



ESTUDO DE VIBRAÇÃO ACOPLADA DE CASCAS CILÍNDRICAS SOB DIFERENTES NÍVEIS DE FLUIDO E POSIÇÕES DE ANÉIS ENRIJECEDORES

Neander Berto Mendes

Lineu José Pedroso

neanderberto@hotmail.com

lineu@unb.br

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental- Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF.

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n Cidade Universitária, 50.740-530, Recife, PE, Brasil.

Resumo. Dando sequência ao estudo apresentado em Mendes et al. (2014), baseado em artigo de Kim et al. (2004), este trabalho expõe os efeitos do nível de fluido - invíscido, incompressível e irrotacional - nas frequências de modos acoplados para casca cilíndrica circular reta não-enrijecida e enrijecida por cinco anéis enrijecedores externamente excêntricos com condição de contorno engastada-livre. São analisados três casos quanto à disposição dos anéis enrijecedores: enrijecedores uniformemente espaçados, enrijecedores locados próximos do fundo da casca cilíndrica e enrijecedores locados próximos do topo da casca cilíndrica. São adotadas abordagens analítica (método de Rayleigh-Ritz) e numérica (método dos elementos finitos - MEF - via ANSYS) no presente trabalho.

Palavras-chave: Vibrações Livres, Interação Fluido-Estrutura, Elementos Finitos.

1 INTRODUÇÃO

A segurança de tanques contendo fluidos é um problema que despertou o interesse de muitos pesquisadores no passado e ainda o faz atualmente. Tais tanques são utilizados em vários ramos da engenharia para armazenar fluidos. Na maioria das vezes esses tanques são cilíndricos, verticais, de seção transversal circular e são, normalmente, parcialmente preenchidos com líquidos, tendo uma superfície livre.

Cascas cilíndricas circulares enrijecidas por anéis são amplamente utilizadas em muitas aplicações estruturais. Normalmente, os cilindros são enrijecidos por anéis ou cordões para aumentar a rigidez e resistência, reduzindo o peso da estrutura a ser projetada. Na concepção dessas cascas, é vital conhecer suas frequências de ressonância pois vibrações excessivas podem levar à ruptura por fadiga.

Este trabalho tem por objetivo a análise de vibrações livres de uma casca cilíndrica circular reta engastada (fundo) - livre (topo), para os casos não-enrijecida e enrijecida por 5 anéis enrijecedores externamente excêntricos, posicionados de três maneiras distintas, com razões de espaçamento em PG iguais a 1,0 (enrijecedores uniformemente espaçados), 0,5 (enrijecedores localizados próximos do topo da casca cilíndrica) e 2,0 (enrijecedores localizados próximos do fundo da casca cilíndrica), para 5 diferentes níveis de fluido, com relações altura d'água pela altura do tanque iguais a 0 (casca vazia), $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1 (casca completamente preenchida com fluido). As condições de contorno consideradas para o fluido são fechada (fundo) - aberta (superfície livre). São utilizadas abordagens analítica (método de Rayleigh-Ritz) e numérica (método dos elementos finitos, MEF) via software ANSYS.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Inúmeras pesquisas sobre cascas parcialmente preenchidas de fluido e não-enrijecidas têm sido realizadas por diferentes abordagens, tais como o método de expansão de autofunções [Kondo (1991)], o método de Galerkin [Yamaki, et al. (1984)], o método do quociente de Rayleigh [Gupta e Hutchinson (1988)], o método de Rayleigh-Ritz [Amabili et al. (1998)], o método dos elementos finitos [Lakis e Sinno (1992), Balendra et al. (1982), Gonçalves e Ramos (1996)], o método da colocação [Mikami e Yoshimura (1992)], o método da expansão em séries de Fourier [Jeong, e Lee (1998)] e experimental [Mazuch et al. (1996)]. Para casca cilíndrica enrijecida por anéis sem fluido muitos pesquisadores [Yang e Zhou (1995), Lee e Kim (1998), Lee e Kim (1999), Kim e Lee (2002)] conduziram análises de vibração livre. A literatura de vibrações de casca cilíndrica parcialmente preenchida com fluido e enrijecida por anéis é menos extensa. Gupta (1995) considerou a casca cilíndrica com um anel em uma borda livre no topo da casca. Em seu estudo, a influência do anel de topo foi aproximada pela mudança das condições de contorno na parte superior do tanque de uma extremidade livre para uma extremidade simplesmente apoiada. Amabili et al. (1998) apresentou resultados numéricos para o tanque com apenas um enrijecedor. Kim et al. (2004) apresenta análise de vibração livre de cascas cilíndricas parcialmente preenchidas com fluido e enrijecidas por anéis com condições de contorno simplesmente apoiada e engastada-livre. Em seu estudo, o efeito de ondas de superfície livre é considerado na análise e os modos de *bulging* (onde as paredes do tanque oscilam com o líquido) e *sloshing* são estudados. Mendes et al. (2014), baseados em Kim et al. (2004), desenvolveram um código em MATLAB para o

tratamento analítico do problema de vibração de cascas cilíndricas sob diferentes níveis de fluido e posições de anéis enrijecedores. Seus resultados foram validados com aqueles publicados por Kim et al. (2004) e pelo MEF via software ANSYS.

3 FORMULAÇÃO TEÓRICA E PARÂMETROS DE ANÁLISE

3.1 Abordagem analítica

Considerar a casca cilíndrica de paredes delgadas de comprimento L , raio R e espessura h como mostrada na Fig. 1. A casca é enrijecida igualmente ou desigualmente por anéis enrijecedores com seção transversal retangular de altura d_r e largura (ou espessura) b_r . O k -ésimo anel enrijecedor está localizado a uma distância x_k medida da extremidade inferior da casca. A técnica de enrijecimento considerada neste trabalho é a de excentricidade externa em que os enrijecedores são colocados externamente à superfície média da casca. A casca e os enrijecedores são consideradas como sendo feitas de material elástico com módulo de Young E , razão de Poisson ν e massa específica ρ . O fundo da casca é considerado plano e rígido. As coordenadas radial, circunferencial e axial são simbolizadas por r (ou z), θ e x , respectivamente. O tanque é preenchido a uma altura H com um fluido não-viscoso, incompressível e irrotacional de massa específica ρ_L .

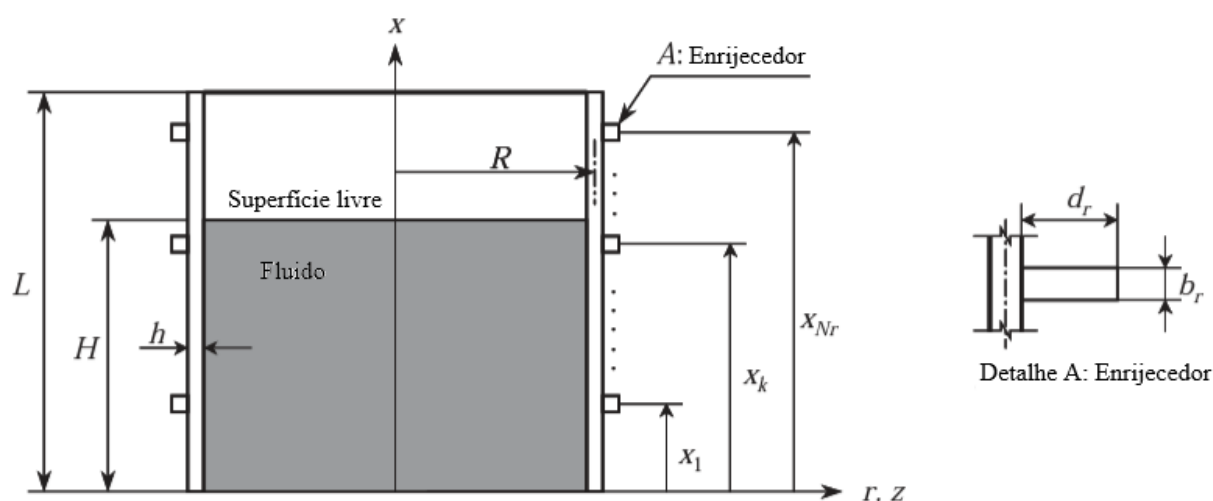


Figura 1 - Configuração de casca cilíndrica enrijecida por anéis parcialmente preenchida com líquido (Kim et al., 2004, modificada)

Os anéis enrijecedores considerados são espaçados uniforme ou desuniformemente. As posições axiais dos enrijecedores são mostradas na Fig. 2. Os enrijecedores são arranjados funcionalmente na direção axial. O símbolo x_k denotando a posição do enrijecedor é dado em termos da razão de espaçamento em progressão geométrica S (razão de espaçamento entre anéis enrijecedores). Como mostrado na Fig. 2, os enrijecedores são locados próximos da borda $x = 0$ no caso de $S > 1$, da borda da casca $x = L$ no caso de $S < 1$, e uniformemente espaçados através da casca no caso de $S = 1$.

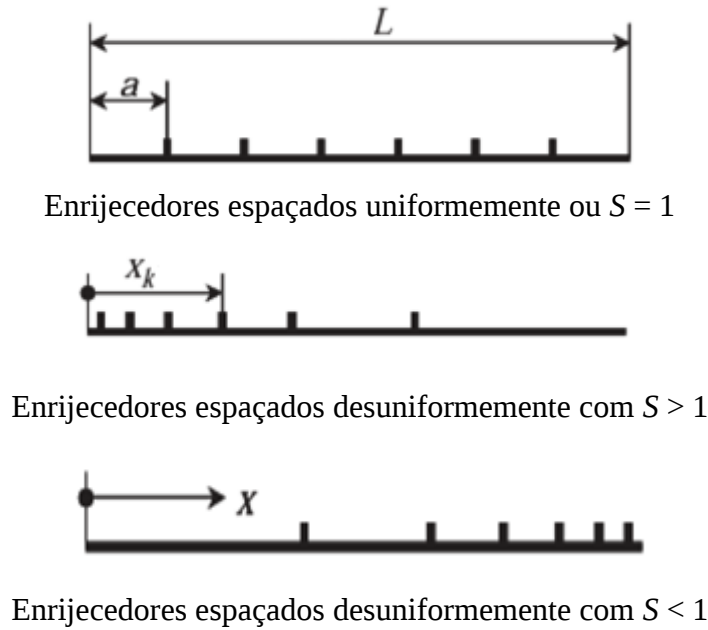


Figura 2 – Disposição dos anéis enrijecedores (Kim et al., 2004, modificada)

As funções de deslocamento admissíveis para uma casca cilíndrica vibrando livremente sob quaisquer condições de contorno podem ser descritas como

$$u(x, \theta) = \sum_{m=1}^M U_{mn} \frac{\partial \psi_m(x)}{\alpha_m \partial x} \cos(n\theta), \quad v(x, \theta) = \sum_{m=1}^M V_{mn} \psi_m(x) \sin(n\theta),$$

$$w(x, \theta) = \sum_{m=1}^M W_{mn} \psi_m(x) \cos(n\theta), \quad (1)$$

onde U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} são as amplitudes para cada direção, m e n são números de ondas axiais e circunferenciais. $\psi_m(x)$ utilizado como o modo axial é uma função de viga que satisfaça as condição de contorno descrita. α_m é um parâmetro que depende da condição de contorno.

Para uma casca cilíndrica circular reta engastada-livre, usa-se o modo de vibração de viga engastada-livre, segundo Blevins (1995),

$$\psi_m(x) = \cosh(\alpha_m x) - \cos(\alpha_m x) - \sigma_m [\sinh(\alpha_m x) - \sin(\alpha_m x)], \quad (2)$$

$$\alpha_m = \frac{\lambda_m}{L}, \quad (3)$$

onde os parâmetros λ_m e σ_m podem ser numericamente computados pelas seguintes fórmulas:

$$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0, \sigma_m = \frac{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m}{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m} \quad (4)$$

O potencial de deformação do fluido $\phi^{(1)}$ associado com a casca flexível considerando o fundo fechado e a superfície livre aberta é adotado como

$$\phi^{(1)}(x, r, \theta) = \sum_{m=1}^M \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} A_{m\bar{m}n} \cos(\alpha_{\bar{m}} x) I_n(\alpha_{\bar{m}} r) \cos(n\theta), \quad (5)$$

$$\alpha_{\bar{m}} = \frac{(2\bar{m}-1)\pi}{2H} \quad (6)$$

$$A_{m\bar{m}n} = \frac{2W_{mn} \gamma_{m\bar{m}}}{I_n'(\alpha_{\bar{m}} R) H}, \gamma_{m\bar{m}} = \int_0^H \psi_m(x) \cos(\alpha_{\bar{m}} x) dx \quad (7)$$

Como demonstrado em Mendes (2014), dadas as energias potencial e cinética da estrutura e a energia cinética do fluido e aplicando-se o método de Rayleigh-Ritz, o problema de autovalor resultante pode ser escrito na forma

$$\det\{[K_E] - \omega^2([M_E] + [M_{CL}])\} = 0 \quad (8)$$

Na Eq. (8), as matrizes $[K_E]$ e $[M_E]$ são matrizes de rigidez e massa da estrutura e consistem de sub-matrizes (3 X 3) como se segue:

$$[K_E] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{13}]^T & [K_{23}]^T & [K_{33}] \end{bmatrix}, [M_E] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{22}] & [M_{23}] \\ 0 & [M_{23}]^T & [M_{33}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

As sub-matrizes $[K_{ij}]$, $[M_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$) têm dimensões ($M \times M$) e são dadas no Apêndice A.

$[M_{CL}]$, a matriz de massa adicional do fluido, com dimensão ($M \times M$) é dada por

$$[M_{CL}] = \rho_L R C_n \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \frac{2 \gamma_{m\bar{m}} \gamma_{j\bar{m}}}{I_n'(\alpha_{\bar{m}} R) H} I_n(\alpha_{\bar{m}} R), \text{ para } m, j = 1, \dots, M, \quad (10)$$

$$C_n = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) d\theta, \quad (11)$$

A matriz $[M_{CL}]$ é adicionada à matriz $[M_{33}]$ em $[M_E]$.

Resolvendo o problema de autovalor as frequências naturais e seus modos de vibração correspondentes são obtidos.

O desenvolvimento analítico completo do problema proposto neste trabalho encontra-se em Mendes et al. (2014).

3.2 Parâmetros de análise

Nas análises, as seguintes propriedades dos materiais são adotadas: a casca e os enrijecedores considerados são feitos de aço com: módulo de Young $E = 206 \text{ GPa}$, razão de Poisson $\nu = 0,3$ e massa específica $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; o líquido é água com massa específica $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$.

O código MEF comercial ANSYS é utilizado nos procedimentos de análise em elementos finitos. Na análise em elementos finitos, modelos tridimensionais são construídos com elementos de casca elástica (SHELL63) para a casca, elementos de viga (BEAM188) para os anéis enrijecedores e elementos de fluido acústico (FLUID30) para a região fluida. O problema de autovalores formulado no âmbito do MEF para análise de vibrações é resolvido pelos métodos modais *Block Lanczos* (para sistemas estruturais desacoplados) e *Unsymmetric* (para sistemas fluido-estrutura acoplados) incluídos no código ANSYS.

Baseado em testes de convergência desenvolvidos, adotou-se no presente artigo, na abordagem analítica: $M = 30$ e $\bar{M} = 25$. Quanto à análise através do MEF via ANSYS, os modelos foram discretizados de forma que o comprimento das bordas dos elementos, de modo geral, fosse da ordem de 0,025.

3.3 Modelos

De modo a analisar as frequências naturais e os modos de vibração de uma casca cilíndrica de aço enrijecida por 5 (cinco) anéis com condição de contorno engastada-livre, são apresentados, neste trabalho, quatro modelos: (I) casca não-enrijecida e (II) casca enrijecida com $S = 1,0$ (anéis uniformemente distribuídos), (III) casca enrijecida com $S = 0,5$ (enrijecedores localizados próximos do topo da casca cilíndrica) e (IV) casca enrijecida com $S = 2,0$ (enrijecedores localizados próximos do fundo da casca cilíndrica) para 5 (cinco) diferentes níveis de fluido: relações H/L iguais a: 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1. Os anéis enrijecedores são considerados externamente excêntricos.

As propriedades geométricas adotadas são: raio $R = 0,4 \text{ m}$, comprimento $L = 2R = 0,8 \text{ m}$; espessura $h = 2 \text{ mm}$, espessura dos anéis $b_r = 5h = 10 \text{ mm}$ e largura dos anéis $d_r = 2b_r = 20 \text{ mm}$.

A Fig. 3, apresenta os modelos analisados.

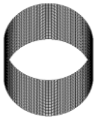
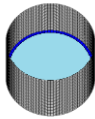
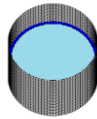
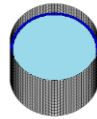
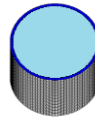
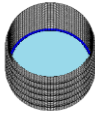
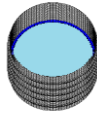
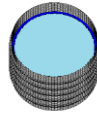
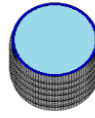
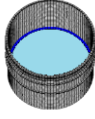
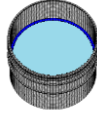
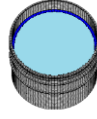
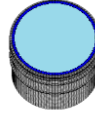
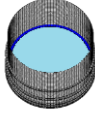
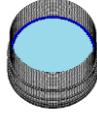
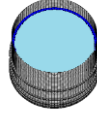
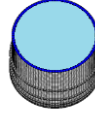
Casca		H/L				
		0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Não-Enrijecida						
Enrijecida	$S = 1,0$					
	$S = 0,5$					
	$S = 2,0$					

Figura 3 - Modelos analisados no presente trabalho

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Tabela 1 apresenta as cinco primeiras frequências naturais numéricas, em Hz , obtidas pelo MEF via ANSYS para todos os casos analisados: cascas não-enrijecida e enrijecidas com anéis enrijecedores externamente excêntricos com $S = 1,0$; $0,5$ e $2,0$ para relações $H/L = 0$; $0,25$; $0,50$; $0,75$ e 1 . As frequências são acompanhadas de seus números de meia-onda longitudinal (m) e circunferencial (n).

Tabela 1 - Frequências naturais de vibração numéricas obtidas via ANSYS, em Hz, acompanhadas de seus números de ondas axial e circunferencial (m,n)

Casca	N	H/L					
		0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	
Não-Enrijecida	1	99,794 (1,5)	99,332 (1,5)	90,210 (1,5)	66,353 (1,5)	45,465 (1,5)	
	2	109,825 (1,4)	109,162 (1,4)	97,545 (1,4)	69,858 (1,4)	46,820 (1,4)	
	3	118,154 (1,6)	117,743 (1,6)	106,424 (1,6)	79,423 (1,6)	57,003 (1,6)	
	4	152,454 (1,7)	151,920 (1,7)	131,201 (1,7)	96,452 (1,3)	64,526 (1,3)	
	5	163,742 (1,3)	161,991 (1,3)	139,077 (1,3)	99,504 (1,7)	77,201 (1,7)	
Enrijecida	$S = 1,0$	1	224,133 (1,3)	222,621 (1,3)	196,434 (1,3)	145,362 (1,3)	102,455 (1,3)
		2	253,265 (1,2)	249,607 (1,2)	211,748 (1,2)	153,218 (1,2)	108,693 (1,2)
		3	313,657 (1,4)	313,25 (1,4)	267,942 (1,4)	206,849 (1,4)	152,709 (1,4)
		4	407,788 (1,5)	407,082 (1,5)	326,847 (1,5)	255,286 (1,1)	192,898 (1,1)
		5	453,308 (1,6)	433,391 (2,4)	330,524 (2,4)	279,576 (1,5)	215,323 (1,5)
	$S = 0,5$	1	217,200 (1,2)	215,155 (1,2)	192,324 (1,2)	146,679 (1,2)	108,062 (1,2)
		2	252,054 (1,3)	249,697 (1,3)	212,559 (1,3)	159,605 (1,3)	126,203 (1,3)
		3	382,504 (1,4)	304,861 (1,8)	220,693 (1,8)	182,952 (1,4)	169,600 (1,4)
		4	400,325 (1,1)	305,070 (1,9)	222,281 (1,7)	201,183 (1,5)	186,81 (1,1)
		5	420,714 (1,9)	317,633 (1,7)	227,121 (1,6)	215,660 (1,6)	196,645 (1,5)
	$S = 2,0$	1	150,911 (1,5)	150,913 (1,5)	147,359 (1,4)	108,742 (1,4)	67,954 (1,4)
		2	154,422 (1,4)	154,398 (1,4)	150,422 (1,5)	110,896 (1,3)	71,615 (1,5)
		3	156,366 (1,6)	156,347 (1,6)	156,651 (1,6)	121,002 (1,5)	73,135 (1,3)
		4	176,939 (1,7)	176,933 (1,7)	157,784 (1,3)	134,629 (1,6)	78,872 (1,6)
		5	180,215 (1,3)	179,207 (1,3)	177,100 (1,7)	156,206 (1,2)	93,714 (1,7)

Com intuito de validar os resultados, a Tabela 2 traz um comparativo analítico-numérico das frequências naturais de vibração, em Hz, para o modo (1,3). O erro percentual mencionado é calculado por $(|f_a - f_n|/f_a) \times 100$, onde f_a é a frequência analítica e f_n é a frequência numérica. De acordo com a Tabela 2, os resultados numéricos obtidos pelo MEF via ANSYS apresentam excelente acordo com os resultados analíticos para os casos de casca não-enrijecida. Para os casos de casca enrijecida, os erros são maiores, chegando a máximos de 6,62% e 6,43% para relações $H/L = 1$ e 0, para os casos $S = 1,0$ e 0,5 respectivamente. As discrepâncias entretanto estão dentro de uma faixa razoável e os resultados podem ser considerados confiáveis. Em vista do exposto, discussões a respeito das frequências naturais e modos de vibração são a seguir desenvolvidas utilizando os resultados numéricos obtidos através do MEF via ANSYS.

Tabela 2 - Comparativo analítico-numérico das frequências naturais de vibração, em Hz, para o modo (1,3)

Casca	Abordagem		H/L				
	A: Analítica	N: Numérica	0	¼	½	¾	1
Não-Enrijecida	A		163,483	161,695	138,673	95,983	64,123
	N		163,742	161,991	139,077	96,452	64,526
	Erro (%)		0,16%	0,18%	0,29%	0,49%	0,63%
S = 1,0	A		239,794	238,050	207,915	153,468	109,718
	N		224,133	222,621	196,434	145,362	102,455
	Erro (%)		6,53%	6,48%	5,52%	5,28%	6,62%
Enrijecida S = 0,5	A		269,374	266,523	221,963	166,112	134,046
	N		252,054	249,697	212,559	159,605	126,203
	Erro (%)		6,43%	6,31%	4,24%	3,92%	5,85%
S = 2,0	A		182,842	181,828	160,348	112,593	73,888
	N		180,215	179,207	157,784	110,896	73,135
	Erro (%)		1,44%	1,44%	1,60%	1,51%	1,02%

A fim de estimar o efeito da quantidade de fluido nas frequências naturais de modos acoplados para casca cilíndrica preenchida de fluido, uma frequência natural normalizada é definida por f_w/f_e , onde f_e e f_w significam frequências naturais da casca vazia e preenchida com

fluido respectivamente. A variação das frequências naturais numéricas (1,3), (1,4) e (1,5) para cascas não-enrijecida e enrijecidas com condição de contorno engastada-livre é mostrada na Fig. 4.

Como se pode observar na Fig. 4, as variações de frequência com o nível de fluido são diferentes entre os métodos de enrijecimento e o efeito do método de enrijecimento é grande. As frequências normalizadas não variam linearmente de acordo com o nível de fluido. O efeito do nível de fluido na faixa $0 < H/L < 0,50$ é muito significativo para os modos (1,4) e (1,5) para cascas enrijecidas com $S = 0,5$ e pouco significativo para cascas enrijecidas com $S = 2,0$. O efeito do nível do fluido é muito pequeno para razões de preenchimento pequenas ($H/L < 0,25$). É notável que há algumas regiões preenchidas com fluido em que as frequências naturais são quase as mesmas. Isto significa que as frequências nestas regiões são quase as mesmas independentemente do nível de fluido. Isso não significa que a massa hidrodinâmica devido ao movimento do fluido aumenta sempre com o aumento do nível de fluido. Geralmente a frequência normalizada decresce a um valor mínimo de uma casca completamente preenchida por fluido devido ao aumento da massa hidrodinâmica induzida pelo movimento do fluido durante a vibração visto que a quantidade de fluido aumenta. As frequências naturais de uma casca cilíndrica completamente preenchida com fluido decrescem em torno de 50-60% em relação àquelas de uma casca vazia. De acordo com Kim et al. (2004), a variação da frequência normalizada para casca preenchida com fluido depende do número de onda axial e circunferencial.

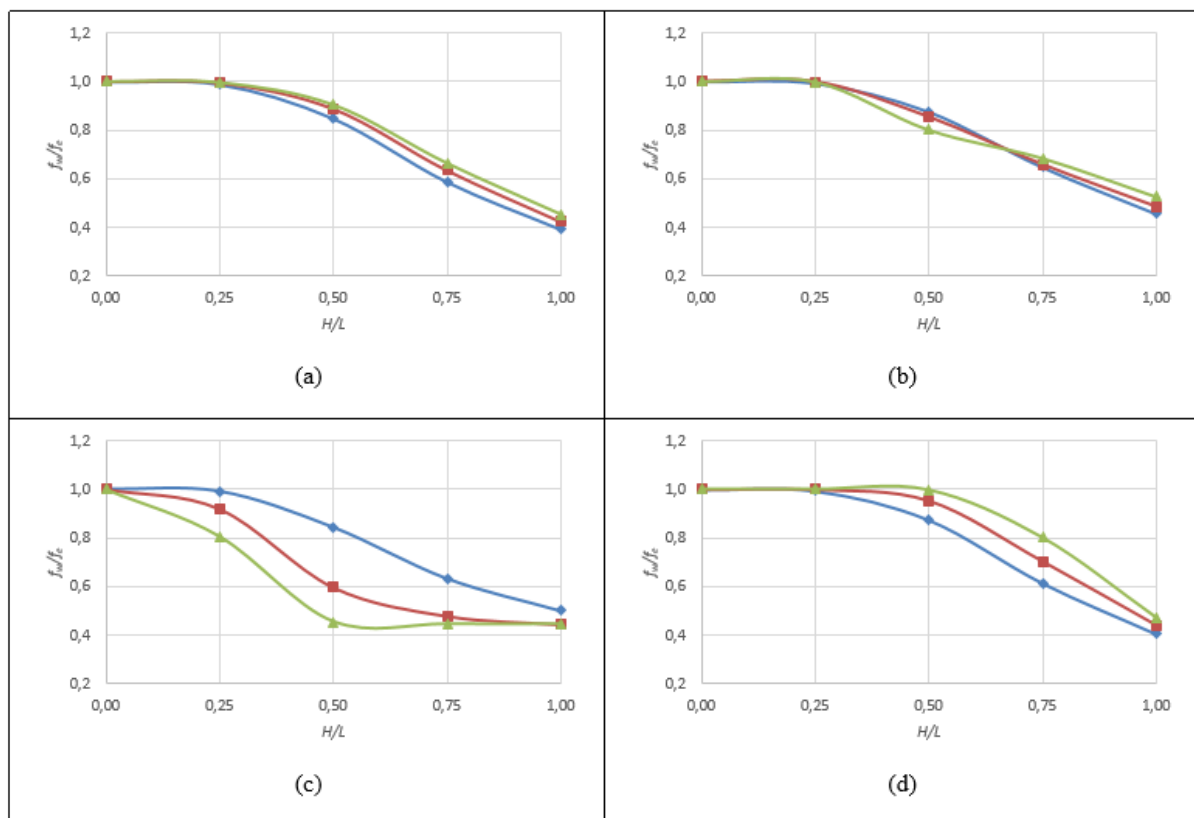


Figura 4 - Efeito do nível de fluido nas frequências do primeiro modo de *bulging* ($m = 1$) para cascas não-enrijecida e enrijecidas por cinco anéis externamente excêntricos com condição de contorno engastada-livre: (a) casca não-enrijecida; (b) casca enrijecida com $S = 1,0$; (c) casca enrijecida com $S = 0,5$; (d) casca enrijecida com $S = 2,0$: $\bullet$ $n = 3$ $\blacksquare$ $n = 4$ $\blacktriangle$ $n = 5$

A Fig. 5 mostra a variação da frequência fundamental (numérica) com a posição dos enrijecedores. Na Fig. 5, a mudança da frequência fundamental é calculada por $[(f_s - f_u)/f_u] \times 100$, onde f_u e f_s significam frequências fundamentais de casca não-enrijecida e enrijecida respectivamente. A frequência é maior para cascas enrijecidas com $S = 1,0$ do que para cascas enrijecidas com $S = 0,5$ para relações $H/L = 0; 0,25$ e $0,50$; entretanto para relações $H/L = 0,75$ e 1 , a frequência é maior para cascas enrijecidas com $S = 0,5$ do que para cascas enrijecidas com $S = 1,0$. Para cascas enrijecidas com $S = 2,0$, a frequência é menor do que para cascas enrijecidas com $S = 1,0$ para qualquer relação H/L . Os resultados mostram que a frequência pode ser significativamente influenciada pela posição dos enrijecedores.

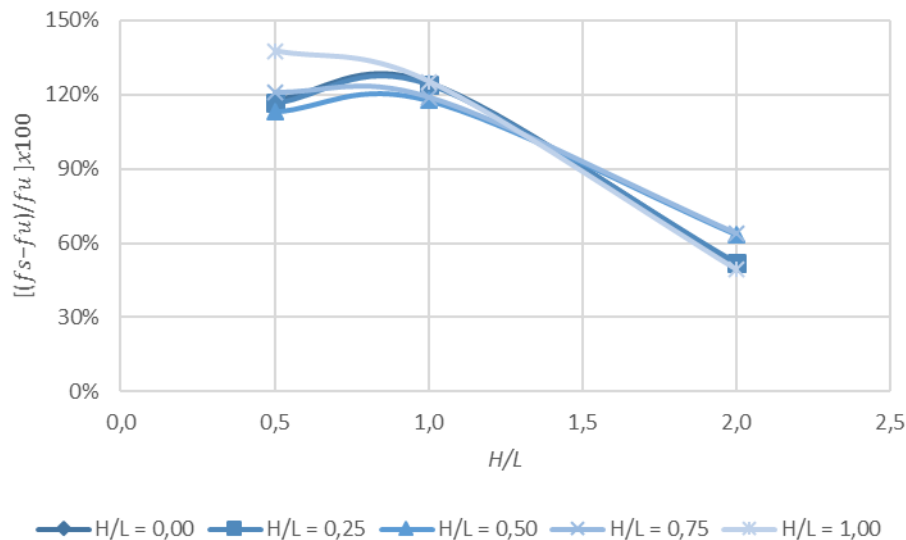


Figura 5 - Efeito da razão de espaçamento dos enrijecedores na frequência de modo de *bulging* para cascas enrijecidas por cinco anéis para condição de contorno engastada-livre.

A Fig. 6 indica a variação do primeiro modo de vibração radial para $n = 5$ de cascas não-enrijecida e enrijecidas por cinco anéis com condição de contorno engastada-livre, obtidos via ANSYS. Os deslocamentos radiais são apresentados ao longo de uma reta definida pelos pontos $(r = R, \theta = 45^\circ, x = 0)$ e $(r = R, \theta = 45^\circ, x = L)$. Como mostrado na Fig. 6, os enrijecedores (representados por um marcador circular no eixo das ordenadas dos gráficos) restringem a deformação da casca. Os modos de vibração de cascas enrijecidas com anéis espaçados uniformemente são similares ao de cascas não-enrijecidas exceto para as cascas parcialmente preenchidas com relações $H/L = 0,50$ e $0,75$. Há apenas deformações locais provocadas pelos enrijecedores para estas cascas. Os modos de vibração de cascas parcialmente preenchidas com fluido com relações $H/L = 0,50$ e $0,75$ são muito diferentes de outros modos de vibração devido ao fluido. O efeito do fluido é muito pequeno para casca parcialmente preenchida com fluido com relação $H/L = 0,25$ mas muito grande para cascas parcialmente preenchidas com fluido com relações $H/L = 0,50$ e $0,75$. O efeito dos anéis enrijecedores é muito grande para as cascas enrijecidas por anéis enrijecedores espaçados desuniformemente, $S = 0,5$. Não há deformação na extremidade livre para o primeiro modo de vibração em função dos enrijecedores localizados próximos do topo da casca. Os modos de vibração de cascas enrijecidas por anéis enrijecedores espaçados desuniformemente, $S = 2,0$,

são similares àqueles de cascas não-enrijecidas. Este comportamento resulta dos enrijecedores posicionados sobretudo próximos da extremidade engastada.

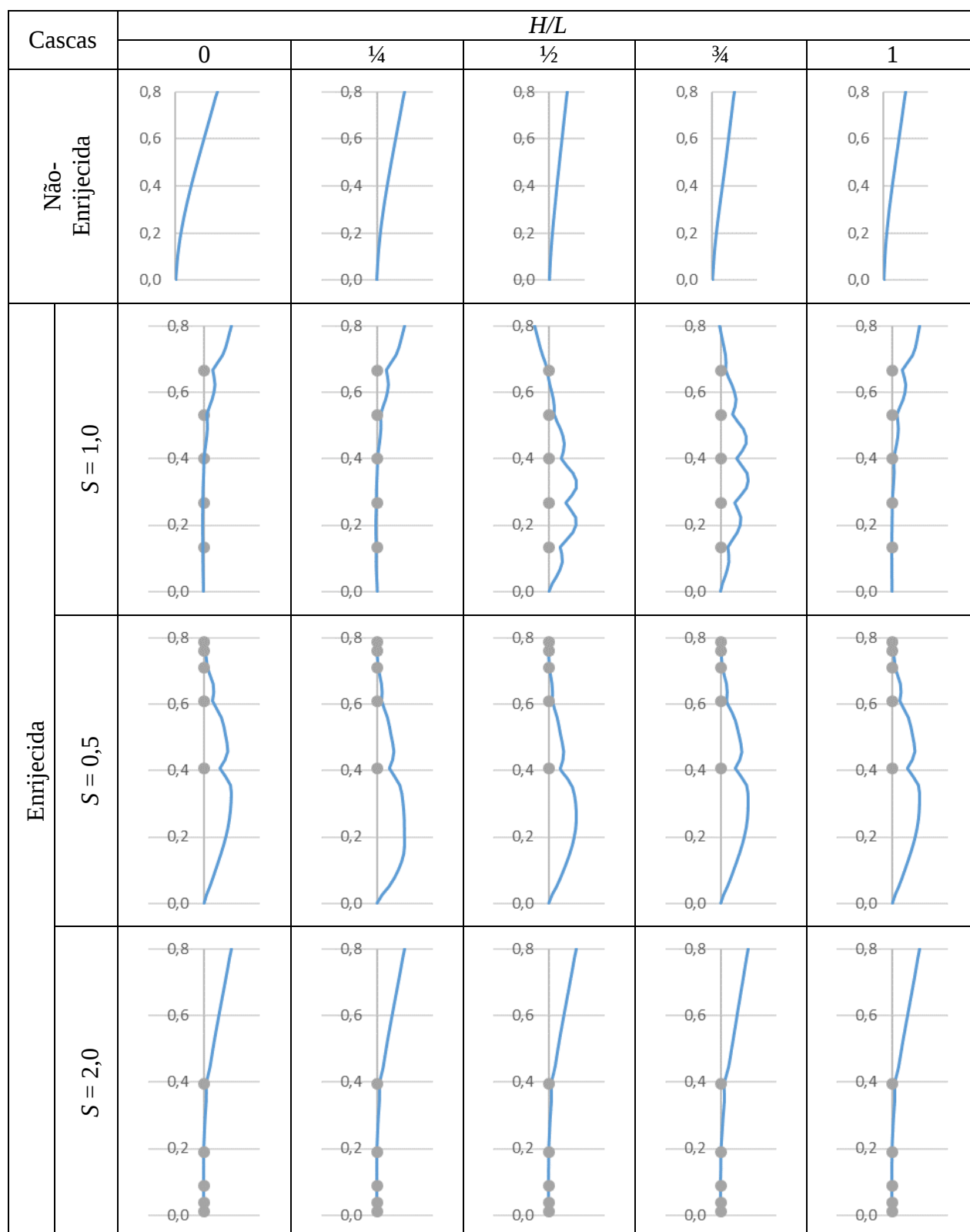


Figura 6 - Efeito da posição dos enrijecedores e nível do fluido no modo de vibração radial para $m = 1$, $n = 5$ de casca cilíndrica enrijecida por cinco anéis com condição de contorno engastada-livre. Obs.: o eixo das ordenadas representa: x (m).

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo analisar vibrações livres de uma casca cilíndrica circular reta engastada (fundo) - livre (topo), não-enrijecida e enrijecida por cinco anéis enrijecedores externamente excêntricos, posicionados de três maneiras distintas: com razão de espaçamento, em PG, entre anéis enrijecedores, S , igual a 1,0 (enrijecedores uniformemente espaçados), 0,5 (enrijecedores localizados próximos do topo da casca) e 2,0 (enrijecedores localizados próximos do fundo da casca) para cinco diferentes níveis de fluido: $H/L = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ e 1, sendo o fluido acústico considerado fechado (fundo) - aberto (superfície livre). Foram abordadas as variações de frequências quanto ao nível de fluido e posição dos anéis enrijecedores. Modos de vibração foram apresentados.

Os estudos foram feitos a partir de resultados obtidos via ANSYS. Para validação destes resultados, procedeu-se a um comparativo analítico-numérico das frequências (1,3), sendo que a discrepância máxima entre os resultados numéricos foi de 6,62% em relação ao correspondente resultado analítico. Reforçando os resultados obtidos, consta-se alto grau de concordância comparativamente aos resultados apresentados em Kim et al. (2004), base do presente trabalho.

Os incrementos máximos das frequências naturais fundamentais de cascas enrijecidas em relação a não-enrijecida são iguais a 138%, para $S = 0,5$, relação $H/L = 1$, 125%, para $S = 1$, relação $H/L = 1$ e 64% para $S = 2,0$, relação $H/L = 0,75$. As médias das reduções das frequências, considerando todos os casos de enrijecimento, para as relações $H/L = 0,25; 0,50; 0,75$ e 1 são aproximadamente iguais a 3%, 18%, 37% e 55% em relação às cascas vazias. Estudos paramétricos como os realizados, fornecem subsídios a projetistas de tanques que podem assim adequar as frequências de acordo com a disposição dos enrijecedores.

Dando prosseguimento a este trabalho, pode-se: analisar o efeito de diferentes condições de contorno da casca cilíndrica e do fluido acústico, fazer estudos paramétricos relacionados à variações de geometria e material ou examinar casos de vibração forçada para os modelos apresentados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelos recursos recebidos nesta pesquisa.

APÊNDICE

As sub-matrizes, $[K_{ij}]$ e $[M_{ij}]$ na Eq. 54 são as seguintes:

$$[K_{11}]_{m\bar{m}} = RA_S \left[\frac{X_{m\bar{m}}^{22} C_n}{\alpha_m \alpha_{\bar{m}}} + \frac{(1-\nu)n^2}{2R^2} \frac{X_{m\bar{m}}^{11} S_n}{\alpha_m \alpha_{\bar{m}}} \right], \quad (12)$$

$$[K_{12}]_{m\bar{m}} = nA_S \left(\frac{\nu X_{\bar{m}m}^{02} C_n}{\alpha_m} - \frac{1-\nu}{2} \frac{X_{\bar{m}m}^{11} S_n}{\alpha_m} \right), \quad (13)$$

$$[K_{13}]_{m\bar{m}} = \nu A_S \frac{X_{\bar{m}m}^{02} C_n}{\alpha_m}, \quad (14)$$

$$[K_{22}]_{m\bar{m}} = \left(A_S R + \frac{D_S}{R} \right) \left(\frac{n^2}{R^2} X_{\bar{m}m}^{00} C_n + \frac{1-\nu}{2} X_{\bar{m}m}^{11} S_n \right) + \sum_{k=1}^{N_r} \left\{ \left(\frac{d_r}{R} + \frac{S_r}{R^2} \right) \left[n^2 A_r \Phi_{\bar{m}m}^{00} C_n + \frac{(1-\nu)D_r}{2} \Phi_{\bar{m}m}^{11} S_n \right] + n^2 D_r \left(\frac{d_r}{R^3} - \frac{S_r}{R^4} \right) \Phi_{\bar{m}m}^{00} C_n \right\}, \quad (15)$$

$$[K_{23}]_{m\bar{m}} = \frac{n}{R} \left\{ \left(A_S + \frac{n^2 D_S}{R^2} \right) X_{\bar{m}m}^{00} C_n + D_S [-\nu X_{\bar{m}m}^{20} C_n + (1-\nu) X_{\bar{m}m}^{11} S_n] \right\} + \sum_{k=1}^{N_r} \left\{ \left[A_r \left(\frac{nd_r}{R} + \frac{n^3 S_r}{R^2} \right) + n^3 D_r \left(\frac{d_r}{R^3} - \frac{S_r}{R^4} \right) \right] \Phi_{\bar{m}m}^{00} C_n + \frac{n(1-\nu)D_r}{2} \left(\frac{2d_r}{R} + \frac{S_r}{R^2} \right) \Phi_{\bar{m}m}^{11} S_n \right\}, \quad (16)$$

$$[K_{33}]_{m\bar{m}} = \left(A_S + \frac{n^4 D_S}{R^2} \right) \frac{X_{\bar{m}m}^{00} C_n}{R} + D_S R X_{\bar{m}m}^{22} C_n - \frac{n^2 \nu D_S}{R} (X_{\bar{m}m}^{02} + X_{\bar{m}m}^{20}) C_n + \frac{2n^2 (1-\nu) D_S}{R} X_{\bar{m}m}^{11} S_n + \sum_{k=1}^{N_r} \left(\left\{ A_r \left[\frac{d_r}{R} - \frac{S_r}{R^2} + n^4 \left(\frac{l_r}{R^3} - \frac{l_r'}{R^4} \right) + 2n^2 \left(\frac{S_r}{R^2} - \frac{l_r}{R^3} \right) \right] + n^4 D_r \left(\frac{d_r}{R^3} - \frac{S_r}{R^4} \right) + \frac{n^2 (1-\nu) D_r}{2} \left(\frac{4d_r}{R} - \frac{3l_r}{R^3} - \frac{l_r'}{R^4} \right) \right\} \Phi_{\bar{m}m}^{00} C_n + \frac{n^2 (1-\nu) D_r}{2} \left(\frac{4d_r}{R} - \frac{3l_r}{R^3} - \frac{l_r'}{R^4} \right) \Phi_{\bar{m}m}^{11} S_n \right), \quad (17)$$

$$[M_{11}]_{m\bar{m}} = \rho h R C_n \frac{X_{\bar{m}m}^{11}}{\alpha_m \alpha_m}, \quad (18)$$

$$[M_{22}]_{m\bar{m}} = \rho h R S_n X_{\bar{m}m}^{00} + \sum_{k=1}^{N_r} \rho b_r \left(R d_r + 3 S_r + \frac{3 l_r}{R} + \frac{l_r'}{R^2} \right) \Phi_{\bar{m}m}^{00} S_n, \quad (19)$$

$$[M_{23}]_{m\bar{m}} = \sum_{k=1}^{N_r} \rho b_r n \left(S_r + \frac{2 l_r}{R} + \frac{l_r'}{R^2} \right) \Phi_{\bar{m}m}^{00} S_n, \quad (20)$$

$$[M_{33}]_{m\bar{m}} = \rho h R X_{\bar{m}m}^{00} C_n + \sum_{k=1}^{N_r} \rho b_r \left[n^2 \left(\frac{l_r}{R} + \frac{l_r'}{R^2} \right) S_n + (d_r R + S_r) C_n \right] \Phi_{\bar{m}m}^{00} \quad (21)$$

onde

$$X_{\bar{m}m}^{pq} = \int_0^L \frac{d^{(p)} \psi_{\bar{m}}}{dx^{(p)}} \frac{d^{(q)} \psi_m}{dx^{(q)}} dx, \quad (22)$$

$$\Phi_{\bar{m}m}^{pq} = \int_x \delta(x - x^*) \frac{d^{(p)} \psi_{\bar{m}}}{dx^{(p)}} \frac{d^{(q)} \psi_m}{dx^{(q)}} dx, \quad (23)$$

$$(S_r \quad I_r \quad I_r') = \int_{h/2}^{d_r+h/2} (z \quad z^2 \quad z^3) dz, \quad (24)$$

$$S_n = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) d\theta. \quad (25)$$

REFERÊNCIAS

- Balendra, T., Ang, K.K., Paramasivam, P., Lee, S.L., 1982. Free vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks. *International Journal of Mechanical Sciences* 24 (1982), pp. 47-59.
- Blevins, R.D., 1995. Formulas for natural frequency and mode shape. 1st, *United States, Krieger Publishing*.
- Gonçalves, P.B., Ramos, N.R.S.S., 1996. Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid. *Journal of Sound and Vibration* 195 (1996), pp. 429-444.
- Gupta, R.K., 1995. Sloshing in shallow cylindrical tanks. *Journal of Sound and Vibration* 180 (1995), pp. 397-415.
- Gupta, R.K., Hutchinson, G.L., 1988. Free vibration analysis of a liquid storage tanks. *Journal of Sound and Vibration* 122 (1988), pp. 491-506.
- Jeong, K.-H., Lee, S.-C., 1998. Hydroelastic vibration of a liquid-filled circular cylindrical shell. *Computers and Structures* 66 (1998), pp. 173-185.
- Kim, Y.W., Lee, Y.S., 2002. Transient analysis of ring-stiffened composite cylindrical shells with both edges clamped. *Journal of Sound and Vibration* 252 (2002), pp. 1-17.

- Kim, Y.-W., Lee, Y.-S., Ko, S.-H., 2004. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. *Journal of Sound and Vibration* 276 (2004), pp. 869-897.
- Kondo, H., 1991. Axisymmetric vibration analysis of a circular tank. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers* 24 (1991), pp. 215-221.
- Lakis, A.A., Sinno, M., 1992. Free vibration of axisymmetric and beam-like cylindrical shells, partially filled with liquid. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), pp. 235-268.
- Lee, Y.S., Kim, Y.W., 1998. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Computers and Structures* 69 (1998), pp. 271-281.
- Lee, Y.S., Kim, Y.W., 1999. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Computers and Structures* 69 (1998), pp. 271-281.
- Mazuch, T., Horacek, J., Trnka, J., Vesely, J., 1996. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank. *Journal of Sound and Vibration* 193 (1996), pp. 669-690.
- Mendes, N.B., 2013. *Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-12A/13. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 318 p.
- Mendes, N.B., Pedroso, L.J., Ribeiro, P.M.V., 2014. Um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas com anéis enrijecedores e contendo fluido. *CILAMCE 2014 - XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* (2014), Fortaleza, CE, Brasil, 13 p.
- Mikami, T., Yoshimura, J., 1992. The collocation method for analysing free vibration of shells revolution with either internal and external fluids. *Computers and Structures* 44 (1992), pp. 343-351.
- Yamaki, N., Tani, J., Yamaji, T., 1984. Free vibration of a clamped-clamped circular cylindrical shell partially filled with fluid. *Journal of Sound and Vibration* 94 (1984), pp. 531-550.
- Yang, B., Zhou, J., 1995. Analysis of ring-stiffened cylindrical shells. In: *Journal of Applied Mechanics* 62 (1995), pp. 1005-1014.