



SIMULAÇÃO NUMÉRICA E CONSTRUCTAL DESIGN APLICADOS À MELHORIA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES SUBMETIDAS À FLEXÃO

Pedro Costa da Silva

Alexandro Pereira Ramos

João Paulo Silva Lima

Milton Cesar Bastos Portela Junior

pedroc86silva@gmail.com

eng.mec.ramos@gmail.com

joaop_1005@hotmail.com

portela.milton@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Av. Itália, km 8, Bairro Carreiros, CEP 96.201-900, Rio Grande, Brasil

Luiz Alberto Oliveira Rocha

luizrocha@mecanica.ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Rua Sarmiento Leite, 425, CP. 90050-170, Porto Alegre, RS, Brasil

Elizaldo Domingues dos Santos

Mauro de Vasconcellos Real

Liércio André Isoldi

elizaldosantos@furg.br

mauroreal@furg.br

liercioisoldi@furg.br

Universidade Federal do Rio Grande - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Av. Itália, km 8, Bairro Carreiros, CEP 96.201-900, Rio Grande, Brasil

Resumo. Placas finas de aço são elementos estruturais amplamente empregados na engenharia, especialmente em estruturas navais e offshore. Isso se deve ao fato que estes componentes são capazes de resistir mecanicamente aos esforços que são submetidos possuindo um peso relativamente baixo. Nesse contexto, o presente trabalho analisou numericamente o comportamento mecânico de uma placa fina de aço sob flexão, engastada nos quatro lados, inicialmente sem enrijecedores, sendo seus valores máximos de deslocamento transversal e de tensão de von Mises usados como referência. Na sequência, através do Método Constructal Design, enrijecedores foram incorporados à placa. Para isso, a variável fração de volume (ϕ), que representa a relação entre o volume de enrijecedores e o volume total do elemento estrutural placa/enrijecedores, foi adotada. Cabe destacar que o volume de aço usado na placa sem enrijecedores será o mesmo nas placas com enrijecedores. Além disso, a largura e o comprimento das placas com enrijecedores é o mesmo da placa sem enrijecedores. Portanto, a variação da fração de volume ocorre devido à diminuição da espessura da placa, sendo essa quantidade de aço empregada como enrijecedores na placa. Então, tendo como objetivo minimizar o deslocamento transversal e a tensão máxima, placas com enrijecedores, considerando $\phi = 0.50$, foram comparadas entre si e com a placa sem enrijecedores, visando determinar qual configuração geométrica, entre as placas analisadas, conduz ao melhor comportamento mecânico. Para tanto, o grau de liberdade h_e/t_e , que relaciona a altura do enrijecedor (h_e) e sua espessura (t_e), foi considerado; e um modelo computacional baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), desenvolvido no software ANSYS, foi utilizado. Os resultados obtidos indicaram que é possível melhorar significativamente o comportamento mecânico de uma placa fina de aço com enrijecedores sob flexão através do emprego do método Constructal Design.

Palavras-chave: Flexão, Placa, Enrijecedores, Constructal Design, Simulação Numérica

1 INTRODUÇÃO

Placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas, paralelas e distanciadas entre si, de modo que esta grandeza recebe o nome de espessura. Se a espessura é menor que um décimo do valor da dimensão da menor borda da placa, a mesma é classificada como placa fina (Szilard, 2004).

As placas finas de aço são elementos estruturais amplamente empregados na engenharia, especialmente em estruturas navais e offshore. Isso se deve a capacidade que estes componentes estruturais possuem, resistindo mecanicamente aos carregamentos aos quais são submetidos possuindo um peso relativamente baixo. Para melhorar a resistência mecânica das placas finas, muitas vezes são incorporados enrijecedores. Esses elementos estruturais normalmente são soldados à placa e têm como função reforçá-la para resistir a uma determinada solicitação, como por exemplo a flexão.

Existem vários estudos experimentais, analíticos e numéricos relacionados ao comportamento mecânico de placas finas de aço, com e sem enrijecedores, submetidas à flexão. A seguir, alguns desses trabalhos que utilizaram uma abordagem numérica serão brevemente descritos.

Em (Yousif et al., 2008) foi analisada a influência da altura de um enrijecedor (reforço) na deflexão para três tamanhos de placas quadradas diferentes, submetidas a um carregamento distribuído transversal. Para isso, utilizaram o Método dos Elementos Finitos (MEF), através

do software ANSYS, e chegaram à conclusão que a altura do reforço (enrijecedor) diminui a deflexão sofrida pela placa.

Já (Hasan, 2007) realizou simulações para avaliar qual a melhor configuração no posicionamento de enrijecedores, tal que proporciona um maior aumento na rigidez da placa para uma dada carga.

Em (Ramaswamy, 1999) foi desenvolvida uma análise sobre os efeitos de algumas configurações de reforços (enrijecedores) acoplados a placas de aço, buscando a alocação que proporcionaria um ganho maior em rigidez à flexão da placa, com um mínimo de material adicional.

Foi estudado em (Banerjee et al., 2013) o comportamento mecânico de placas de material isotrópico e compósito com orifícios circulares centralizados, submetidas a carregamento estático transversal e distribuído, gerando flexão no modelo estudado.

Empregando o MEF, (Jain, 2009) avaliou a distribuição de tensões e deflexões em placas retangulares de material isotrópico e ortotrópico, com perfurações circulares centralizadas, submetidas a um carregamento estático transversal provocando flexão.

Em (Helbig et al., 2013) através do software ANSYS, que é baseado no MEF, foi realizada uma análise numérica do comportamento de tensões e deflexões em placas finas, as quais são fabricadas com diferentes tipos de materiais compósitos, submetidas a carregamento transversal uniformemente distribuído, em comparação com uma placa de aço sob as mesmas condições.

No presente trabalho foi considerada uma placa engastada nos quatro lados sob flexão, inicialmente sem enrijecedores, sendo seus valores máximos de deslocamento transversal e de tensão de von Mises usados como parâmetro de referência. Na sequência, através do método *Constructal Design*, enrijecedores foram adicionados à placa, permitindo assim, avaliar a influência do número, disposição e dimensões de enrijecedores longitudinais e transversais na placa submetida à flexão, sendo essa a única alteração feita em relação à placa sem enrijecedores. Para isso, o parâmetro fração de volume (ϕ), que é a relação entre o volume dos enrijecedores (V_e) e o volume total da placa (V), foi adotada. Cabe destacar que o volume total de aço usado na placa sem enrijecedores foi mantido nas placas com enrijecedores, ou seja, a quantidade total de aço foi preservada. Como também foram preservados o comprimento e largura da placa, a fração de volume é definida devido à redução da espessura da mesma, sendo essa quantidade de aço empregada na forma de enrijecedores. Então, tendo como objetivo minimizar a deflexão (deslocamento transversal) máxima da placa, bem como minimizar a tensão máxima gerada nela, foi considerado no estudo um $\phi = 0.50$. Além disso, diferentes disposições de enrijecedores foram investigadas, avaliando ainda a influência do grau de liberdade h_e/t_e , que relaciona a altura do enrijecedor (h_e) e sua espessura (t_e), no comportamento mecânico sob flexão das diferentes configurações geométricas propostas. Como em todos os casos analisados o mesmo tipo de vinculação (placa engastada nos quatro lados), o mesmo carregamento (carga uniformemente distribuída aplicada transversalmente à placa) e o mesmo volume de material utilizado foram considerados, é possível que os resultados sejam comparados de maneira consistente. Para tanto, modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS, que é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), foram desenvolvidos e verificados, tanto para a placa sem enrijecedores como para as placas com enrijecedores.

2 TEORIA DE PLACAS

As placas são componentes estruturais bidimensionais, planos e retos, nos quais sua espessura t é muito menor que seu comprimento a e sua largura b (Szilard, 2004). As placas, tipicamente, suportam carregamentos transversais, desenvolvendo, portanto, deformações de flexão (Mendonça, 2005).

Muitas estruturas como plataformas petrolíferas, submarinos, cascos de navios, bem como lajes e anteparos na construção civil e peças de maquinaria são projetadas de acordo com a teoria de flexão de placas. A análise desses componentes estruturais consiste na solução de uma equação diferencial que é função da deflexão, dos carregamentos aplicados e da rigidez da placa. A solução dessa equação diferencial resulta em uma expressão para a deflexão da placa. Outras grandezas como as forças e momentos devem ser determinadas a partir da deflexão (Jawad, 1994).

De acordo com (Szilard, 2004), a teoria clássica de placas finas de Kirchhoff é amplamente empregada na grande maioria das aplicações de engenharia. As hipóteses consideradas para a dedução da equação diferencial governante da placa em termos de suas deflexões transversais $w(x, y)$ são: o material da placa é homogêneo, isotrópico e linear-elástico; a placa é inicialmente reta; o plano médio da placa não sofre deformação durante a flexão (ver Fig. 1); a menor dimensão lateral da placa é no mínimo dez vezes maior que a sua espessura t ; deflexões transversais $w(x, y)$ da placa são pequenas se comparadas com sua espessura t ; as inclinações do plano médio da placa (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade; as seções planas e normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais ao plano médio após a deformação; a tensão normal σ_z na direção transversal à placa pode ser desprezada.

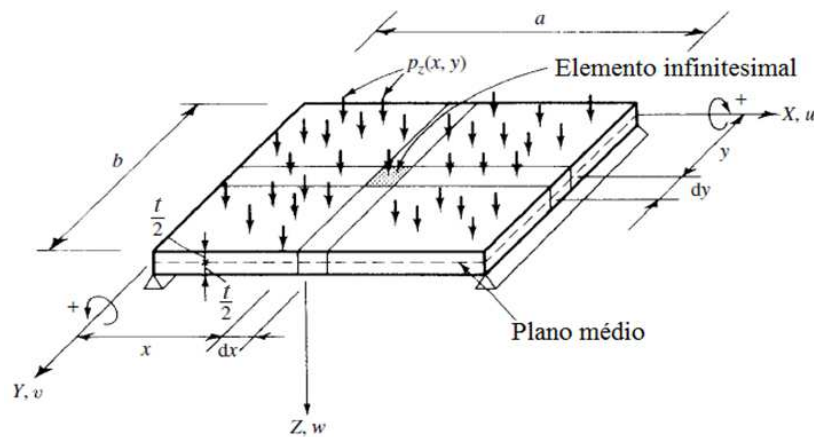


Figura 1. Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado

Com base nas hipóteses simplificativas apresentadas, a relação entre a deformação e a deflexão na placa são definidas por (Jawad, 1994):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde: ε_x é a deformação normal na direção x , ε_y é a deformação normal na direção y e γ_{xy} é a deformação por cisalhamento no plano x - y .

Já a relação entre as tensões que surgem na placa e sua deflexão são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

sendo: σ_x a tensão normal na direção x , σ_y a tensão normal na direção y , τ_{xy} a tensão de cisalhamento no plano x - y , e E e ν , respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material da placa.

A relação entre os momentos atuantes na placa e as tensões definidas na Eq. (2) é:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ -M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3)$$

onde: M_x e M_y são os momentos fletores por unidade de comprimento em relação, respectivamente às direções x e y e M_{xy} é o momento torçor por unidade de comprimento em relação ao plano x - y . Considerando as Eqs. (1) e (2), a Eq. (3) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

sendo D a rigidez flexural da placa, dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5)$$

Então, para a obtenção da equação diferencial governante é necessário aplicar as equações de equilíbrio estático para um elemento infinitesimal da placa submetido a um carregamento transversal p_z . Igualando a zero o somatório de forças na direção z , o somatório de momentos em relação ao eixo x e o somatório de momentos em relação ao eixo y , respectivamente, são definidas:

$$p_z + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

onde: Q_x e Q_y são esforços cortantes por unidade de comprimento relativos, respectivamente, às direções x e y .

Substituindo as Eqs. (7) e (8) na Eq. (6), a equação diferencial do equilíbrio do elemento infinitesimal da placa é dada por:

$$p_z + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

E, finalmente, substituindo a Eq. (4) na Eq. (9), a equação diferencial governante para uma placa fina é definida como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D} \quad (10)$$

A solução da Eq. (10) produz uma expressão para a deflexão w da placa.

3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Muitos problemas da engenharia estrutural são governados por equações diferenciais, como é o caso das placas finas. A solução dessas equações fornece o resultado exato para um determinado problema. Entretanto, essas soluções analíticas são somente possíveis para problemas envolvendo geometrias, carregamentos e condições de contorno simples. Consequentemente, para problemas mais complexos, a modelagem computacional pode ser aplicada para obter uma solução aproximada.

Para a análise estrutural, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente empregado. O MEF é baseado na divisão do domínio de integração, o qual é contínuo, em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos, transformando o meio contínuo em discreto. A essa divisão do domínio dá-se o nome de malha de elementos finitos, sendo os pontos de intersecção das linhas dessa malha chamados de nós. O comportamento de cada elemento é arbitrado de forma aproximada, com a condição do conjunto ou malha de elementos se comportar de forma semelhante ao contínuo original. No chamado modelo de deslocamentos do MEF, arbitra-se o campo de deslocamentos nodais e, como consequência, a interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes é substituída pela interação de forças nodais entre elementos. Dessa maneira, o equilíbrio infinitesimal que é considerado no modelo matemático de meio contínuo é substituído pelo equilíbrio de cada elemento finito isoladamente, trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas de equilíbrio do elemento como um todo. A partir destas equações algébricas escritas para cada elemento, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio da malha de elementos. Esse sistema global, após a introdução das condições de vinculação ao meio exterior, permite a determinação da solução em termos dos deslocamentos nodais (Assan, 2003; Soriano, 2003).

No presente estudo, o software ANSYS, que é baseado no MEF, foi empregado. Em todas as simulações numéricas realizadas, o elemento finito do tipo SHELL93 (Fig. 2) foi utilizado. Ele possui oito nós e seis graus de liberdade por nó: três translações nas direções x , y e z e três rotações em torno dos eixos x , y e z , totalizando quarenta e oito graus de liberdade por elemento (ANSYS, 2005).

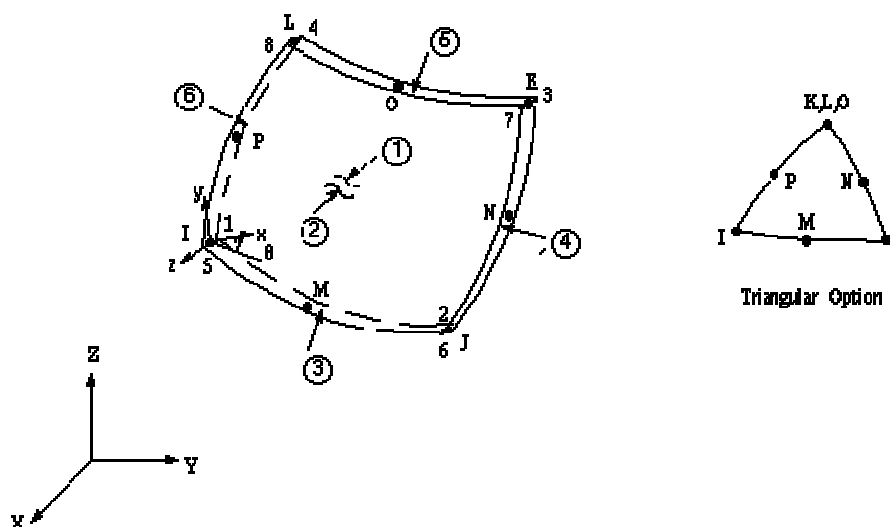


Figura 2. Elemento SHELL93 (ANSYS, 2005)

4 MÉTODO CONSTRUCTAL DESIGN

A Teoria *Constructal* foi criada por Adrian Bejan, em 1997, quando uma filosofia para solução geométrica foi aplicada para o arrefecimento de um condutor eletrônico. Esse estudo teve uma importância significativa, pois foi o ponto de partida para aplicação da Teoria *Constructal* em problemas de engenharia e outros ramos da ciência (Bejan, 1997; Bejan, 2000).

A Teoria *Constructal*, em linha gerais, explica como a geração de estruturas submetidas a alguma espécie de fluxo, que são vistas em qualquer lugar na natureza (secção transversal de rios, pulmões, movimentação de massas na atmosfera, tecidos vascularizados, entre outros), pode ser fundamentada através de um princípio físico do acesso aos fluxos no tempo (Bejan, 2000).

Este princípio é a Lei *Constructal* que afirma que para um sistema de fluxo persistir no tempo (sobreviver) ele deve evoluir de tal modo que permita o acesso mais fácil para as correntes que fluem através do mesmo. Esse não é apenas um princípio físico, no qual a forma geométrica e a estrutura são deduzidas e que serve para mostrar que as formas da natureza são geradas deterministicamente. Trata-se também de um método de engenharia para avaliação das geometrias em qualquer sistema de fluxo, desde problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor a problemas de mecânica dos sólidos (Bejan e Lorente, 2006a).

Na natureza, a forma e estrutura dos sistemas de fluxo animados ou inanimados se adaptam de forma a proporcionar o seu melhor fluxo global, ou seja, de forma a distribuir otimamente as imperfeições existentes no sistema, independente dos sistemas serem animados ou inanimados (Bejan e Zane, 2012).

Como resultado da Teoria *Constructal* as formas (arquiteturas) dos sistemas de fluxo não se desenvolvem por acaso, mas como resultado da luta permanente para um melhor desempenho sendo, portanto, necessária uma evolução no tempo. Na natureza, assim como em sistemas de engenharia, são permanentes essas modificações na geometria ao longo do tempo, baseadas no fluxo, como podem ser constatadas em bacias hidrográficas, circulações globais, árvores e formas dos animais, entre outros (Bejan e Lorente, 2006b).

De acordo com (Bejan e Lorente, 2008), o *Constructal Design* é um método que pode ser empregado para a obtenção de formas geométricas ótimas de sistemas submetidos a alguma espécie de fluxo. De acordo com este método o fluxo é maleável e a geometria é deduzida a partir de um princípio de maximização do desempenho global. Além disso, a geometria deve ser submetida a restrições globais e variada de acordo com seus graus de liberdade (Bejan, 2000). Para aplicar o *Constructal Design* na otimização geométrica de um sistema físico é necessário, basicamente, um objetivo (uma grandeza a ser otimizada: vazão mássica, potência, fluxo de tensões, energia, etc.), graus de liberdade (parâmetros geométricos que podem variar durante o processo de otimização) e restrições geométricas (parâmetros que são mantidos constantes ao longo do processo de otimização).

No presente estudo o *Constructal Design* foi aplicado para otimizar geometricamente uma placa submetida à flexão. Inicialmente a placa foi considerada sem nenhum enrijecedor. Após, mantendo o volume total de material da placa, parte dela foi transformada em enrijecedores, visando avaliar qual configuração geométrica conduziria a um melhor comportamento mecânico, ou em outras palavras, minimizaria o deslocamento máximo e a tensão (von Mises) máxima da placa. Para isso, a relação entre o volume de enrijecedores (V_e) e o volume total do elemento estrutural placa/enrijecedores (V), chamada de fração de volume (ϕ) é dada por:

$$\phi = \frac{V_e}{V} = \frac{N_{el}(bh_e t_e) + N_{et}[(a - N_{el}t_e)h_e t_e]}{abt} \quad (11)$$

onde: N_{el} e N_{et} são, respectivamente, o número de enrijecedores nas direções longitudinal e transversal da placa; a , b e t são, respectivamente, a largura, o comprimento e a espessura da placa; e h_e e t_e são, respectivamente, a altura e a espessura dos enrijecedores, conforme pode ser visto na Fig. 3. Cabe destacar que foi considerado nesse trabalho um valor de $\phi = 0.50$.

Na Fig. 3 a placa apresenta uma configuração de enrijecedores com $N_{el} = 3$ e $N_{et} = 2$, ou seja, uma placa P(3×2). Já o espaçamento entre enrijecedores nas direções longitudinal (S_{el}) e transversal (S_{et}) são dados, respectivamente, por:

$$S_{el} = \frac{b}{(N_{el} + 1)} \quad (12)$$

$$S_{et} = \frac{a}{(N_{et} + 1)} \quad (13)$$

Então, como graus de liberdade para a aplicação do método *Constructal Design* foram adotados o número de enrijecedores N_{el} e N_{et} bem como a relação entre a altura e a espessura dos mesmos h_e/t_e .

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente foi apresentado o procedimento de verificação do modelo computacional e, na sequência, foram apresentados e discutidos os resultados obtidos no estudo de caso desenvolvido.

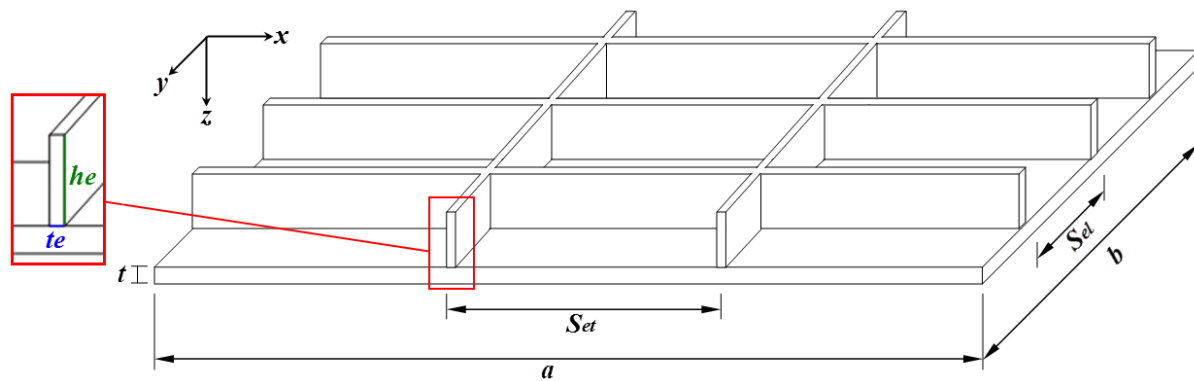


Figura 3. Placa retangular P(3x2)

5.1 Verificação do modelo computacional

Para a verificação do modelo computacional empregado, inicialmente, foram consideradas duas situações distintas: primeiro uma placa engastada nos quatro lados e sem enrijecedores foi analisada sob flexão; na sequência somente o enrijecedor foi simulado numericamente sob flexão, sendo considerado como uma viga biengastada. Em ambos os casos a solução numérica foi comparada com sua respectiva solução analítica.

Então, as dimensões da placa são: comprimento $a = 2$ m, largura $b = 1$ m, e espessura da placa $t = 20$ mm. O material da placa é o aço A-36, e suas propriedades mecânicas são: módulo de elasticidade $E = 200$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ (Jawad, 1994). Um carregamento distribuído $q = 100$ kPa foi aplicado transversalmente em toda a superfície inferior da placa, na direção negativa do eixo z (ver Figs. 1 e 3).

A solução numérica da placa foi obtida discretizando o domínio computacional com uma malha regular formada por 5000 elementos quadrados com 20 mm de lado. O resultado numérico obtido para o deslocamento máximo transversal, que conforme esperado ocorre no centro da placa foi de $w = 1.739$ mm.

Já a solução analítica para a deflexão máxima é obtida considerando as condições de contorno de engastamento nos quatro bordos da placa na Eq. (10), obtendo (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959; Young e Budynas, 2002):

$$w = \frac{0.00254qb^4}{D} \quad (14)$$

onde D é a rigidez flexural da placa definida pela Eq. (5).

Através da Eq. (14) foi encontrado uma deflexão máxima de $w = 1.731$ mm. Comparando a solução numérica com a analítica uma diferença de -0.46% foi encontrada.

Já para verificar o modelo computacional para o enrijecedor, uma viga de aço A-36, biengastada, com comprimento $l = 1$ m, altura $h_e = 60$ mm e espessura $t_e = 30$ mm foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído $q = 50$ kPa.

Para a solução numérica, esta viga foi discretizada com uma malha regular gerada por 150 elementos finitos quadrados com lado de 20 mm. A deflexão máxima determinada numericamente foi de $w = 1.255$ mm na região central da viga, como esperado.

A solução analítica para o cálculo da deflexão máxima de uma viga biengastada é definida em (Young e Budynas, 2002) como:

$$w = \frac{ql^4}{384EI} \quad (15)$$

sendo I o momento de inércia de área da viga, dado por:

$$I = \frac{t_e h_e^3}{12} \quad (16)$$

Empregando a Eq. (15), a flecha máxima da viga calculada analiticamente é de $w = 1.206$ mm. Com isso, uma diferença de -4.06% foi obtida entre a solução numérica e a analítica.

Após, uma última verificação foi realizada onde a solução analítica, dada pela Eq. (14), foi adaptada para levar em conta a presença de enrijecedores através do teorema do eixo paralelo (Zehnder, 2008). Para isso, a mesma placa usada na verificação anterior foi considerada, porém com um espessura $t = 10$ mm e com três enrijecedores longitudinais e dois enrijecedores transversais (ver Fig. 3). Foi necessária a determinação da rigidez flexural em relação às direções longitudinal (D_l) e transversal (D_t) considerando a placa e os enrijecedores, então uma rigidez flexural média foi determinada e empregada na Eq. (14). A solução analítica para a deflexão máxima dessa placa foi de $w = 11.079$ mm enquanto a solução numérica (obtida com uma malha regular gerada por 5453 elementos finitos quadriláteros com dimensão máxima de 20 mm) foi de $w = 11.825$ mm, existindo uma diferença relativa de 6.77%

Considerando as diferenças encontradas entre as soluções numéricas e as respectivas soluções analíticas, é possível afirmar que os modelos computacionais para a flexão de placas com e sem enrijecedores foram devidamente verificados.

5.2 Estudo de caso

Como já havia sido mencionado anteriormente foram realizadas simulações numéricas de placas com diferentes tipos de configurações de enrijecedores, onde se manteve constante o volume total de material em relação ao caso da placa sem enrijecedores apresentado na verificação do modelo computacional. A fração de volume dos enrijecedores, definida pela Eq. (11) foi de $\phi = 0.50$. Além disso, foi avaliada a influência do grau de liberdade h_e/t_e no comportamento sob flexão da estrutura. As funções objetivo nesse estudo foram minimizar a deflexão máxima e a tensão máxima da placa. Para isso, as variáveis N_{el} (número de enrijecedores longitudinais) e N_{et} (número de enrijecedores transversais) foram definidas, conforme indicado na Fig. 3.

Foram estudadas numericamente quatro configurações para os enrijecedores. Suas identificações foram feitas de acordo com o seguinte formato: Placa ($N_{el} \times N_{et}$). Portanto foram estudadas as placas: P(2×2), P(2×3), P(3×2) e P(3×3), sendo a variação do grau de liberdade h_e/t_e realizada de acordo com as dimensões dos enrijecedores apresentadas, respectivamente, nas Tabelas 1, 2, 3 e 4. Em todas as simulações numéricas realizadas o elemento finito SHELL93 foi adotado em sua forma quadrada com aresta de 20 mm.

Usando como referência o deslocamento máximo transversal numérico ($w = 1.74$ mm) e a tensão de von Mises máxima numérica ($\sigma_{vM} = 110.59$ MPa) da placa sem enrijecedores, os valores de w e σ_{vM} para os casos indicados nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 foram normalizados, obtendo respectivamente, w_N e σ_{vMN} . Com isso, nas Figs. 4, 5, 6 e 7, os valores normalizados de deflexão e tensão máximas em função da variação do grau de liberdade h_e/t_e são apresentados.

Tabela 1. Dimensões dos enrijecedores da placa P(2×2)

h_e (mm)	t_e (mm)	h_e/t_e
112.23	30.00	3.74
134.45	25.00	5.38
167.79	20.00	8.39
223.34	15.00	14.89
334.45	10.00	33.45

Tabela 2. Dimensões dos enrijecedores da placa P(2×3)

h_e (mm)	t_e (mm)	h_e/t_e
96.48	30.00	3.22
115.52	25.00	4.62
144.09	20.00	7.20
191.71	15.00	12.78
286.94	10.00	28.69

Tabela 3. Dimensões dos enrijecedores da placa P(3×2)

h_e (mm)	t_e (mm)	h_e/t_e
83.96	30.00	2.80
100.63	25.00	4.03
125.63	20.00	6.28
167.29	15.00	11.15
250.63	10.00	25.06

Tabela 4. Dimensões dos enrijecedores da placa P(3×3)

h_e (mm)	t_e (mm)	h_e/t_e
74.82	30.00	2.49
89.64	25.00	3.59
111.86	20.00	5.59
148.89	15.00	9.93
222.97	10.00	22.30

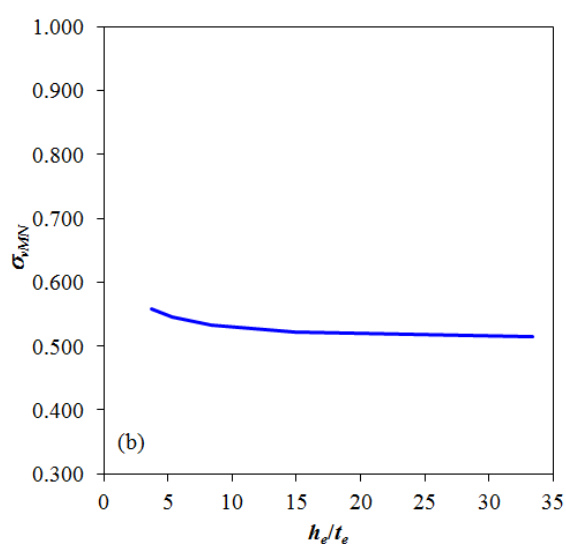
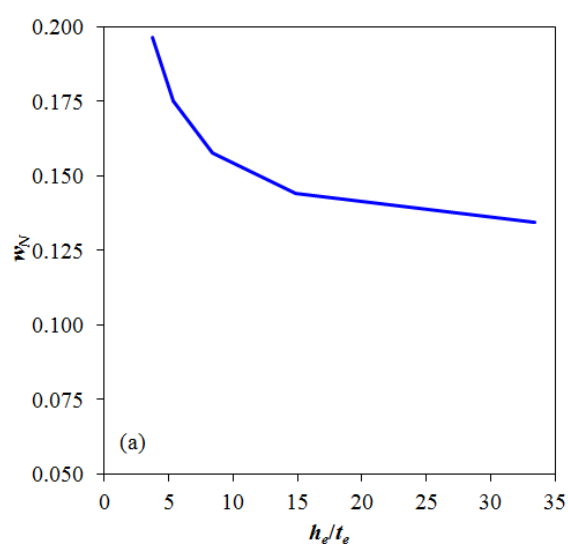


Figura 4. Deslocamentos transversais (a) e tensões de von Mises (b) máximos normalizados - Placa P(2×2)

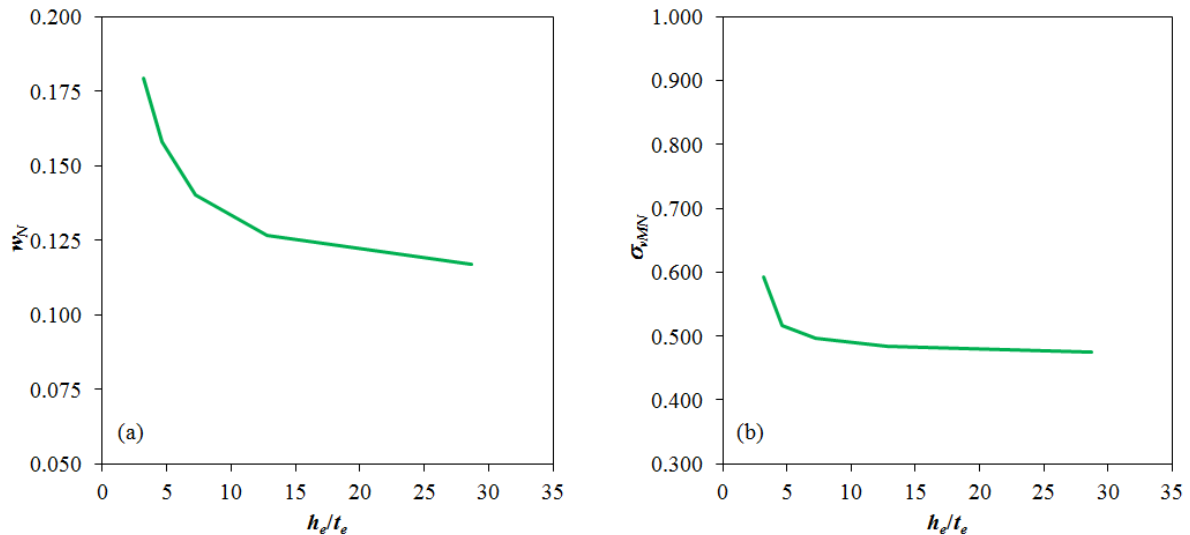


Figura 5. Deslocamentos transversais (a) e tensões de von Mises (b) máximos normalizados - Placa P(2×3)

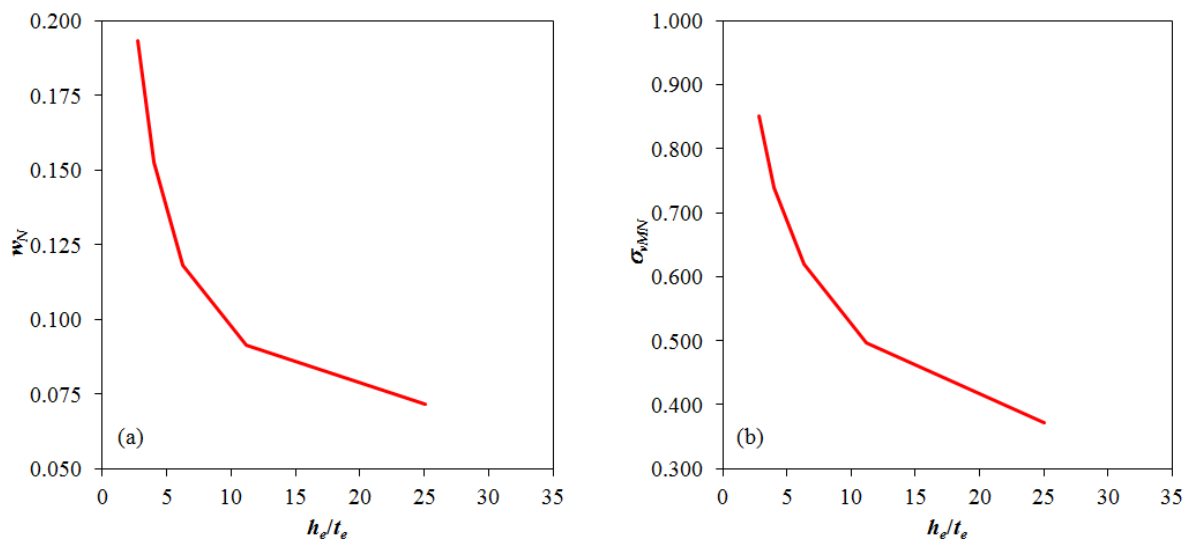


Figura 6. Deslocamentos transversais (a) e tensões de von Mises (b) máximos normalizados - Placa P(3×2)

A partir dos resultados ilustrados nas Figs. 4, 5, 6 e 7 é possível afirmar que todas as configurações geométricas propostas de placas com enrijecedores conduzem a uma redução na deflexão máxima, bem como a uma diminuição na tensão máxima em relação à placa sem enrijecedores.

Além disso, nas Figs. 4(a) e 5(a) é possível observar que o aumento da razão h_e/t_e causa uma redução em torno de 50% no valor do deslocamento máximo. Entretanto nota-se uma influência mais pronunciada para valores de $h_e/t_e < 15$. Entretanto, observando as Figs. 4(b) e 5(b), a mesma tendência não acontece, ou seja, as tensões não são influenciadas de maneira tão significativa pela variação de h_e/t_e . Nesses casos, para valores da $h_e/t_e > 5$ não existe diminuição considerável no valor da tensão máxima.

Já nas Figs 6 e 7 fica evidente que tanto a deflexão como a tensão diminuem sensivelmente seus valores à medida que o grau de liberdade h_e/t_e aumenta. Portanto, a inclusão de um terceiro enrijecedor longitudinal associada ao aumento de h_e/t_e , promovem uma melhora significativa no comportamento mecânico para as placas analisadas.

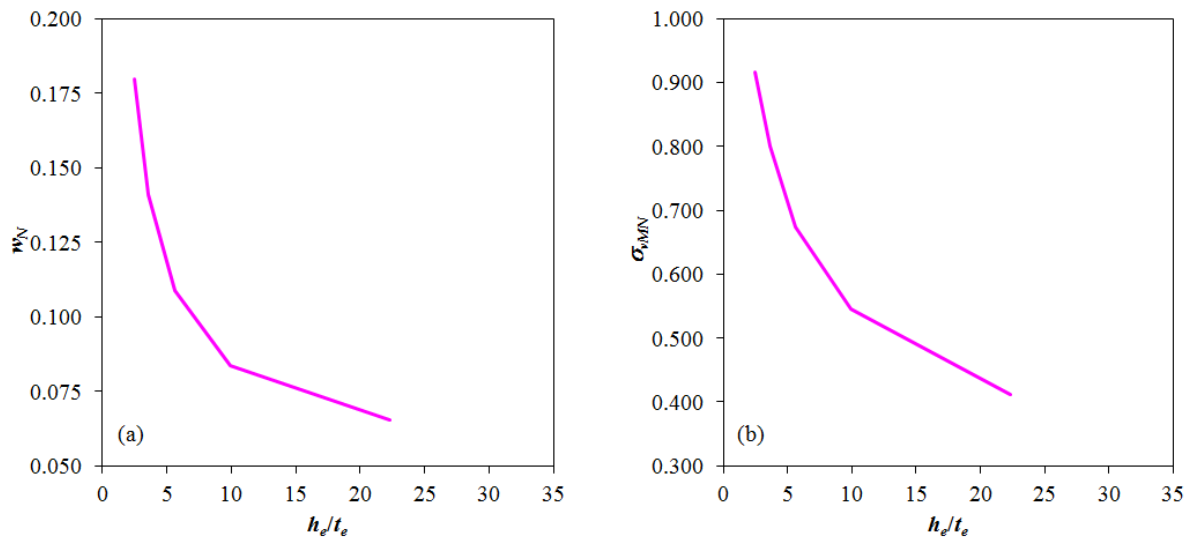


Figura 7. Deslocamentos transversais (a) e tensões de von Mises (b) máximos normalizados - Placa P(3x3)

A Fig. 8 é uma compilação dos resultados apresentados nas Figs. 4, 5, 6 e 7, permitindo identificar mais facilmente o efeito das diferentes configurações de enrijecedores e da variação do grau e liberdade h_e/t_e . Além disso, observa-se na Fig. 8(a) que, em relação à deflexão máxima, a placa que possui o melhor comportamento mecânico foi a P(3x3), ou seja, com essa configuração de enrijecedores foi possível obter os menores valores de deslocamentos transversais entre os casos analisados. Além disso, se forem comparados o melhor caso entre todos os analisados, que é a placa P(3x3) com $h_e/t_e = 22.30$, com o pior caso entre todas as placas com enrijecedores, que é a placa P(2x2) com $h_e/t_e = 3.74$, uma melhoria de aproximadamente 200% foi obtida.

Com relação à minimização da tensão máxima, na Fig. 8(b), é possível notar que a placa P(3x2) foi a que apresentou melhor comportamento mecânico. Se o melhor caso dessa configuração de enrijecedores, definido para $h_e/t_e = 25.06$, for comparado ao pior comportamento mecânico em termos de tensão, entre todos os casos analisados, que foi o de $h_e/t_e = 2.49$ da placa P(3x3), uma redução na tensão máxima de aproximadamente 150% foi atingida.

Lembrando que durante a aplicação do método *Constructal Design* o volume total de material foi mantido constante, ou seja, todos os casos propostos possuem a mesma quantidade de aço. Essas melhorias de 200% para a deflexão máxima e de 150% na tensão máxima evidenciam a importância da realização de estudos de otimização geométrica na engenharia estrutural.

Como no estudo do presente trabalho existem duas funções objetivo a serem alcançadas: minimizar o máximo deslocamento transversal da placa e minimizar a máxima tensão na placa, trata-se de uma análise multiobjetivo. Sendo assim, foi montada a Fig. 9 onde os melhores e os piores casos entre todas as configurações geométricas avaliadas são apresentados. A Fig. 9 relaciona os valores normalizados de deflexão e de tensão de von Mises da estrutura. Cabe destacar que os piores casos foram também incluídos na Fig.9 para mostrar que os mesmos encontram-se posicionados mais afastados do ponto ideal onde a deflexão e a tensão seriam nulas.

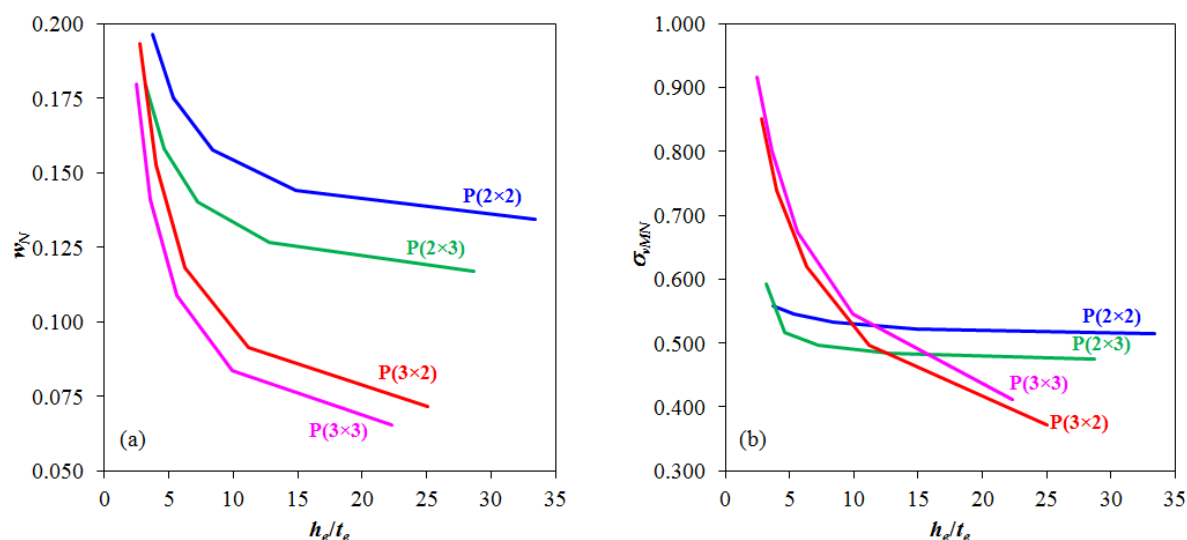


Figura 8. Comparação dos deslocamentos transversais (a) e tensões de von Mises (b) para todas placas

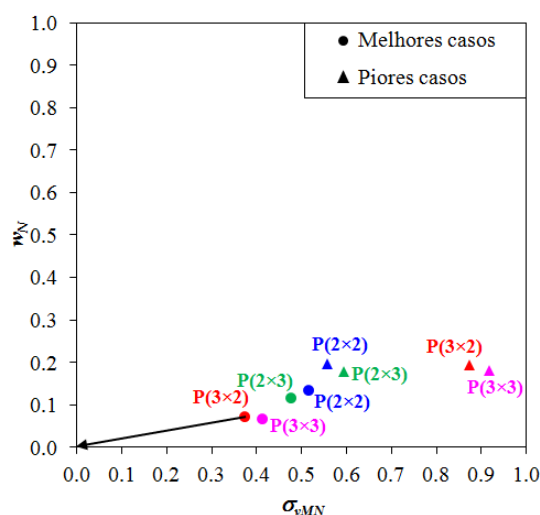


Figura 9. Melhores e piores casos entre as configurações geométricas analisadas

A partir da Fig. 9 é possível definir como geometria ótima entre os casos analisados àquela que está mais próxima da origem do sistema de coordenadas, ou seja, mais próxima do ponto ideal onde deslocamento transversal e tensão são nulos. Com isso a geometria ótima, entre os casos avaliados, é obtida com a placa P(3x2) com $(h_e/t_e)_o = 25.06$ que, quando submetida à flexão, atingiu uma deflexão máxima minimizada de $(w_N)_m = 0.071$ e uma tensão de von Mises máxima minimizada de $(\sigma_{vMN})_m = 0.372$. A Fig. 9 mostra também que a pior configuração foi obtida para a placa P(3x3) com $h_e/t_e = 2.49$, $w_N = 0.180$ e $\sigma_{vMN} = 0.917$. Então, na Fig. 10, é apresentada a distribuição de deslocamentos transversais da pior e da ótima geometrias. Já na Fig. 11 a distribuição de tensões de von Mises é mostrada para a pior e para a ótima geometrias.

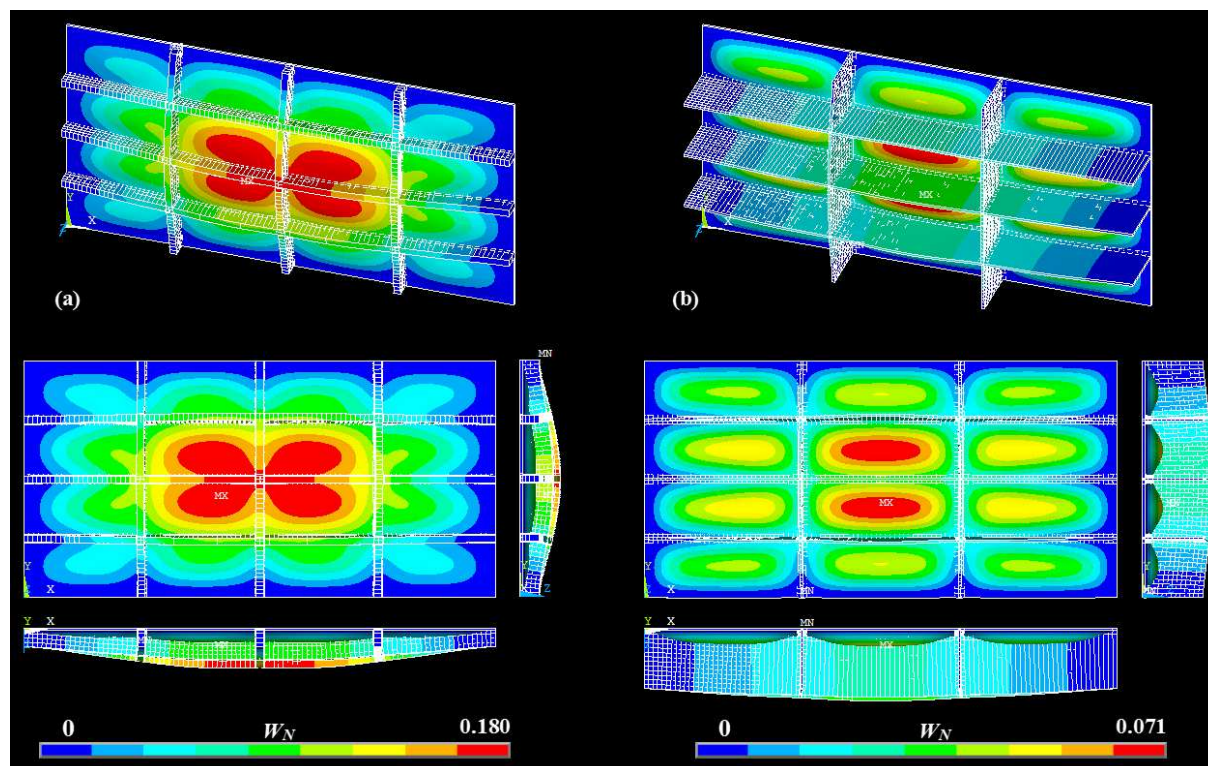


Figura 10. Distribuição de deslocamentos transversais normalizados da pior (a) e da ótima (b) geometrias

Para a geometria ótima (Fig 10(b)) a configuração $P(3 \times 2)$ associada à variação do grau de liberdade h_e/t_e permitiu que as deflexões da placa ocorressem de maneira a minimizar suas intensidades, ocorrendo uma melhor distribuição desses deslocamentos transversais. Já na pior geometria (Fig. 10(a)) esse comportamento não aconteceu, existindo uma distribuição das deflexões menos uniforme na placa. Isso pode ser identificado observando a escala de cores existente na Fig. 10, que representa a variação das deflexões na placa. Essa tendência está em concordância com o princípio *Constructal* da ótima distribuição de imperfeições que conduz à desempenhos superiores.

Já na Fig. 11 o princípio da ótima distribuição de imperfeições pode ser observado para a distribuição de tensões na placa. Na configuração geométrica ótima (Fig. 11(b)) existe uma transição mais suave entre os valores mínimos e máximos de tensão na placa, ocorrendo uma facilitação no fluxo de tensões no interior da placa e, portanto, existindo uma melhor distribuição de tensões. Na pior geometria (Fig. 11(a)), essa tendência não é observada, pois mesmo existindo um maior gradiente de tensões a transição entre as tensões mínimas e máximas não acontece de maneira gradual como ocorre no caso ótimo.

O princípio da ótima distribuição de imperfeições está diretamente relacionado com a evolução da geometria na busca de desempenhos superiores. Isso pode ser visto na Fig. 12, onde a distribuição de deflexões e de tensões para a placa $P(3 \times 2)$ é apresentada em função da variação do grau de liberdade h_e/t_e . É possível observar que à medida que h_e/t_e aumenta os deslocamentos transversais e as tensões vão apresentando melhores distribuições que, conseqüentemente, conduzem à minimização de seus valores.

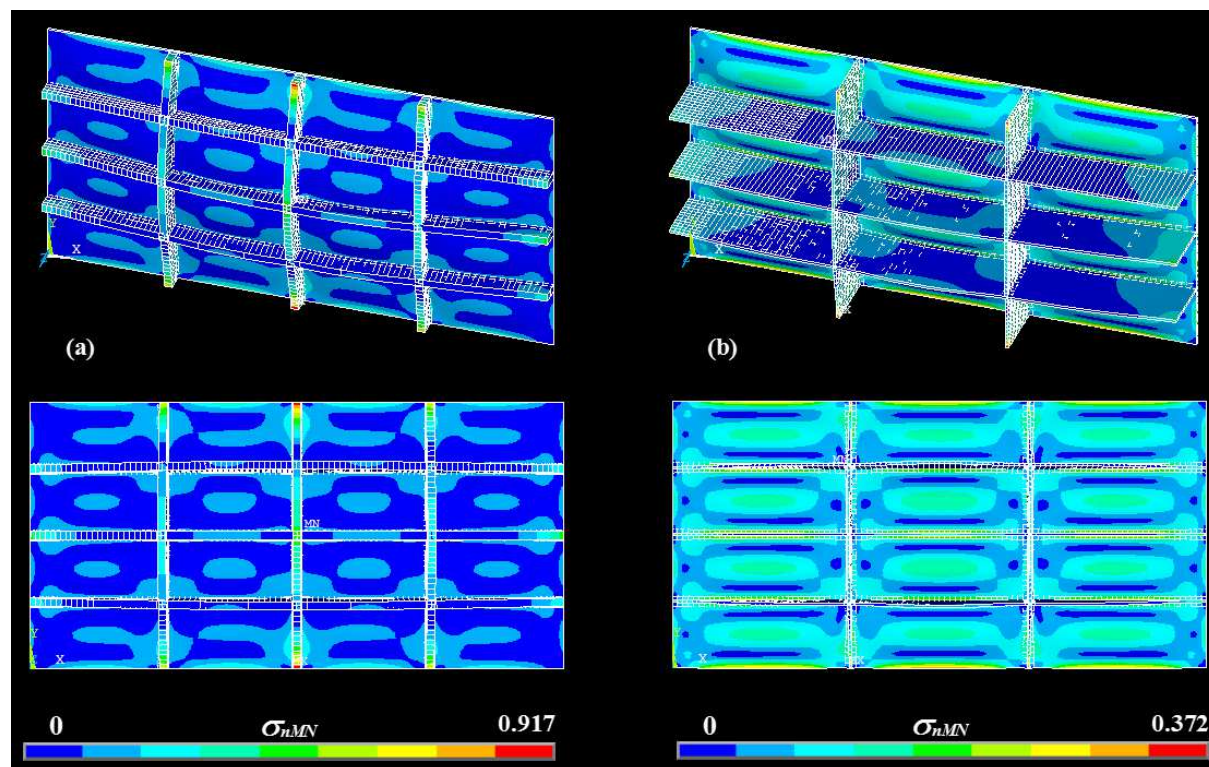


Figura 11. Distribuição de tensões de von Mises normalizadas para a pior (a) e para a ótima (b) geometria

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho o comportamento mecânico sob flexão de placas finas de aço, retangulares, engastada nos quatro bordos, com enrijecedores longitudinais e transversais foi numericamente estudado, tendo como referência uma placa sem enrijecedores. O método *Constructal Design* foi usado para definir as funções objetivos, as restrições e os graus de liberdade da análise. Em todos os casos estudados o volume total de aço da placa foi mantido constante, assim como seu comprimento e sua largura. Nas placas com enrijecedores o parâmetro fração de volume dos enrijecedores ϕ , foi usado para definir o volume de aço empregado nos enrijecedores e, conseqüentemente, o volume de aço a ser usado placa. Nesse trabalho foi adotado $\phi = 0.5$, ou seja, a placa de referência teve metade de sua espessura transformada em enrijecedores. A quantidade, a disposição e as dimensões dos enrijecedores foram também definidas de acordo com o método *Constructal Design*. A análise teve como objetivos minimizar as deflexões e tensões máximas nas placas. Modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS, que é baseado no MEF, foram verificados e empregados na simulação numérica dos casos propostos.

Os resultados indicam que é possível melhorar consideravelmente o comportamento mecânico de placas sob flexão, empregando enrijecedores. Esse fato não apresenta nenhuma novidade, uma vez que o uso de enrijecedores é amplamente empregado. Entretanto, a aplicação do método *Constructal Design* é inédita para o estudo de placas com enrijecedores sob flexão e mostrou que a minimização dos deslocamentos transversais e das tensões acontecem em virtude da melhor distribuição de deflexões e tensões que ocorre nas configurações geométricas que apresentam desempenho superiores. Reduções de 200% e 150%, respectivamente, na deflexão máxima e na tensão máxima foram obtidas quando a ótima geometria entre os casos estudados é comparada com a pior geometria.

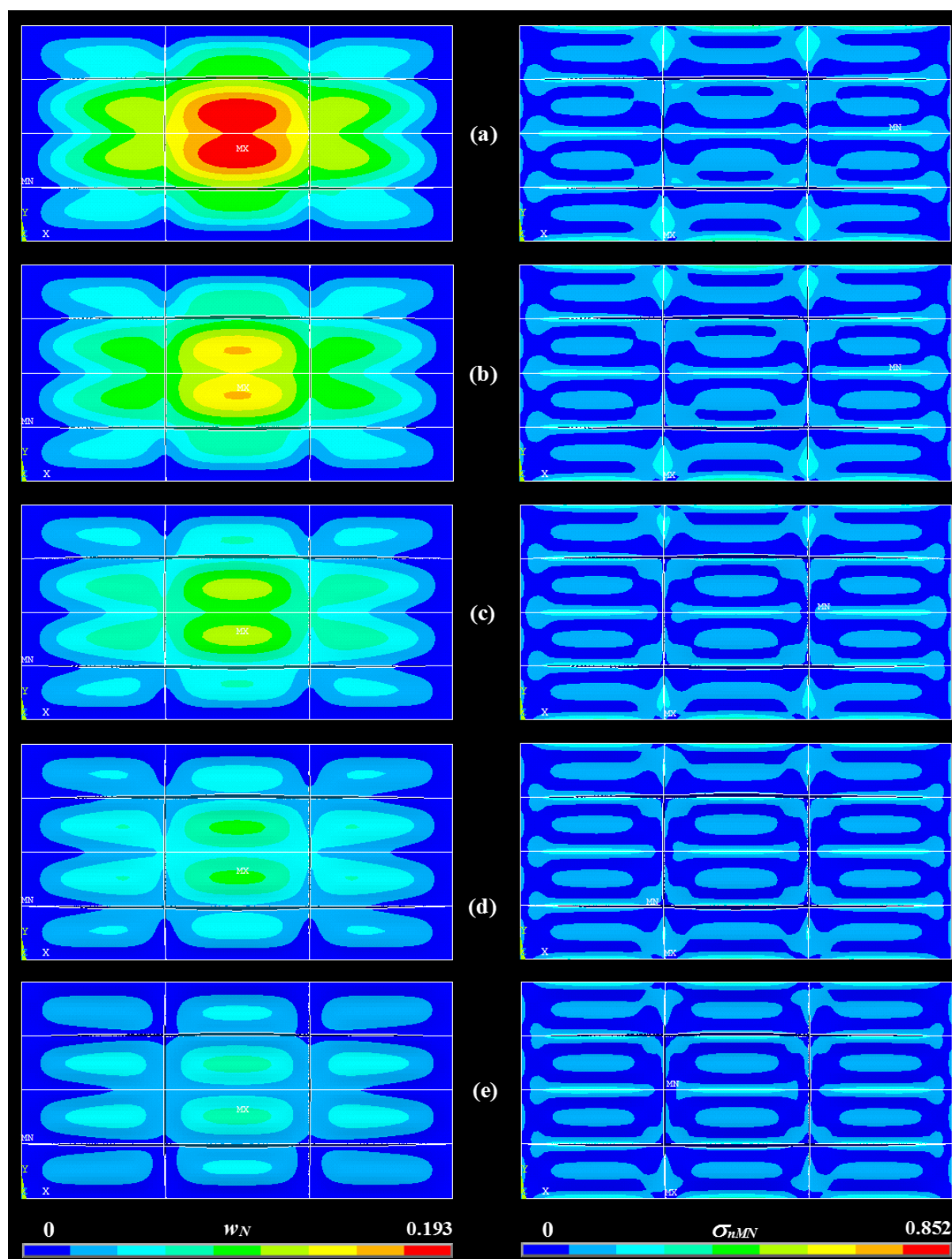


Figura 12. Evolução da minimização da deflexão e da tensão para placa P(3×2) com $h_e/t_e = 2.80$ (a), $h_e/t_e = 4.03$ (b), $h_e/t_e = 6.28$ (c), $h_e/t_e = 11.15$ (d), e $h_e/t_e = 25.06$ (e).

Esses resultados indicam que o método *Constructal Design*, que tem sido amplamente empregado em problemas de mecânica dos fluidos e de transferência de calor, pode ser aplicado com sucesso em problemas de engenharia estrutural. Para trabalhos futuros pretende-

se investigar diferentes configurações de enrijecedores, como também diferentes valores para a fração de volume dos enrijecedores.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Rio Grande (FURG), à Escola de Engenharia (EE) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGMC) pelo apoio e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão de bolsas de mestrado e de produtividade em pesquisa.

REFERÊNCIAS

ANSYS, 2005. *User's manual*. Swanson Analysis System Inc.

Assan, A. E., 2003. *Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos*. Ed. Unicamp.

Banerjee, M., Jain, N. K., e Sanyal, S., 2013. Stress Concentration in Isotropic and Orthotropic Composite Plates With Center Circular Hole Subject To Transverse Static Loading. *International Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, vol. 3, pp. 109–113.

Bejan, A., 1997. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, pp. 799–816.

Bejan, A., 2000. *Shape and structure, from engineering to nature*, Cambridge University Press.

Bejan, A. e Lorente, S., 2008. *Design with Constructal Theory*. Wiley, Hoboken.

Bejan, A., e Lorente, S., 2006a. Constructal Theory of generation of configuration in nature and engineering. *Journal of Applied Physics*, vol. 100, pp. 041301.

Bejan, A., e Lorente, S., 2006b. The Constructal Law (La Loi Constructale). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 49, pp. 445–445.

Bejan, A., & Zane, J. P., 2012. *Design in Nature: How The Constructal Law Govern Evolution in Biology Physics, Technology, and Social Organization*. Doubleday.

Hasan, M. M., 2007. Optimum design of stiffened square plates for longitudinal and square ribs. *Al-Khwarizmi Engineering Journal*, vol. 3.

Helbig, D., da Silva, C. C. C., Real, M. de V., Vaz, J., Rocha, L. A. O., dos Santos, E. D., & Isoldi, L. A., 2013. Análise Numérica do Comportamento Mecânico sob Flexão de Placas Finas de Material Compósito Laminado Reforçado por Fibras. *Vetor*, vol. 23, pp. 5–15.

Jain, N. K., 2009. Analysis of Stress Concentration and Deflection in Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates with Central Circular Hole under Transverse Static Loading. vol. 36.

Jawad, M. H., 1994. *Theory and Design of Plate and Shell Structures*. Springer.

Mendonça, P. de T. R., 2005. *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche*. Manole.

Ramaswamy, R. S. B., 1999. *Optimal Design of Stiffened Plates*. Canadá.

Soriano, H. L., 2003. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. edusp.

Szillard, R., 2004. *Theories and application of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*. Wiley.

- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger. S., 1959. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill.
- Zehnder, A., 2008, *Closed Form Solution for the Semi-Monocoque Shell*. Disponível em: https://confluence.cornell.edu/display/SIMULATION/ANSYS+-+Semi-monocoque+shell+-+Step+9?preview=/90097107/90409159/shell_validation.pdf
- Yousif, M. V., Naief, N. K. M., Hamad, Y. M., 2008. *Optimum Height of Plate Stiffener under Pressure Effect*. University of Baghdad, AL-Khwarizmi College of Engineering.
- Young W. C., & Budynas, R. G., 2002. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. McGraw-Hill.