



PROCEDIMENTO EFICIENTE PARA ESTIMAR O COMPORTAMENTO CARGA-DEFORMAÇÃO DE PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS A ESFORÇOS DE MEMBRANA USANDO O MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO E ÂNGULO VARIÁVEL

Jordlly Reydson de Barros Silva

jordlly@hotmail.com

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Engenharia Civil – UFPE

Av. Acadêmico Hélio Ramos, 50740-530

Recife - PE, Brasil

Bernardo Horowitz

horowitz@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Engenharia Civil – UFPE

Av. Acadêmico Hélio Ramos, 50740-530

Recife - PE, Brasil

Resumo. *O presente trabalho trata sobre a elaboração de um procedimento eficiente para estimar o comportamento carga-deformação de painéis retangulares de concreto armado submetidos a esforços de membrana usando o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável. O Procedimento se baseia na solução do sistema de equações não lineares presente no modelo, usando como estimativa inicial para a solução o comportamento obtido em um modelo de treliça elástico linear da mesma estrutura. Os resultados obtidos são comparados com dados de análises presentes na literatura, e assim, é verificada a viabilidade do procedimento.*

Palavras-chave: *Painéis de concreto armado, Esforços de membrana, Coeficiente de amolecimento, Análise não linear, procedimento eficiente.*

1 INTRODUÇÃO

No projeto e concepção estrutural, é comum que o engenheiro estime o comportamento de estruturas mais complexas com base na associação e combinação de estruturas menores e mais simples. Vários métodos de análise estrutural são baseados nesse conceito. Por exemplo, estruturas de contensão de reatores, estruturas em casca ou nervuras de pontes com seção caixão (sem a presença de torção considerável) podem ser inicialmente idealizadas com base em modelos mais simples como elementos bidimensionais de concreto armado submetidos a esforços de membrana. Pode-se encontrar na literatura, procedimentos baseados em modelos de treliça que conseguem determinar o comportamento dessas estruturas bidimensionais. Nesse trabalho, optou-se por usar o modelo de treliça com efeito de amolecimento e ângulo variável.

Esse modelo é baseado nos três pilares da mecânica das estruturas: Equilíbrio das tensões, compatibilidade das deformações e relações constitutivas dos materiais. Muitas vezes, a solução do sistema formado pelas equações desses três grupos é baseada em tentativa e erro. Essa técnica tende a encontrar corretamente a solução, porém, quando o número de estimativas é muito grande, o método perde eficiência e pode se tornar uma opção inviável.

O presente trabalho trata sobre um procedimento eficiente para estimar o comportamento carga-deformação de painéis retangulares de concreto armado submetidos a esforços de membrana. O procedimento se baseia em estabelecer o problema como um sistema de equações não lineares e resolvê-lo utilizando algoritmos presentes no Toolbox de otimização do MATLAB, usando como estimativa inicial para a solução o comportamento obtido em um modelo de treliça elástico linear da mesma estrutura.

As equações baseadas no equilíbrio das tensões e compatibilidade das deformações são obtidas através do círculo de Mohr. As relações constitutivas dos materiais consideram o amolecimento do concreto submetido a um estado biaxial de tração-compressão e uma regularização da curva tensão-deformação dos aços, para evitar problemas de convergência. A resistência à tração do concreto é desprezada.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma opção viável de procedimento de solução para esse problema, considerando a sua eficiência computacional e precisão dos resultados em relação a dados de análises presentes na literatura.

2 MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO E ÂNGULO VARIÁVEL

O comportamento pré-pico de elementos bidimensionais de concreto armado pode ser estudado com base no modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável (*Rotating-Angle Softened Truss Model – RA-STM*). Esse modelo foi desenvolvido originalmente por Hsu e Mo (1985), e deste então vem sendo aprimorado para conseguir retratar os mais diversos efeitos, como: a contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento, Pang e Hsu (1996); Hsu e Zhang (1997), o comportamento pós-pico usando o efeito do Poisson, Hsu e Zhu (2002) e o efeito de enrijecimento a tração, Greene e Belarbi (2006).

O modelo recebe esse nome, pois, o mecanismo de resistência idealizado da estrutura se assemelha a uma treliça, onde as armaduras trabalham em tração e o concreto trabalha em compressão. A teoria é baseada nos três pilares da mecânica das estruturas: Equilíbrio das tensões, compatibilidade das deformações e relações constitutivas dos materiais.

2.1 Equilíbrio das tensões

A Figura 1(a) mostra um elemento bidimensional de concreto armado submetido a esforços de membrana, onde os eixos L e T fazem referência à orientação das armaduras longitudinais e transversais. Esse elemento pode ser entendido como a superposição de um elemento de concreto e uma malha ortogonal de aço, conforme mostra a Fig. 1(b) e (c). Os esforços de membrana aplicados no elemento de concreto armado, segundo o sistema de coordenadas L-T (σ_L, σ_T e τ_{LT}), podem também ser separados em componentes do elemento de concreto (σ_L^c, σ_T^c e τ_{LT}^c) e componentes da malha de aço ($\rho_L f_L$ e $\rho_T f_T$). As solicitações σ_L e σ_T representam as tensões normais, longitudinais e transversais, aplicadas no elemento, enquanto τ_{LT} retrata a tensão de cisalhamento.

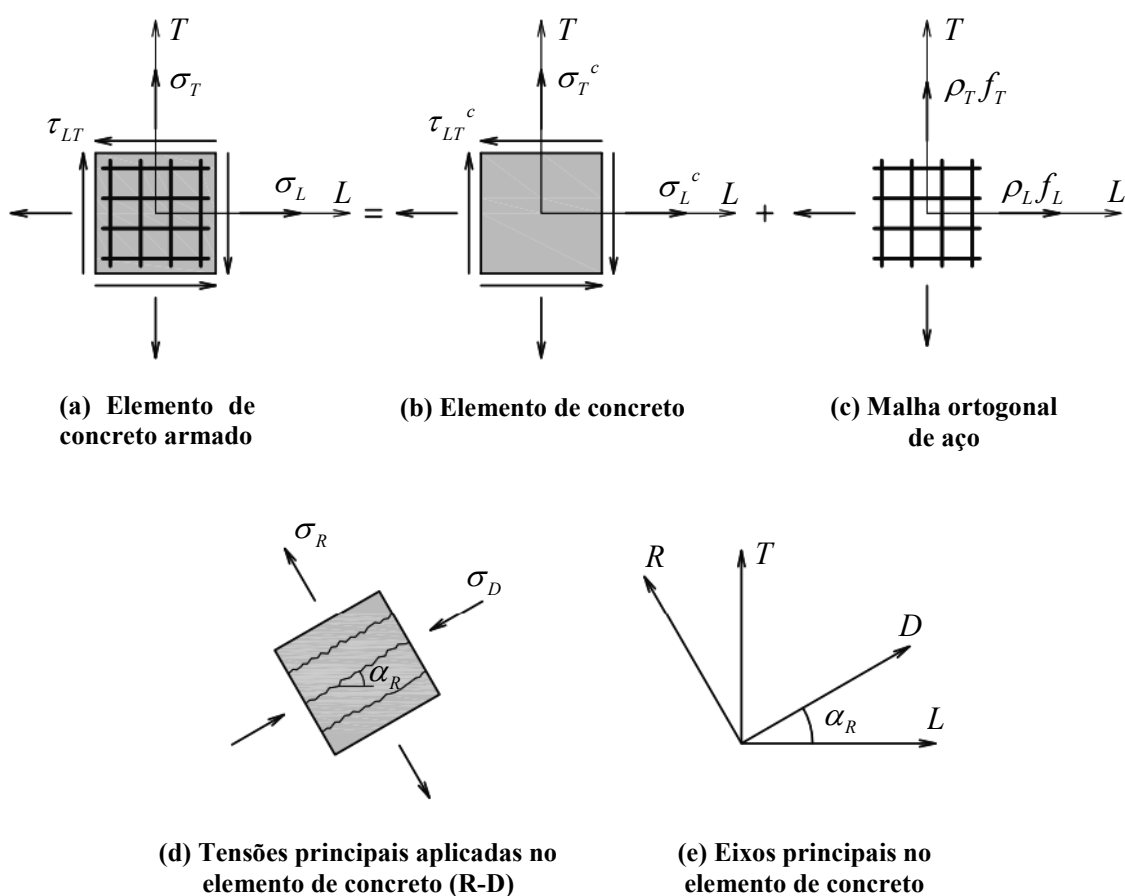


Figure 1. Elemento bidimensional de concreto armado submetido a esforços de membrana

Os parâmetros f_L e f_T são as tensões nos aços longitudinais e transversais, e ρ_L e ρ_T as respectivas taxas de armadura. Admite-se que os aços só resistem a esforços axiais, desprezando assim qualquer possível efeito de pino. É também considerada aderência perfeita entre o aço e o concreto. A convenção de sinais adotada considera as tensões e deformações de tração como positivas e, conseqüentemente, as de compressão como negativas.

Aplicando as equações de equilíbrio em relação ao sistema de coordenadas L-T da Fig. 1, pode-se obter a Eq. (1).

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_L^c \\ \sigma_T^c \\ \tau_{LT}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_L f_L \\ \rho_T f_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

As componentes dos esforços aplicados referentes ao elemento de concreto (σ_L^c , σ_T^c e τ_{LT}^c) podem ser definidas com base nas tensões principais de tração e compressão no concreto (σ_R e σ_D) e no ângulo α_R , Fig. 1(d). Esse ângulo relaciona os sistemas de coordenadas L-T e R-D, Fig. 1(e), e é conhecido como ângulo variável, pois, ele varia quando os esforços de membrana aplicados no elemento de concreto armado aumentam proporcionalmente.

Independente do carregamento, o sistema de coordenadas R-D rotaciona de forma que a componente da resistência ao cisalhamento nesse eixo seja sempre nula, ou seja, o concreto não contribui para resistir ao corte ($V_C = 0$). Devido à tendência das fissuras, em peças de concreto armado, surgirem perpendiculares à direção principal de tração, é possível estimar a orientação das fissuras com base no ângulo α_R , como mostra a Fig. 1(d).

As teorias que baseiam suas equações de equilíbrio e de compatibilidade no sistema de coordenadas R-D são chamadas de teorias de ângulo variável. O modelo estudado no presente trabalho tem como base esse tipo de técnica.

Um conceito básico usado nesse modelo é que as tensões e deformações admitidas nele são os valores médios ao longo de várias fissuras. Devido à descontinuidade criada pela fissuração, ocorre uma diferença no comportamento ao longo do painel e uma medida usada para fazer uma avaliação razoável do problema é adotar esse conceito de tensões médias e deformações médias, ao invés de estudar pontos específicos no elemento.

Com base no círculo de Mohr das tensões no painel, pode-se obter a transformação de coordenadas entre R-D e L-T, para o elemento de concreto, como mostra a Eq.(2):

$$\begin{bmatrix} \sigma_L^c \\ \sigma_T^c \\ \tau_{LT}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_R) & \sin^2(\alpha_R) & 2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) \\ \sin^2(\alpha_R) & \cos^2(\alpha_R) & -2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) \\ -\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) & \sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) & \cos^2(\alpha_R) - \sin^2(\alpha_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D \\ \sigma_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Aplicando a transformação de coordenadas apresentada na Eq. (2) na Eq. (1), pode-se obter as equações de equilíbrio mostradas a Eq. (3).

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_R) & \sin^2(\alpha_R) & 2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) \\ \sin^2(\alpha_R) & \cos^2(\alpha_R) & -2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) \\ -\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) & \sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) & \cos^2(\alpha_R) - \sin^2(\alpha_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D \\ \sigma_R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_L f_L \\ \rho_T f_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

No método em questão, a tensão de tração principal no elemento de concreto (σ_R) é desprezada. Com base nessa ideia e reorganizando os termos na Eq. (3), pode-se obter as equações de equilíbrio do modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável, mostradas em Eq. (4), Eq. (5) e Eq. (6)

$$\sigma_L = \sigma_D \cos^2(\alpha_R) + \rho_L f_L \quad (4)$$

$$\sigma_T = \sigma_D \sin^2(\alpha_R) + \rho_T f_T \quad (5)$$

$$\tau_{LT} = -\sigma_D \sin(\alpha_R) \cos(\alpha_R) \quad (6)$$

2.2 Compatibilidade das deformações

De forma semelhante ao item anterior, as equações de compatibilidade do painel podem ser obtidas com base na transformação de coordenadas presente no círculo de Mohr das deformações do elemento, entre o sistema R-D e L-T, como mostra Eq. (7). Os parâmetros ε_L e ε_T representam as deformações normais médias nas direções longitudinais e transversais, enquanto γ_{LT} retrata a deformação de cisalhamento no sistema L-T. Por sua vez, ε_D e ε_R representam as deformações principais médias de compressão e tração no sistema R-D.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_R) & \sin^2(\alpha_R) & 2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) \\ \sin^2(\alpha_R) & \cos^2(\alpha_R) & -2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) \\ -2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) & 2\sin(\alpha_R)\cos(\alpha_R) & 2\cos^2(\alpha_R) - 2\sin^2(\alpha_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_D \\ \varepsilon_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Combinando as duas primeiras linhas da Eq. (7), juntamente com algumas identidades trigonométricas, pode-se obter o 1º princípio da invariância das deformações, que é mostrado na Eq. (8). Essa equação tem grande importância para o procedimento de solução proposto, pois, relaciona de forma simples e coesa várias incógnitas importantes do problema.

$$\varepsilon_L + \varepsilon_T = \varepsilon_D + \varepsilon_R \quad (8)$$

A deformação por corte no sistema L-T (γ_{LT}), calculada na última linha da equação Eq. (7), pode ser representada de forma mais simples, como mostra a Eq. (9).

$$\gamma_{LT} = 2(\varepsilon_R - \varepsilon_D) \sin(\alpha_R) \cos(\alpha_R) \quad (9)$$

2.3 Relações constitutivas dos materiais

2.3.1 Concreto submetido à compressão

A curva tensão-deformação de um corpo de prova cilíndrico de concreto submetido a uma carga uniaxial de compressão pode ser expressa, geralmente, pela Eq. (10).

$$\sigma_D = f_{ck} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_o} \right)^2 \right] \quad (10)$$

O parâmetro f_{ck} representa a resistência característica à compressão do concreto e ε_o é a deformação relativa à tensão de compressão de pico, geralmente admitida igual a 2×10^{-3} . A curva tensão-deformação da Eq. (10) está ilustrada na Fig. 2.

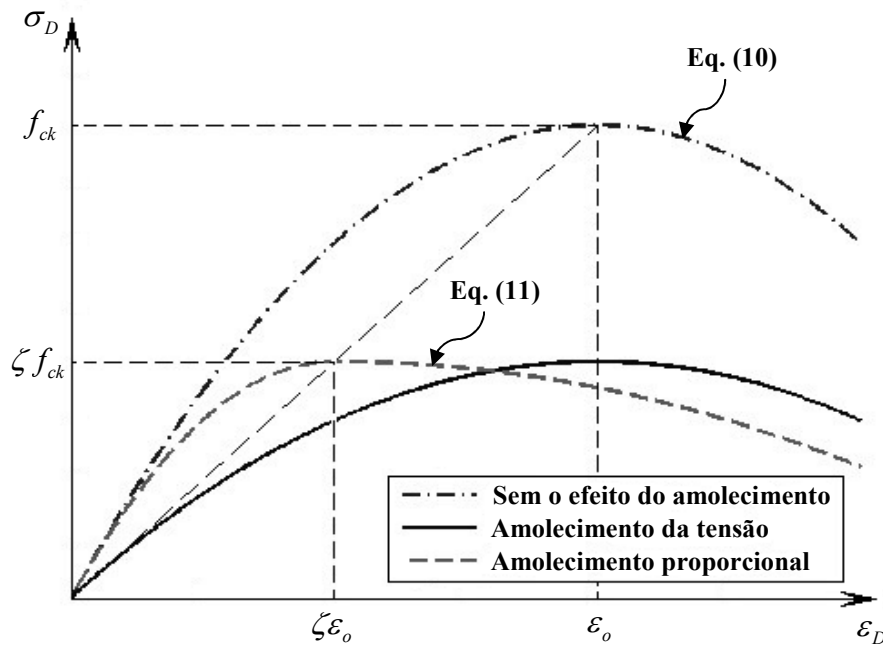


Figure 2. Curvas tensão-deformação do concreto em compressão com o efeito do amolecimento

Como o problema estudado se trata de uma estrutura submetida a um estado de tensões biaxial de tração e compressão, não se pode usar diretamente a curva da Eq.(10), pois, ela foi desenvolvida para um carregamento de compressão uniaxial e não leva em conta o efeito do amolecimento devido à tração perpendicular. Porém, é possível adaptar a equação para essa finalidade adicionando o coeficiente de amolecimento (ζ). Existem modelos que consideram o amolecimento apenas na tensão e outros que admitem esse efeito tanto na tensão como na deformação, Fig. 2. No presente trabalho optou-se por usar a segunda opção, o chamado amolecimento proporcional. De acordo com Hsu e Mo (2010), para o amolecimento proporcional, pode-se usar a Eq.(11) como expressão para relação constitutiva do concreto em compressão.

$$\sigma_D = \begin{cases} \zeta f_{ck} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_o} \right)^2 \right] & \varepsilon_D \leq \zeta \varepsilon_o \\ \zeta f_{ck} \left[1 - \left(\frac{\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_o} - 1}{\frac{2}{\zeta} - 1} \right)^2 \right] & \varepsilon_D > \zeta \varepsilon_o \end{cases} \quad (11)$$

Devido ao fato do modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável apenas conseguir calcular corretamente o comportamento pré-pico da estrutura ($\varepsilon_D \leq \zeta \varepsilon_o$), efetivamente só será usada a primeira linha de Eq. (11), a região ascendente da função.

O coeficiente de amolecimento foi objeto de estudo de diversos autores e várias equações diferentes foram desenvolvidas para tentar determinar essa variável. De acordo com dados experimentais, Belarbi e Hsu (1995) observaram que o coeficiente de amolecimento é função da deformação de tração principal no concreto (ε_R), como mostra a Eq. (12). No presente estudo optou-se por usar essa equação para calcular o coeficiente de amolecimento.

$$\zeta = \frac{0.9}{\sqrt{1 + 600\varepsilon_R}} \quad (12)$$

2.3.2 Aços longitudinais e transversais

Uma opção simples de relação constitutiva para os aços, que apresenta bons resultados nesse tipo de modelo, é uma curva elasto-plástica perfeita. Segundo Hsu e Mo (2010), essa relação além de prever de forma satisfatória a resistência ao cisalhamento de painéis submetidos a carregamentos de membrana, quando a resistência à tração (σ_R) é desprezada, representa bem as propriedades de uma barra de aço isolada. A curva em questão está descrita tanto na Eq. (13) como na Fig. 3.

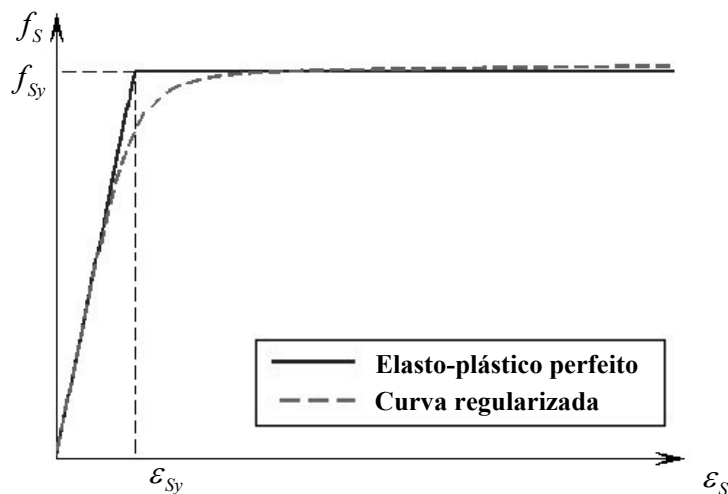


Figure 3. Curva tensão-deformação do aço

O parâmetro E_s representa o módulo de elasticidade do material, enquanto ε_s e ε_{sy} são, respectivamente, a deformação no aço e a deformação de escoamento do aço. Por fim, f_s e f_{sy} retratam a tensão no aço e a tensão de escoamento. O índice S pode ser substituído por L ou T, permitindo assim que a Eq. (13) possa representar tanto a armadura longitudinal como a transversal.

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} \\ f_{sy} & \varepsilon_s > \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (13)$$

No procedimento de solução proposto, é necessário calcular as derivadas de determinadas funções. Como a Eq. (13) apresenta uma descontinuidade na primeira derivada no ponto de escoamento do aço, foi necessário fazer uma regularização da curva para evitar problemas de convergência no método. A curva compatibilizada proposta é representada tanto na Eq. (14) como na Fig. 3.

$$f_s = E_s \varepsilon_s \left[A + \frac{1-A}{\left[1 + \left[(1-A) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sy}} \right]^{40} \right]^{0.025}} \right] \quad (14)$$

Nessa equação, a constante A foi adotada igual a 2×10^{-5} . Essa nova curva, além de ter boa proximidade com o modelo elasto-plástico perfeito, como mostra a Fig. 3, obteve bons resultados nas análises, sem apresentar problemas de convergência, como será mostrado mais adiante.

2.4 Carregamento proporcional

No caso de análises elásticas, os esforços de membrana aplicados em um elemento de concreto armado segundo o sistema de coordenadas L-T (σ_L, σ_T e τ_{LT}) estão relacionados com a tensão principal de tração no elemento de concreto armado (σ_1) através de constantes de proporcionalidade (m_L, m_T e m_{LT}).

A Figura 4 ilustra essa relação juntamente com o sistema de coordenadas 1-2, que descreve os eixos principais no elemento de concreto armado. Os parâmetros σ_1 e σ_2 representam as tensões principais de tração e compressão e α_1 é o ângulo que relaciona o sistema 1-2 e o L-T. Esse ângulo é conhecido como ângulo fixo, pois não varia quando os esforços aplicados no elemento de concreto armado aumentam proporcionalmente.

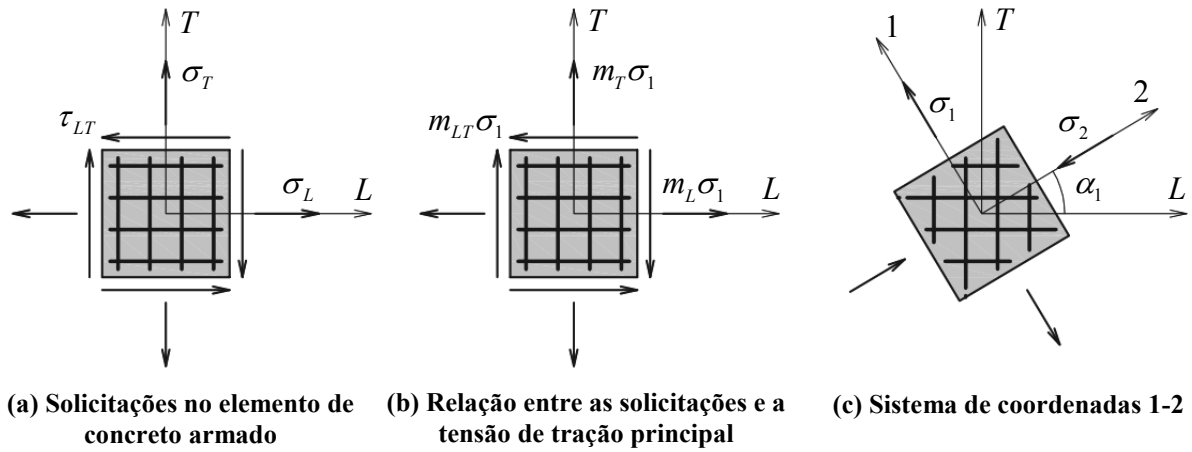


Figure 4. Relação entre as solicitações e a tensão principal de tração no elemento de concreto armado

Os coeficientes de proporcionalidade entre os esforços solicitantes e a tensão principal de tração podem ser calculados de acordo com Eq. (15), Eq. (16) e Eq. (17):

$$m_L = \frac{\sigma_L}{\sigma_1} \quad (15)$$

$$m_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_1} \quad (16)$$

$$m_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{\sigma_1} \quad (17)$$

Pode-se observar que, quando σ_1 aumenta, os outros esforços também aumentam, mantendo a mesma proporção original. Esse conceito recebe o nome de carregamento proporcional. Segundo o círculo de Mohr, a tensão principal de tração pode ser calculada de acordo com a Eq. (18):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_L + \sigma_T}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_L - \sigma_T}{2}\right)^2 + \tau_{LT}^2} \quad (18)$$

Substituindo os coeficientes de proporcionalidade nas equações de equilíbrio Eq. (4), Eq. (5) e Eq. (6), pode-se obter:

$$m_L \sigma_1 - \rho_L f_L = \sigma_D \cos^2(\alpha_R) \quad (19)$$

$$m_T \sigma_1 - \rho_T f_T = \sigma_D \sin^2(\alpha_R) \quad (20)$$

$$m_{LT} \sigma_1 = -\sigma_D \sin(\alpha_R) \cos(\alpha_R) \quad (21)$$

Multiplicando a Eq. (19) pela Eq. (20), elevando a Eq. (21) ao quadrado e combinando os resultados, pode-se encontrar a equação quadrática Eq. (22):

$$(m_L \sigma_1 - \rho_L f_L)(m_T \sigma_1 - \rho_T f_T) = (m_{LT} \sigma_1)^2 \quad (22)$$

A solução da Eq. (22) pode ser obtida com base na Eq. (23), onde os coeficientes S , B e C são calculados de acordo com as equações Eq. (24), Eq. (25) e Eq. (26):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2S} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4SC} \right) \quad (23)$$

$$S = m_L m_T - m_{LT}^2 \quad (24)$$

$$B = m_L \rho_T f_T + m_T \rho_L f_L \quad (25)$$

$$C = \rho_T f_T \rho_L f_L \quad (26)$$

Com base na Eq. (23), pode-se calcular a tensão σ_1 como função apenas dos coeficientes de proporcionalidade, taxas de armadura e tensões nos aços, independente do ponto estudado no comportamento carga-deformação da estrutura. Essa característica faz com que Eq. (23) tenha grande utilidade no modelo em questão. No presente trabalho é usado o conceito de carregamento proporcional para garantir que independente do estado de tensão que a estrutura esteja submetida, a relação entre os esforços solicitantes seja a mesma.

3 MODELO DE TRELIÇA ELÁSTICO LINEAR

Como foi dito anteriormente, o procedimento proposto usa como estimativa inicial para a solução o comportamento obtido em um modelo de treliça elástico linear da mesma estrutura. Esse modelo, também conhecido como *Mohr Compatibility Truss Model (MCTM)*, pode ser usado para cargas de serviço ou até mesmo para carregamentos próximos ao início do escoamento da armadura, Hsu e Mo (2010).

Assim como o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável, o modelo elástico linear é baseado nos três pilares da mecânica da estrutura. Nas duas teorias, as equações de equilíbrio e compatibilidade são exatamente as mesmas, portanto, a única diferença entre eles são as relações constitutivas usadas para os materiais. O modelo de treliça elástico linear desconsidera o efeito de amolecimento do concreto e, como o próprio nome do modelo já diz, adota o comportamento linear elástico perfeito como relação constitutiva tanto para o concreto como para o aço, de acordo com as equações Eq. (27) e Eq. (28).

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad (27)$$

$$\sigma_D = E_c \varepsilon_D \quad (28)$$

O parâmetro E_C representa o módulo de elasticidade do concreto. Da mesma forma que o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável, o modelo elástico linear, apresentado nesse estudo, desconsidera a resistência à tração do concreto (σ_R).

4 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

4.1 Equações adicionais

4.1.1 Ângulo variável em função das deformações

Aplicando-se algumas relações trigonométricas juntamente com as equações de compatibilidade da Eq. (7), pode-se definir o ângulo α_R por meio das deformações nos sistemas L-T e R-D, como mostram as equações Eq. (29) e Eq. (30).

$$\sin^2(\alpha_R) = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad (29)$$

$$\cos^2(\alpha_R) = \frac{\varepsilon_T - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad (30)$$

Essas equações tem importância particular na parte do procedimento que envolve o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável. Pois, com base nelas, o ângulo α_R é eliminado das equações de equilíbrio e com isso o processo de solução ganha estabilidade numérica. Após a solução ser encontrada o ângulo pode ser calculado com base na Eq. (31).

$$\tan^2(\alpha_R) = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_T - \varepsilon_D} \quad (31)$$

4.1.2 Equação não linear resolvida na estimativa inicial

Aplicando a equação de equilíbrio Eq. (21) nas outras duas equações Eq. (19) e Eq. (20), pode-se obter:

$$f_L = \frac{m_L + m_{LT} \cot(\alpha_R)}{\rho_L} \sigma_1 \quad (32)$$

$$f_T = \frac{m_T + m_{LT} \tan(\alpha_R)}{\rho_T} \sigma_1 \quad (33)$$

$$\sigma_D = \frac{-m_{LT}}{\sin(\alpha_R) \cos(\alpha_R)} \sigma_1 \quad (34)$$

Combinando as relações constitutivas elásticas lineares das equações Eq. (27) e Eq. (28) nas equações de equilíbrio Eq. (32), Eq. (33) e Eq. (34), têm-se:

$$\varepsilon_L = \frac{m_L + m_{LT} \cot(\alpha_R)}{E_S \rho_L} \sigma_1 \quad (35)$$

$$\varepsilon_T = \frac{m_T + m_{LT} \tan(\alpha_R)}{E_S \rho_T} \sigma_1 \quad (36)$$

$$\varepsilon_D = \frac{-m_{LT}}{E_S \sin(\alpha_R) \cos(\alpha_R)} \sigma_1 \quad (37)$$

Com base em Eq. (31), pode-se obter a equação não linear, Eq. (38), onde as deformações são calculadas de acordo com Eq. (35), Eq. (36) e Eq. (37).

$$F_1 = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_T - \varepsilon_D} - \tan^2(\alpha_R) = 0 \quad (38)$$

Uma vez encontrado o ângulo α_R , solução de Eq. (38), pode-se calcular as deformações ε_T , ε_L e ε_D usando Eq. (35), Eq. (36) e Eq. (37). Após um ajuste preliminar, essas deformações podem servir de estimativa inicial para a solução do sistema de equações não lineares resolvido no método.

4.1.3 Sistema de equações não lineares resolvido no procedimento

Combinando Eq. (19) e Eq. (20), respectivamente, com Eq. (30) e Eq. (29), pode-se obter o vetor F_2 , mostrado em Eq. (39). Esse vetor representa o sistema de equações não lineares que é resolvido durante o procedimento de solução proposto.

$$F_2 = \begin{bmatrix} \sigma_D \frac{\varepsilon_T - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} - m_L \sigma_1 + \rho_L f_L \\ \sigma_D \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} - m_T \sigma_1 + \rho_T f_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

As duas variáveis escolhidas para atuarem no processo de solução de Eq.(39) foram as duas deformações dos aços, ε_L e ε_T , e para evitar possíveis problemas de convergência, foram usados os seus valores por mil (10^{-3}).

4.2 Algoritmo de solução

O problema a ser resolvido consiste em, para um dado ε_D , encontrar a solução de um sistema de duas equações não lineares a duas incógnitas, Eq. (39), $F_2(\varepsilon_L, \varepsilon_T) = 0$. Para determinar as estimativas iniciais de ε_L e ε_T , necessárias à inicialização do algoritmo não linear, utilizamos o modelo de treliça elástico linear.

São fornecidas solicitações base (σ_L , σ_T e τ_{LT}) e deseja-se acompanhar o comportamento do painel para tensões proporcionais às informadas. Isto é feito variando-se ε_D de zero a $\xi\varepsilon_o$, e resolvendo o sistema não linear de duas equações a duas incógnitas, $F_2(\varepsilon_L, \varepsilon_T) = 0$, em cada caso.

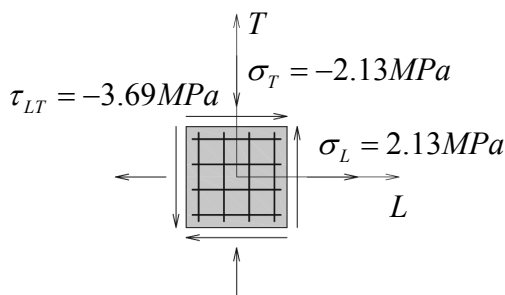
Para dar início ao processo iterativo, calcula-se o estado aproximado de tensões/deformações para as solicitações $\mu\sigma_L$, $\mu\sigma_T$ e $\mu\tau_{LT}$, utilizando o modelo de treliça elástico linear. Com o objetivo de garantir que a estimativa seja próxima da linearidade, fazemos $\mu = 10^{-3}$. Como o modelo é linear, pode-se calcular os valores iniciais de ε_D , ε_L e ε_T com base no produto das deformações correspondentes ao estado σ_L , σ_T e τ_{LT} , obtidas resolvendo-se a Eq. (38), $F_1(\alpha_R) = 0$, pelo fator redutor μ .

Nas próximas iterações do processo, soma-se um incremento de deformação ($\Delta\varepsilon_D$) a ε_D e como ponto inicial para solução do novo sistema de equações não lineares são usados os resultados da iteração anterior. Esse processo se repete até o número máximo de pontos calculados ($n_{\max}$) ser atingido ou até a deformação ε_D ser superior ao limite $\xi\varepsilon_o$. Uma opção eficiente para resolver os sistemas de equações não lineares é usar a função *lsqnonlin*, presente no toolbox de otimização MATLAB. Essa ferramenta se comportou bem no problema em questão e foi usada no exemplo de aplicação mostrado adiante.

Com base nesse procedimento, pode-se obter todo o comportamento pré-pico da estrutura. O algoritmo de solução é ilustrado no fluxograma da Fig. 5.

5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A seguir será mostrado um exemplo de aplicação do procedimento proposto. O problema em questão foi estudado inicialmente por Hsu e Mo (2010) e tem seus dados ilustrados na Fig. 6. Os resultados obtidos são comparados com os dados da análise na literatura, e assim, é verificada a viabilidade do procedimento.



Dados do problema:

- Taxas de armadura: $\rho_L = 1.03\%$; $\rho_T = 1.03\%$
- Propriedades mecânicas dos aços:
 $E_S = 200\text{GPa}$; $f_{Sy} = 413\text{MPa}$
- Propriedades mecânicas do concreto:
 $E_S = 24.8\text{GPa}$; $f_{ck} = 27.6\text{MPa}$; $\varepsilon_o = 2 \times 10^{-3}$

Figura 6. Dados do exemplo de aplicação do procedimento proposto

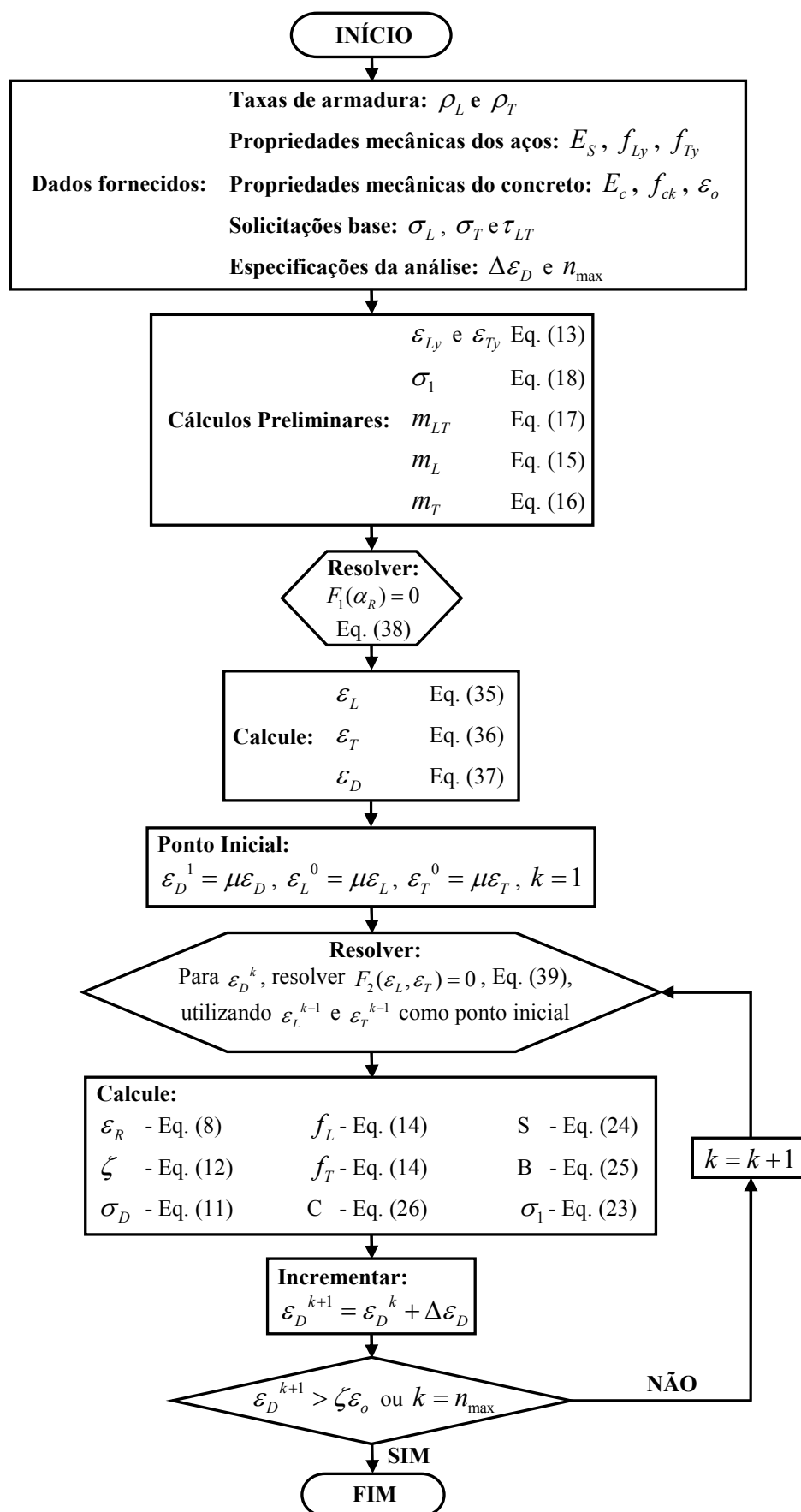


Figura 5. Fluxograma do procedimento proposto

Inicialmente, é verificada a curva tensão-deformação do concreto comprimido. A Figura 7 ilustra a comparação entre os valores obtidos no procedimento e os calculados por Hsu e Mo. Pode-se observar grande proximidade entre os dados da literatura e as respostas do algoritmo em questão.

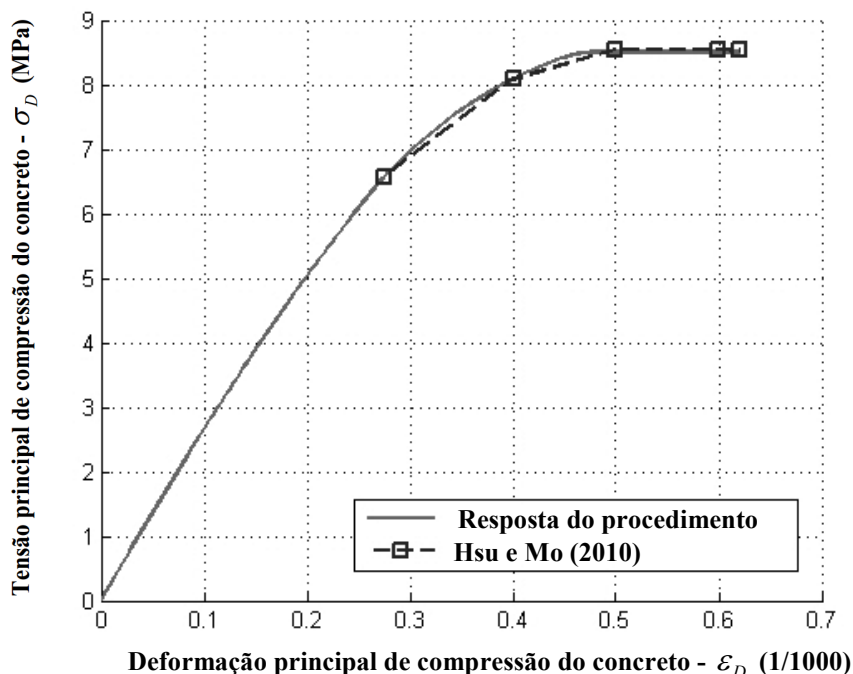


Figura 7. Curvas tensão-deformação do concreto em compressão

As curvas obtidas nessa análise foram traçadas com base em 155 pontos, ou seja, o método resolveu 155 sistemas de equações não lineares, cada um representando um estado de tensões que a estrutura estava submetida. A opção inicial era que as curvas fossem construídas com base em 200 pontos, porém, durante a análise do ponto 156, a deformação ε_D superou o limite $\zeta\varepsilon_o$, ultrapassando assim a resistência máxima. Como o modelo usado apenas consegue calcular corretamente o comportamento pré-pico, o programa foi finalizado. Apesar disso, os pontos calculados foram mais que suficientes para a construção de curvas de boa qualidade.

O estudo também analisou a variação do ângulo (α_R) em relação à deformação principal de compressão do concreto (ε_D). A Figura 8 ilustra os resultados obtidos. Pode-se observar que existe uma tendência de α_R ser praticamente constante em dois trechos da curva. O primeiro é referente a antes do primeiro escoamento do aço, no caso o aço longitudinal. Enquanto os dois aços estavam no regime elástico, a armadura apresentou pouco efeito sobre α_R e com isso, esse ângulo teve o comportamento próximo a α_1 , ângulo fixo. Por isso ele não variou consideravelmente com o aumento proporcional do carregamento.

O segundo trecho onde a curva apresentou um comportamento constante começa após o segundo escoamento, aço transversal. Com os dois aços tendo ultrapassado o limite elástico, as tensões em cada um deles são basicamente iguais a tensão de escoamento e com isso, mais uma vez, o ângulo α_R passa a ter comportamento próximo a α_1 .

Por fim, pode-se observar na Fig. 9 a curva tensão de cisalhamento contra a deformação de corte obtida no estudo. Antes do primeiro escoamento, é possível ver claramente o comportamento linear da curva. Após esse ponto, a função vai gradualmente se curvando até atingir a resistência de pico.

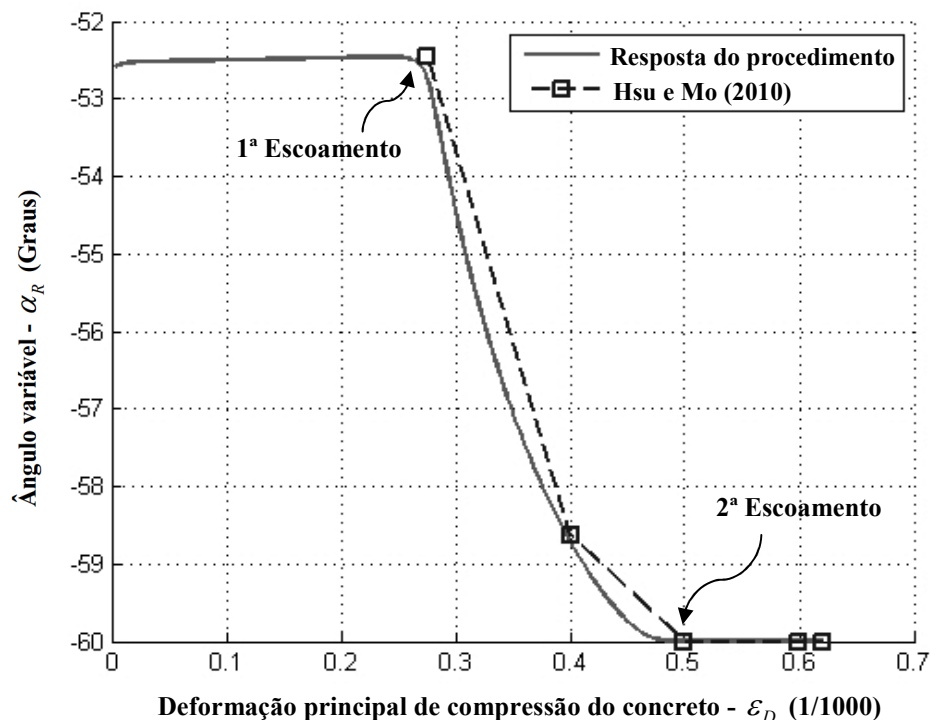


Figura 8. Comportamento do ângulo variável

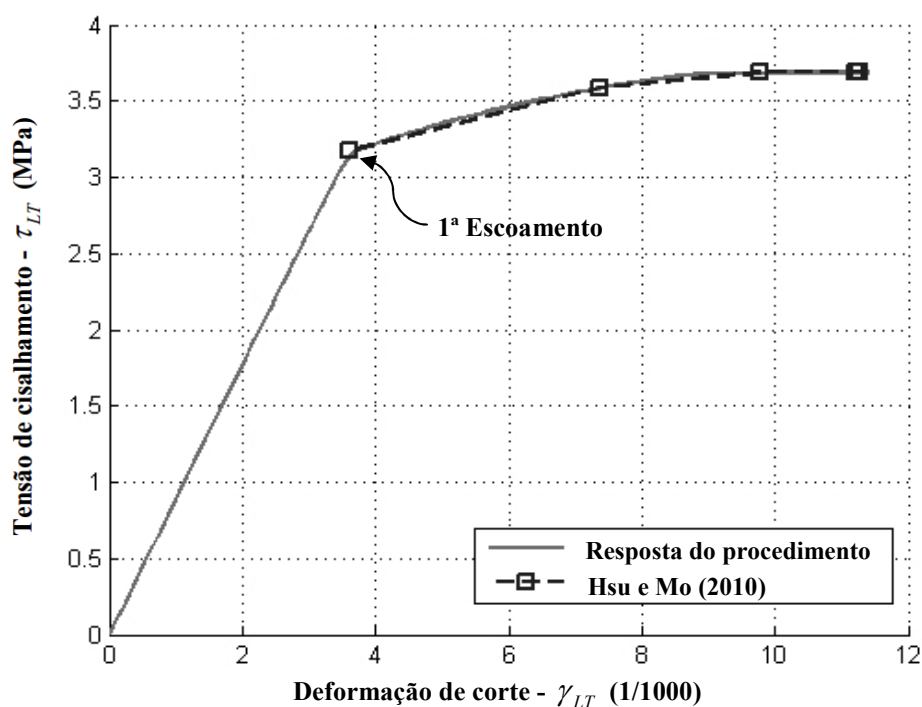


Figura 9. Curva Tensão-deformação de cisalhamento

Além da proximidade da resposta encontrada com os dados da literatura e o grau de refinamento das curvas traçadas, é importante salientar a grande eficiência computacional que o procedimento mostrou. O tempo de processamento médio levado pelo computador para executar todo o procedimento descrito, no exemplo em questão, foi cinco segundos. As especificações do processador usado na análise são: Intel® Core™ i5-2450M @ 2.50GHz.

Com base nisso, a metodologia mostrada passa a ser uma opção atraente em questão de projeto, onde o engenheiro responsável pode tentar várias combinações de propriedades mecânicas dos materiais e taxas de armadura a fim de encontrar a opção mais viável sem perder produtividade.

6 CONCLUSÕES

Com base no que foi discutido no presente trabalho, pode-se obter as seguintes conclusões:

- Devido a sua simplicidade de implementação, propriedades mecânicas bem definidas e bons resultados obtidos, o uso do modelo de treliça elástico linear como estimativa inicial para o procedimento se mostrou uma prática recomendável;
- Apesar de se ter usado uma curva regularizada como relação constitutiva dos aços, os resultados não divergiram muito dos dados obtidos por Hsu e Mo (2010);
- O procedimento apresentado se mostrou uma opção viável para análise de painéis de concreto armado submetidos a esforços de membrana usando o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável. Pois, além de apresentar boa proximidade com dados de análises presentes na literatura, mostrou grande eficiência computacional, retratada no baixo tempo médio de processamento do programa;

Agradecimentos

Agradecimentos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante a pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Belarbi, A. & Hsu, T.T.C., 1995. Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression, *ACI Structural Journal*, 92(5), 562–573.
- Greene, G. G., & Belarbi, A., 2006. Tension stiffened softened truss model for RC under pure torsion. *CD Proc., 2nd FIB Congress CD-ROM*, Paper No. 0952.
- Hsu, T.T.C. & Mo, Y.L., 1985. Softening of Concrete in Torsional Members – Theory and Tests. *Journal of the American Concrete Institute*, Proceedings, 82(3), 290–303.
- Hsu, T.T.C. & Mo, Y.L., 2010. *Unified Theory of Concrete Structures*. Wiley.
- Hsu, T.T.C. & Zhang, L.X., 1997. Nonlinear Analysis of Membrane Elements by Fixed-Angle Softened-Truss Model. *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 94(5), 483–492.
- Hsu, T.T.C. & Zhu, R.R.H., 2002. Softened Membrane Model for Reinforced Concrete Elements in Shear. *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 99(4), 460–469.
- Pang, X.B. & Hsu, T.T.C., 1996. Fixed-Angle Softened-Truss Model for Reinforced Concrete. *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 93(2), 197–207.