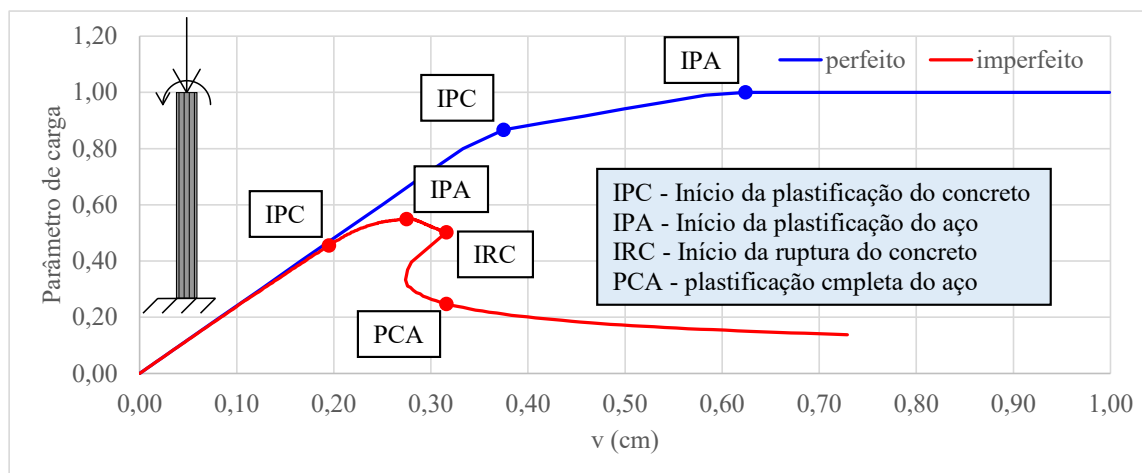


Figura 8: Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga

de carga prossegue conforme as camadas de concreto continuam a romper. A Figura 9 mostra o deslocamento horizontal e a rotação do ponto de aplicação da carga para o sistema imperfeito.

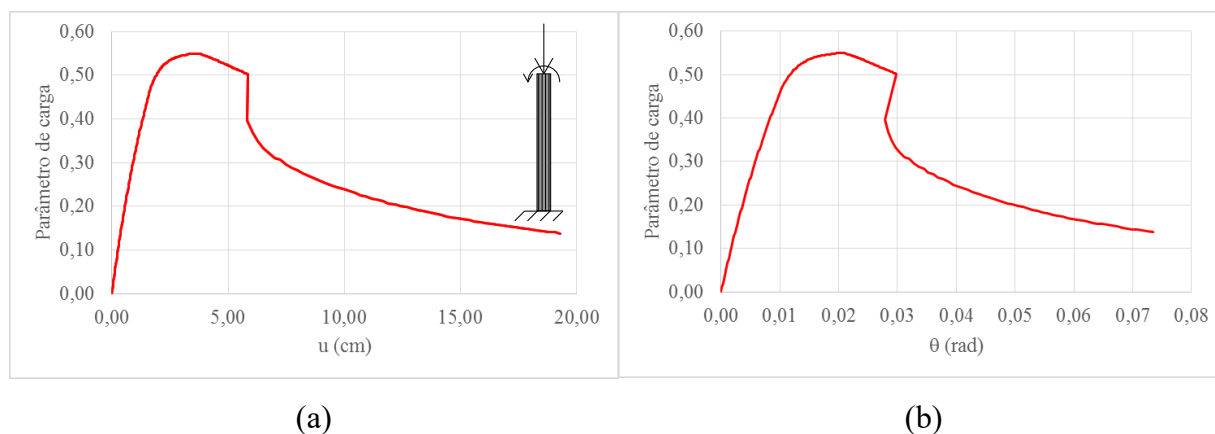


Figura 9: (a) Deslocamento horizontal (u); (b) rotação (θ) do ponto de aplicação da carga

5.3 Pórtico plano

Este último exemplo consiste de um pórtico plano de concreto armado, sujeito à uma carga uma carga centrada e à perda da coluna central, como ilustrado na Fig. (10). Embora este problema possui uma natureza dinâmica, um processo de degradação gradual da coluna foi empregado dentro de uma análise estática não linear. Neste processo as camadas de concreto e aço dos elementos centrais da coluna foram marcadas como rompidas progressivamente ao longo da análise até a remoção completa da coluna. A introdução do dano na coluna foi aplicado em conjunto com o início da plastificação do concreto. A seção transversal das vigas é a mesma que a da viga bi-apoiada da Seção 5.1; já a seção transversal das colunas é a mesma que a da coluna da Seção 5.2. O encruamento dos materiais é considerado tomando o coeficiente de *softening* do concreto como $\mu_c = 5$ (Oliveira, 2015) e o módulo plástico do aço como $K_s = 1015$ MPa.

Para esta análise, as vigas e colunas foram modeladas com dez elementos e as seções foram discretizadas em sessenta camadas, visando captar com precisão a perda de capacidade de

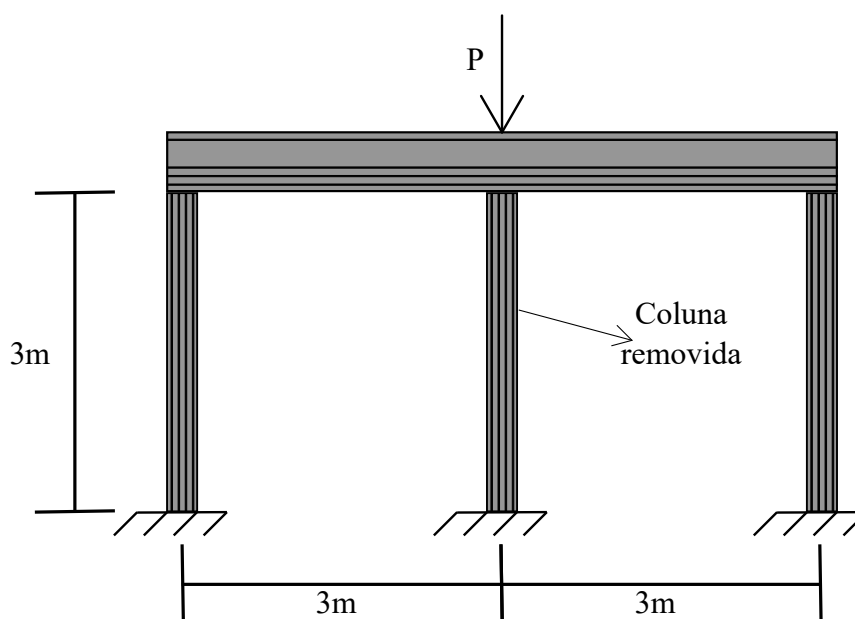


Figura 10: Pórtico de concreto armado

carga do sistema. Ainda, a carga de referência aplicada foi igual a de plastificação da coluna no exemplo anterior. A trajetória de equilíbrio da estrutura, bem como o comportamento dos materiais no ponto de aplicação da carga, são mostrados na Fig. (11).

Para o sistema perfeito (sem remoção da coluna), inicialmente a carga é incrementada até que a plastificação do concreto na coluna central seja atingida (IPC, $\lambda = 0.84$). A medida o processo de deformação do sistema continua as barras de aço atingem a plastificação (IPA, $\lambda = 1.07$). Neste ponto o sistema possui uma pequena rigidez associada ao encruamento do aço e o ao *softening* do concreto. Quando a deformação última do concreto é atingida (IRC, $\lambda = 1.07$) o sistema sofre uma queda brusca de sua capacidade de carga.

No sistema imperfeito a processo de remoção da coluna, através da remoção das camadas de concreto e aço, começa quando a plastificação do concreto é atingida (IPC, $\lambda = 0.84$). A medida que as camadas são removidas, a capacidade de carga do sistema se reduz progressivamente, de modo que as barras de aço no centro da coluna começam a plastificar (IPA, $\lambda = 0.90$). A análise prossegue até a remoção completa da coluna.

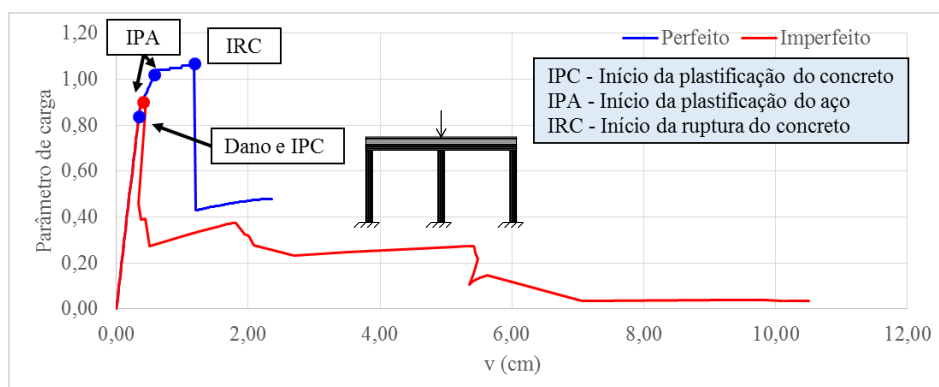


Figura 11: Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga centrada

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma formulação corrotacional não linear foi desenvolvida para a análise elasto-plástica de sistemas estruturais planos de concreto armado. A sensibilidade da formulação à não linearidade física foi testada no estudo de uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga centrada. O valor de início de escoamento da seção foi condizente com aquele fornecido pela literatura. Ainda, o comportamento pós ruptura pode ser observado. Os efeitos de segunda ordem foram testados através de uma coluna sujeita à uma carga excêntrica. A trajetória de equilíbrio pós crítica obtida mostrou que o sistema sofre uma grande perda da capacidade de carga quando uma instabilidade se faz presente, caracterizando o comportamento não linear geométrico. Por fim, um pórtico de concreto armado sujeito à remoção de uma coluna foi analisado. A formulação se mostrou capaz de prever a perda de rigidez associada à plastificação dos materiais, bem como a perda de resistência associada à ruptura do concreto e ao descarregamento do aço.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES, Fapemig, FAPREJ-CNE e a PUC-Rio o apoio recebido para a realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Battini, J-M., 2002. *Corotational Beam Elements in Instability Problems*. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology.
- Crisfield, M. A., 1991. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. vol. I. John Wiley & Sons.
- Oliveira, C. A. M., 2015. *The Influence of Geometrically Nonlinear Effects on the Progressive Collapse of Reinforced Concrete Structures*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Kojic, M., & Bathe, K. J., 2005. *Inelastic analysis of solids and structures*, Springer.
- NBR 6118, 2003. *Projeto de estruturas de concreto* Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), Rio de Janeiro, Brasil.
- NBR 8800, 2008. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), Rio de Janeiro, Brasil.
- Neto, E. A. S., & Peric, D., & Owen, D. R. J., 2008. *Computational methods for plasticity*, Wiley.
- Owen, D. R. J., & Hinton, E., 1980. *Finite elements in plasticity: theory and practice*
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para a Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silva, S. S., & Silva, W. T. M., 2014. Nonlinear analysis of plane frames using a corotational formulation and plasticity by layers in a timoshenko beam element. *10th World Congress in Structural Mechanics*.

Stramandinoli, R.S.B., & Rovere, H. L. L., 2012. FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation. *Engineering Structures*, vol. 35, pp. 244-253.

Simo, J.C., & Hughes, T.J.R., 1997. *Computacional inelasticity*, Springer.