



FORMULAÇÃO DINÂMICA NÃO LINEAR PARA ANÁLISE DE CASCAS LAMINADAS REFORÇADAS COM FIBRAS

Maria S. M. Sampaio

ssampaio@sc.usp.br

Rodrigo R. Paccola

rpaccola@sc.usp.br

Humberto B. Coda

hbcoda@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo

Avenida Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Paulo, São Carlos, Brasil

Abstract. *A non-linear dynamic FEM formulation for the analysis of fiber-reinforced laminated shells is presented. To consider the continuum and fibers individual mechanical properties and naturally assembles the consistent reinforced media for dynamic analysis, a consistent mass matrix is developed for each fiber finite element. The achieved mass matrix is constant and the Newmark time integrator is adopted. Triangular laminated shell finite element with ten nodes and seven degrees of freedom per node are used to discretize matrix and any order one-dimensional finite elements with three degrees of freedom per node are used to discretize fibers. The geometrical nonlinear strategy is total Lagrangian and the Saint-Venant-Kirchhoff Constitutive Law is adopted to model the material. The nonlinear equilibrium equation is achieved from the Principle of Stationary Energy and the Newton-Raphson iterative procedure is used to solve the problem. To validate the proposed formulation, the present results are compared to reference values in which homogenized data was adopted for dynamic properties.*

Keywords: *Nonlinear dynamic analysis, Fiber-reinforced laminated shells, Geometrically nonlinear analysis, Physical nonlinear analysis, Finite Element Method*

1 INTRODUÇÃO

Uma formulação dinâmica não linear para análise de cascas laminadas reforçadas com fibras é descrita e implementada computacionalmente. Apesar da importância do tema e da grande quantidade de estudos desenvolvidos algumas dificuldades relacionadas à simulação numérica ainda podem ser observadas, tais como, a necessidade de integradores temporais específicos para assegurar a conservação da energia quando a descrição cinemática adotada conduz a obtenção de matriz de massa variável (Armero, 2006; Campelo et al., 2011; Simo et al., 1992) e a dificuldade em obter propriedades mecânicas homogeneizadas equivalentes que possibilitem a correta modelagem e simulação do meio heterogêneo original (Braun et al., 1994; Kulikov, Plotnikova, 2007).

Devido à abrangência de aplicações das estruturas laminadas reforçadas com fibras em situação dinâmica muitos trabalhos foram desenvolvidos nos últimos anos e revisões da literatura relativamente abrangentes relacionadas ao tema podem ser encontradas nos trabalhos de Qatu et al., (2010) e Yang et al., (1990). Em muitos casos, estes estudos restringem-se a análise em pequenos deslocamentos e dificultam a identificação das tensões de contato fibra-matriz devido à consideração de propriedades mecânicas homogeneizadas (Yang et al., 2000; Wagner, Balzani, 2008).

Para possibilitar a consideração das propriedades individuais das fibras e da matriz laminada e melhor representar o meio heterogêneo original, os elementos finitos utilizados neste trabalho para discretizar as fibras podem ser inseridos em qualquer posição da matriz ou das lâminas por meio de relações cinemáticas que asseguram a aderência fibra-matriz e não exigem a coincidência de nós na discretização do problema (Sampaio et al., 2015).

Para modelar a matriz, elementos finitos de casca laminada com dez nós e sete graus de liberdade por nó, totalizando setenta graus de liberdade por elemento, são utilizados. Os parâmetros nodais, em posições, são as três translações, as três componentes de um vetor generalizado e a taxa de variação da deformação ao longo da espessura que evita o fenômeno do travamento volumétrico (Coda, Paccola, 2008; Coda et al., 2013). Somente a superfície de referência do elemento é discretizada e a consideração de um número qualquer de lâminas não aumenta o número de graus de liberdade do elemento. Para simular a plastificação da matriz um modelo constitutivo elastoplástico multi-linear não associativo e uma superfície geral de ruína são utilizados (Bota et al., 2008; Rigobello et al., 2013).

A formulação não linear geométrica é Lagrangeana total e a Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona de forma linear o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green-Lagrange é utilizada para modelar tanto o material das fibras quanto o material da matriz. O equilíbrio é encontrado a partir do Princípio da Estacionariedade da Energia e o sistema não linear de equações é resolvido utilizando-se o procedimento iterativo de Newton-Raphson.

A associação da descrição Lagrangeana total a uma cinemática que utiliza vetores generalizados para descrever os parâmetros nodais do elemento finito de casca laminada (Coda, 2009; Coda et al., 2013) resulta em uma matriz de massa consistente constante possibilitando a utilização do integrador temporal de Newmark que conserva a energia em problemas elásticos que desenvolvem grandes deslocamentos (Coda, Paccola, 2009; Coda, Paccola, 2011).

Para apresentar a formulação proposta, o artigo está organizado da seguinte forma: o problema de equilíbrio dinâmico não linear geométrico de corpos laminados reforçados com

fibras é descrito na Seção 2; o elemento finito da casca laminada onde as fibras são incorporadas é descrito na Seção 3; a descrição cinemática, o vetor de forças internas, a matriz Hessiana e a matriz de massa consistente desenvolvidos para cada elemento finito de fibra são apresentados na Seção 4; o acoplamento dinâmico fibra–casca laminada, que não aumenta o número de graus de liberdade e não necessita de coincidência dos nós de fibra com nós de casca na discretização do problema, é apresentado na Seção 5; o método de integração no tempo de Newmark β e o processo iterativo de Newton-Raphson utilizado na resolução do problema de equilíbrio não linear geométrico são descritos na Seção 6; os resultados obtidos com a presente formulação são comparados com valores de referência onde dados homogeneizados foram adotados para representar as propriedades dinâmicas do material (Sampaio et al., 2014) na Seção 7. Finalmente, a conclusão do trabalho é apresentada na Seção 8.

Para descrever os equacionamentos empregam-se as notações indicial e intrínseca e os símbolos $(\odot)$ e $(\bullet)$ são utilizados para distinguir variáveis e grandezas relacionadas aos elementos finitos de casca e fibra, respectivamente.

2 O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DINÂMICO NÃO LINEAR

Seja (W) a energia de deformação interna de um corpo, (K) a energia cinética deste corpo, (Q) a sua energia dissipativa e (P) a energia potencial das forças aplicadas. Então, a função energia potencial (Π) para o problema de equilíbrio dinâmico não linear pode ser escrita como:

$$\Pi = W + K + Q + P. \quad (1)$$

A energia de deformação interna (W) armazenada pelo corpo considerando-se as contribuições da energia de deformação interna armazenada pela matriz laminada $\widehat{W}$ e a energia de deformação interna armazenada pelas fibras $\widetilde{W}$, i.e., $W = \widehat{W} + \widetilde{W}$, é dada por:

$$W = \int_{\widehat{V}_0} \widehat{w}(\widehat{Y}_i^l) d\widehat{V}_0 + \int_{\widetilde{V}_0} \widetilde{w}(\widetilde{Y}_j^p(\widehat{Y}_i^l)) d\widetilde{V}_0, \quad (2)$$

onde $\widehat{w}$ é a energia específica de deformação por unidade de volume inicial de casca laminada e $\widetilde{w}$ é a energia específica de deformação por unidade de volume inicial de fibra; $\widehat{Y}_i^l$ são as posições dos nós dos elementos finitos de casca laminada na configuração atual; $\widetilde{Y}_j^p$ são as posições dos nós dos elementos finitos de fibra na configuração atual; $\widehat{V}_0$ é o volume dos elementos finitos de casca laminada na configuração inicial e $\widetilde{V}_0$ é o volume dos elementos finitos de fibra na configuração inicial.

A energia potencial das forças conservativas aplicadas (P) é dada por:

$$P = -F_k Y_k, \quad (3)$$

onde F_k representa forças aplicadas na direção k e Y_k é a posição atual do ponto de aplicação da força F .

A energia cinética (K) armazenada no corpo incluindo a energia cinética da matriz laminada $\hat{K}$ e a energia cinética das fibras $\tilde{K}$, i.e., $K = \hat{K} + \tilde{K}$, é escrita como:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\hat{V}_0} \hat{\rho}_0 \dot{\hat{y}}_i \dot{\hat{y}}_i d\hat{V}_0 + \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\rho}_0 \dot{\tilde{y}}_j \dot{\tilde{y}}_j d\tilde{V}_0, \quad (4)$$

onde $\dot{\hat{y}}_i$ são as velocidades da matriz laminada, $\dot{\tilde{y}}_j$ são as velocidades das fibras, $\hat{\rho}_0$ é a densidade da matriz laminada e $\tilde{\rho}_0$ é a densidade das fibras.

O termo dissipativo (Q), considerando a contribuição da matriz laminada $\hat{Q}$ e a contribuição das fibras $\tilde{Q}$, i.e., $Q = \hat{Q} + \tilde{Q}$, é escrito em sua forma diferencial como:

$$\frac{\partial}{\partial Y_i} Q(t, x) = \int_{\hat{V}_0} \hat{\lambda}_m \hat{\rho}_0 \dot{\hat{y}}_i d\hat{V}_0 + \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\lambda}_m \tilde{\rho}_0 \dot{\tilde{y}}_i d\tilde{V}_0, \quad (5)$$

onde $\hat{\lambda}_m$ é a constante de amortecimento da matriz laminada e $\tilde{\lambda}_m$ é a constante de amortecimento das fibras.

A aplicação do Princípio da Estacionariedade da Energia na Eq. (1), em relação a uma posição nodal genérica Y_k , i.e.:

$$g_k = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_k} = \frac{\partial W}{\partial Y_k} + \frac{\partial K}{\partial Y_k} + \frac{\partial Q}{\partial Y_k} - \frac{\partial P}{\partial Y_k} = 0, \quad (6)$$

resulta em uma equação de equilíbrio dinâmico não linear em relação a Y_k para qualquer instante de tempo t considerado e uma estratégia de resolução de sistemas de equações não lineares deve ser adotada para que se encontre uma solução para o problema. A obtenção das contribuições das energias de deformação (W), cinética (K) e de amortecimento (Q) para o equilíbrio descrito pela Eq. (6) é apresentada na Seção 3 para o elemento finito de casca laminada e na Seção 4 para os elementos finitos de fibra. O acoplamento das energias fibra-matriz-laminada é apresentado na Seção 5 e as estratégias de integração no tempo e de resolução do sistema de equações são apresentadas na Seção 6.

3 ELEMENTO FINITO DE CASCA LAMINADA

Seja $\hat{d}^{lam}$ a distância da superfície de referência do laminado até o centro de uma lâmina considerada segundo a direção $\hat{g}_i^0$ e seja $\hat{h}_0^{lam}$ a espessura desta lâmina, ambos definidos na configuração inicial (Fig. 1a). A função $\hat{\varphi}_i^{0lam}$ que mapeia os pontos da configuração auxiliar Ω^1 para a configuração inicial Ω^0 e a função $\hat{\varphi}_i^{1lam}$ que mapeia os pontos da configuração auxiliar Ω^1 para a configuração atual Ω (Fig. 1b) podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\hat{\varphi}_i^{0lam} = \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{X}_{li} + \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{N}_{ii}^0, \quad (7)$$

$$\hat{\varphi}_i^{1lam} = \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{Y}_{li} + \left[\left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) + \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{a}_l \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right)^2 \right] \hat{\phi}_k(\xi_1, \xi_2) \hat{G}_{ik}, \quad (8)$$

onde $\hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{X}_{li} = \hat{x}_i^m$ e $\hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{Y}_{li} = \hat{y}_i^m$ são, respectivamente, pontos na superfície de referência da casca nas configurações inicial e atual, e

$$\hat{g}_i^0 = \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{N}_{il}^0, \quad (9)$$

$$\hat{g}_i^1 = \left[\left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) + \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{a}_l \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right)^2 \right] \hat{\phi}_k(\xi_1, \xi_2) \hat{G}_{ik} \quad (10)$$

são vetores generalizados nas configurações inicial e atual, respectivamente.

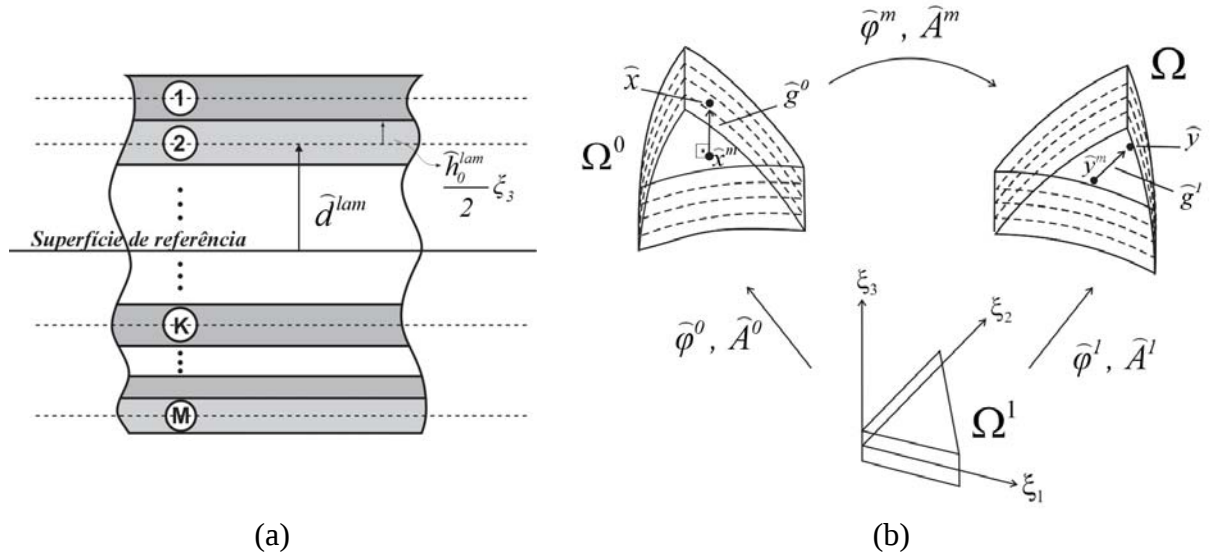


Figura 1. Mapeamento posicional do elemento finito de casca laminada

Nas Eqs. (7)-(10), $\hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2)$ são funções de forma avaliadas nas coordenadas adimensionais ξ_i ; $\hat{X}_{li}$ e $\hat{Y}_{li}$ são as coordenadas dos nós l nas configurações inicial e atual, respectivamente; $\hat{N}_{il}^0$ e $\hat{G}_{ik}$ são valores nodais dos vetores generalizados nas configurações inicial e atual, respectivamente; e $\hat{a}_l$ são valores nodais da taxa de variação linear da espessura.

As funções $\hat{\phi}_i^{0lam}$ e $\hat{\phi}_i^{1lam}$ são utilizadas para encontrar seus respectivos gradientes $\hat{A}_{ij}^{0lam}$ e $\hat{A}_{ij}^{1lam}$ e a composição destes dois valores para cada ponto de integração fornece o valor numérico do gradiente da função mudança de configuração $\hat{A}^{lam}$ da configuração inicial Ω^0 para a configuração atual Ω , ou seja:

$$\hat{A}_{ij}^{0lam} = \frac{\partial \hat{\phi}_i^{0lam}}{\partial \xi_j}, \hat{A}_{ij}^{1lam} = \frac{\partial \hat{\phi}_i^{1lam}}{\partial \xi_j}, \hat{A}^{lam} = \hat{A}^{1lam} \cdot (\hat{A}^{0lam})^{-1}. \quad (11)$$

Para descrever a energia de deformação específica $\hat{w}$ para o elemento finito de casca laminada adota-se a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona de forma linear

o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie $\hat{S}_{ij}$ e o tensor das deformações de Green-Lagrange $\hat{E}_{ij}$ dados, respectivamente, por:

$$\hat{w} = \frac{1}{2} \hat{E}_{ij} \hat{C}_{ijkl} \hat{E}_{kl} ; \hat{S}_{ij} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{E}_{ij}} = \hat{C}_{ijkl} \hat{E}_{kl} ; \hat{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{C}_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (\hat{A}_{ki} \hat{A}_{kj} - \delta_{ij}), \quad (12)$$

onde $\hat{C}_{ijkl}$, $\hat{C}_{ij}$, $\hat{A}_{ki}$ e δ_{ij} são, respectivamente, o tensor constitutivo elástico linear de quarta ordem, o tensor dos estiramentos à direita de Cauchy-Green, o gradiente de deformação e o tensor Identidade. A primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais do elemento finito de cascas necessárias para a resolução do problema podem ser encontradas em Sampaio et al., (2014) e a dedução das parcelas dinâmicas para o equilíbrio do problema podem ser encontradas em Coda (2015).

4 ELEMENTO FINITO DE FIBRA DE ORDEM QUALQUER

As fibras são discretizadas com elementos finitos unidimensionais curvos de ordem qualquer com 3 graus de liberdade por nó. Estes elementos são desenvolvidos para considerar a não linearidade geométrica usando a Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff dada na Eq. (13) e o mapeamento cinemático mostrado na Fig. 2:

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \tilde{E} \tilde{E}^2. \quad (13)$$

Na Eq. (13), $\tilde{E}$ é o módulo de elasticidade tangente e $\tilde{E}$ é a medida de deformação de Green unidimensional.

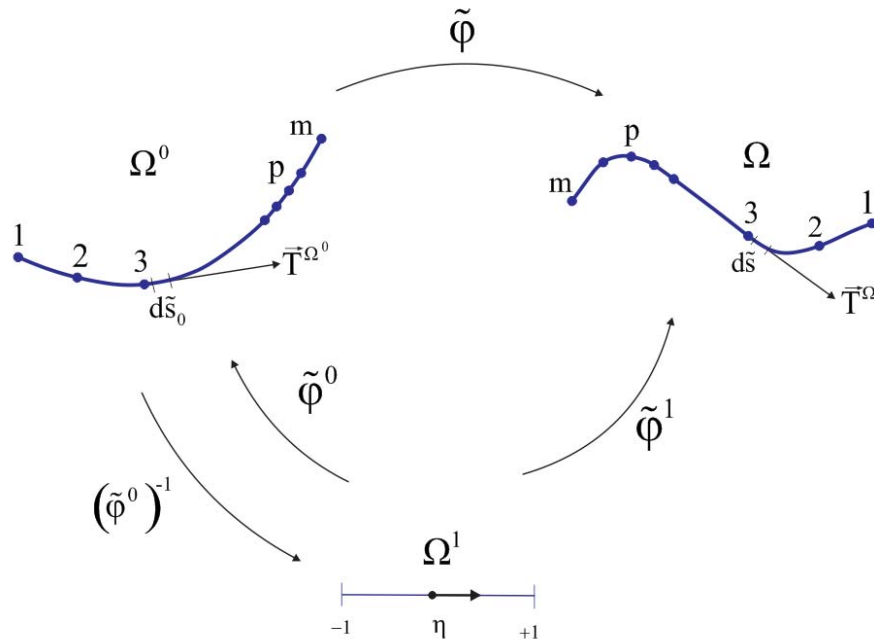


Figura 2. Mapeamento posicional do elemento finito de fibra

Da Fig. 2, os pontos $\tilde{x}_i$ na configuração inicial Ω^0 e os pontos $\tilde{y}_i$ na configuração atual Ω podem ser mapeados a partir da configuração auxiliar Ω^1 com coordenadas

adimensionais η usando funções de forma de ordem qualquer, $\tilde{\phi}_p(\eta)$, e as coordenadas dos nós p na configuração inicial $\tilde{X}_i^p$ e na configuração atual $\tilde{Y}_i^p$, respectivamente, como:

$$\tilde{x}_i = \tilde{\varphi}_i^0 = \tilde{\phi}_p(\eta) \tilde{X}_i^p \quad e \quad \tilde{y}_i = \tilde{\varphi}_i^1 = \tilde{\phi}_p(\eta) \tilde{Y}_i^p, \quad (14)$$

onde $p = 1, \dots, N$ são os nós do elemento finito de fibra e $i = 1, 2, 3$ são os graus de liberdade associados a estes nós.

A medida de deformação de Green $\tilde{E}$ na Eq. (13) é definida como:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{|\tilde{T}^{\Omega}|^2 - |\tilde{T}^{\Omega^0}|^2}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \right), \quad (15)$$

onde $|\tilde{T}^{\Omega^0}|$ e $|\tilde{T}^{\Omega}|$ são os módulos dos vetores tangente nas configurações inicial e atual dados, respectivamente, por:

$$|\tilde{T}^{B_0}|^2 = \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_1^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_2^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_3^p \right)^2, \quad (16)$$

$$|\tilde{T}^B|^2 = \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_1^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_2^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_3^p \right)^2. \quad (17)$$

Para realizar a análise de equilíbrio é necessário conhecer a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em função das posições dos nós de fibra, ou seja:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{Y}_k^j} d\tilde{V}_0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} d\tilde{V}_0. \quad (18)$$

Substituindo as Eqs. (13)-(17) nas Eqs. (18) e desenvolvendo as operações necessárias obtém-se o vetor de forças internas e a matriz Hessiana do elemento finito de fibra curva de ordem qualquer, expressos, respectivamente, por:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_0^1 \tilde{\mathcal{B}} \tilde{E} \frac{\left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_k^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta}}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \tilde{A} d\tilde{s}_0 = \int_{-1}^1 \tilde{\mathcal{B}} \tilde{E} \frac{\left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_k^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta}}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \tilde{J}_0(\eta) \tilde{A} d\eta \quad (19)$$

e

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} = \int_{-1}^1 \left(\frac{\tilde{\mathcal{B}}}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^4} \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_\alpha^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_\beta(\eta)}{d\eta} \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_k^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} + \frac{\tilde{\mathcal{B}} \tilde{E}}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \frac{d\tilde{\phi}_\beta(\eta)}{d\eta} \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} \delta_{ka} \right) \tilde{J}_0(\eta) \tilde{A} d\eta, \quad (20)$$

onde $\tilde{J}_0(\eta) = |\tilde{T}^{\Omega^0}| = \sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}_1}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}_2}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}_3}{d\eta} \right)^2}$ é o Jacobiano de $\tilde{x}_i$. As Eqs. (19) e (20) são resolvidas numericamente empregando-se quadratura de Gauss-Legendre.

A contribuição das fibras para o equilíbrio dinâmico do problema reforçado descrito pela Eq. (6) é obtida resolvendo-se a primeira derivada da energia cinética das fibras e a matriz de

massa consistente é obtida resolvendo-se a segunda derivada da energia cinética das fibras, respectivamente, pelas expressões:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{Y}_k} = \tilde{M} \ddot{\tilde{Y}}_k \quad e \quad \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{Y}_s \partial \tilde{Y}_k} = \tilde{M} , \quad (21)$$

onde $\ddot{\tilde{Y}}_k$ são as acelerações nos nós das fibras e $\tilde{M}$ é a matriz de massa consistente para o elemento finito de fibra.

De outro modo, a primeira e a segunda derivada da energia cinética das fibras dada na Eq. (4) podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\rho}_0 \dot{\tilde{y}}_i \frac{\partial \dot{\tilde{y}}_i}{\partial \tilde{Y}_k^j} d\tilde{V}_0 , \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\rho}_0 \left(\frac{\partial \dot{\tilde{y}}_i}{\partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} \frac{\partial \dot{\tilde{y}}_i}{\partial \tilde{Y}_k^j} + \dot{\tilde{y}}_i \frac{\partial^2 \dot{\tilde{y}}_i}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} \right) d\tilde{V}_0 , \quad (23)$$

onde $\dot{\tilde{y}}_i$ é aproximado pela expressão:

$$\dot{\tilde{y}}_i = \tilde{\phi}_p(\eta) \dot{\tilde{Y}}_i^p . \quad (24)$$

Como as velocidades dos nós das fibras são funções do tempo t e das posições $\tilde{Y}_i^p$ dos nós das fibras, depois de realizar as operações necessárias na Eq. (22), a primeira derivada da energia cinética das fibras a ser somada na parcela inercial da equação de equilíbrio dinâmico não linear pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\rho}_0 \phi_j(\eta) \phi_p(\eta) d\tilde{V}_0 \dot{\tilde{Y}}_k^p . \quad (25)$$

Resolvendo-se a Eq. (23) obtém-se a matriz de massa consistente para os elementos finitos de fibra cujos termos são expressos por:

$$\begin{aligned} M_{k\alpha}^{j\beta} &= \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} = \tilde{\rho}_0 \int_{\tilde{V}_0} \phi_j(\eta) \phi_\beta(\eta) \delta_{k\alpha} d\tilde{V}_0 = \int_0^{\tilde{L}_0} \tilde{\rho}_0 \phi_j(\eta) \phi_\beta(\eta) \delta_{k\alpha} \tilde{A}_0 d\tilde{s}_0 \\ &= \tilde{\rho}_0 \tilde{A}_0 \int_{-1}^1 \phi_j(\eta) \phi_\beta(\eta) \delta_{k\alpha} \tilde{J}_0(\eta) d\eta . \end{aligned} \quad (26)$$

A primeira e a segunda derivada da energia dissipativa das fibras são obtidas, respectivamente, a partir das expressões:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\lambda}_m \tilde{\rho}_0 \dot{\tilde{y}}_i d\tilde{V}_0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{\lambda}_m \tilde{\rho}_0 \frac{\partial \dot{\tilde{y}}_i}{\partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} d\tilde{V}_0 . \quad (27)$$

5 ACOPLAMENTO DINÂMICO FIBRA-CASCA LAMINADA

As fibras são incorporadas em qualquer posição do domínio sem aumentar o número de graus de liberdade do sistema de equações não lineares e sem a necessidade de coincidência dos nós das fibras com os nós da matriz na discretização do problema escrevendo-se as

posições dos nós das fibras em função das posições dos nós do elemento finito de casca laminada pela expressão:

$$\tilde{Y}_i^p = \hat{\phi}_l(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{Y}_i^l + \left[\left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3^p \right) + \hat{\phi}_l(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{Y}_4^l \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3^p \right)^2 \right] \hat{\phi}_k(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{Y}_{(i+4)}^k, \quad (28)$$

onde os símbolos $(\odot)$ e $(\bullet)$ são utilizados para distinguir variáveis e grandezas relacionadas aos elementos finitos de casca laminada e fibra, respectivamente, e p indica o nó do elemento finito de fibra pertencente a um elemento finito de casca laminada considerado.

Uma vez conhecida a posição de equilíbrio da casca laminada para um dado instante de tempo t , as posições das fibras são atualizadas empregando-se a Eq. (28). A partir das posições atualizadas dos nós das fibras é possível calcular as velocidades, as acelerações e as contribuições dinâmicas do passado, $\tilde{Q}_s$ e $\tilde{R}_s$, das fibras, respectivamente, pelas expressões:

$$\dot{\tilde{Y}}_{s+1} = \dot{\tilde{Y}}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\tilde{Y}}_s + \gamma\Delta t\ddot{\tilde{Y}}_{s+1}, \quad (29)$$

$$\ddot{\tilde{Y}}_{s+1} = \frac{\tilde{Y}_{s+1} - \tilde{Y}_s}{\beta\Delta t^2} - \tilde{Q}_s, \quad (30)$$

$$\tilde{Q}_s = \frac{\tilde{Y}_s}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\tilde{Y}}_s}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} + 1 \right) \ddot{\tilde{Y}}_s, \quad (31)$$

$$\tilde{R}_s = \dot{\tilde{Y}}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\tilde{Y}}_s. \quad (32)$$

As Eqs. (31) e (32) são utilizadas para calcular as contribuições dinâmicas das fibras para o equilíbrio dinâmico do problema reforçado, i.e., massa e amortecimento.

Para acoplar as fibras à matriz laminada é necessário calcular a primeira e a segunda derivada da energia de deformação, energia cinética e energia dissipativa das fibras em relação aos parâmetros nodais dos elementos finitos de casca laminada empregando-se a regra da cadeia. Essas derivadas resultam em uma matriz de transformação análoga a apresentada por Sampaio et al., (2015) e não é repetida aqui.

Finalmente, para simular a plastificação da matriz um modelo constitutivo elastoplástico multi-linear não associativo e uma superfície geral de ruína são utilizados. Este modelo segue os trabalhos de Botta et al., (2008), Rigobello et al., (2013) e Coda et al., (2015) e não é aqui repetido.

6 NEWMARK BETA E MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

A Eq. (6) reescrita conveniente como:

$$g = \frac{\partial W}{\partial Y} - F + M\ddot{Y} + C\dot{Y} = 0 \quad (33)$$

descreve o problema de equilíbrio dinâmico a ser resolvido para qualquer instante de tempo t . Para tanto, supõe-se $t_0, t_1, \dots, t_s, t_{s+1} = t_s + \Delta t$ instantes de tempo ao longo do intervalo onde a

resposta dinâmica da estrutura está sendo observada e, admite-se que em $t = t_s$ todos os valores são conhecidos. Então, a solução deve ser encontrada em t_{s+1} e a Eq. (33) pode ser reescrita como:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial Y} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial W}{\partial Y} \right|_{s+1} - F_{s+1} + M\ddot{Y}_{s+1} + C\dot{Y}_{s+1} = 0. \quad (34)$$

Substituindo-se as aproximações do método de Newmark β para as posições e velocidades dadas, respectivamente, por:

$$Y_{s+1} = Y_s + \Delta t \dot{Y}_s + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{Y}_s + \beta \ddot{Y}_{s+1} \right], \quad (35)$$

$$\dot{Y}_{s+1} = \dot{Y}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{Y}_s + \gamma\Delta t\ddot{Y}_{s+1}, \quad (36)$$

na Eq. (34) tem-se que:

$$g(Y_{s+1}) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial Y} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial W}{\partial Y} \right|_{s+1} - F_{s+1} + \frac{M}{\beta\Delta t^2} Y_{s+1} - MQ_s + CR_s + \frac{\gamma C}{\beta\Delta t} Y_{s+1} - \gamma\Delta t CQ_s = 0, \quad (37)$$

onde os vetores Q_s e R_s representam contribuições dinâmicas do passado, e são dados, respectivamente, por:

$$Q_s = \frac{Y_s}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{Y}_s}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} + 1 \right) \ddot{Y}_s, \quad (38)$$

$$R_s = \dot{Y}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{Y}_s. \quad (39)$$

A Eq. (37) escrita simplificadamente como $g(Y_{s+1}) = 0$ é não linear em relação a (Y_{s+1}) : Para resolvê-la é necessário expandi-la em Série de Taylor em torno de (Y^0) , de acordo com a expressão:

$$g(Y) = g(Y^0) + \nabla g(Y^0)\Delta Y + O^2 = 0. \quad (40)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior O^2 na Eq. (40) obtém-se:

$$\Delta Y = -(\nabla g(Y^0))^{-1} g(Y^0), \quad (41)$$

sendo Y^0 uma posição tentativa, usualmente Y_s , para Y_{s+1} usado na Eq. (37) para calcular $g(Y^0)$. Das Eqs. (41) e (37) resulta para cargas conservativas que:

$$\nabla g(Y_{s+1}) = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right|_{s+1} + \frac{M}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta\Delta t}, \quad (42)$$

onde C é considerado proporcional a M .

A Eq. (41) descreve o método de Newton-Raphson para resolver sistemas de equações não lineares. Primeiramente escolhe-se uma posição tentativa Y^0 e calcula-se o vetor $g(Y)$ de acordo com a Eq. (37). Com a Eq. (41) encontra-se uma posição correção ΔY que ao ser aplicada sobre a solução tentativa Y^0 resulta em um novo vetor posição dado por

$Y_{S+1} = Y^0 + \Delta Y$. Com este novo vetor posição, repete-se o procedimento até que ΔY ou $g(Y)$ sejam suficientemente pequenos ou menores que um valor tolerância assumido, ou seja:

$$\|g(Y)\| \leq TOL \quad \text{ou} \quad \|\Delta Y\| \leq TOL. \quad (43)$$

A aceleração é corrigida em cada iteração empregando-se a expressão obtida a partir Eq. (35) dada por:

$$\ddot{Y}_{S+1} = \frac{Y_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - Q_S, \quad (44)$$

que por sua vez é utilizada na Eq. (36) para corrigir a velocidade.

7 EXEMPLO NUMÉRICO

Neste exemplo, as soluções obtidas para o anel laminado submetido à carga uniformemente distribuída q mostrado na Fig. 3a, considerando a matriz de massa consistente deduzida para as fibras, são comparados com as soluções obtidas por Sampaio et al., (2014) considerando as propriedades dinâmica homogeneizadas do material. A seção transversal do anel é constituída por 5 lâminas, sendo 3 de alumínio e 2 de material compósito carbono-epóxi conforme representado na Fig. 3b. Para as simulações realizadas com a presente formulação, as lâminas de alumínio e de epóxi são consideradas isotrópicas e as fibras de carbono são dispostas nas lâminas de epóxi em duas direções: $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$, conforme mostrado nas Figs. 3c e 3d, respectivamente. O eixo z é a origem para o ângulo α .

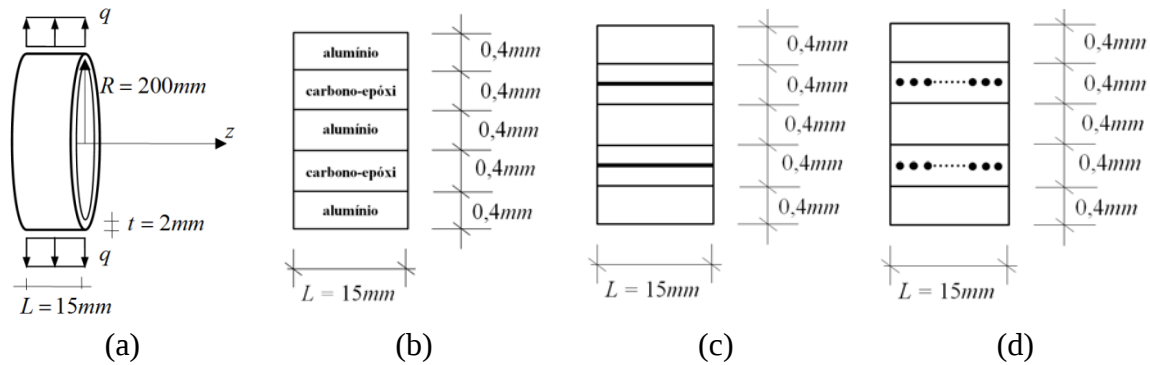


Figura 3. Anel laminado e seção transversal

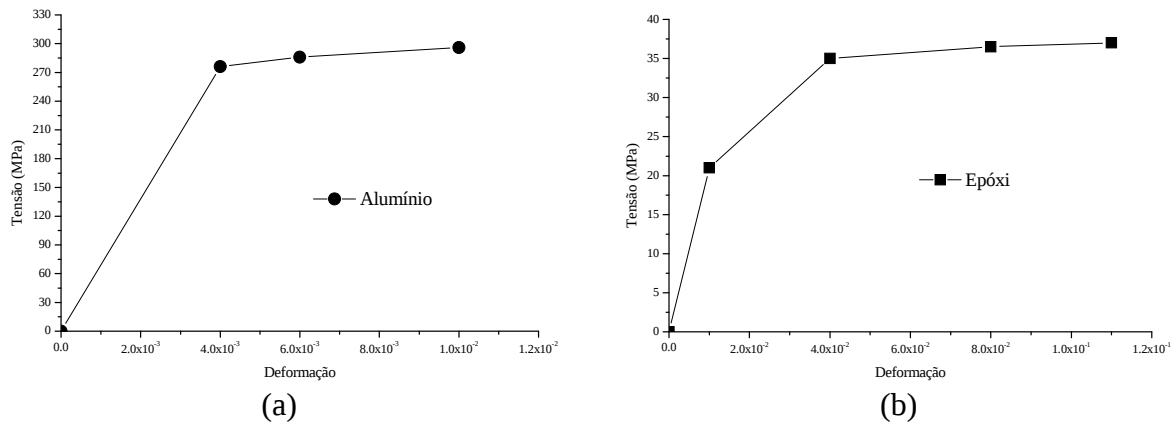


Figura 4. Curvas tensão x deformação: a) Alumínio e b) Epóxi

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adotados para as lâminas de alumínio e de epóxi são dados, respectivamente, por $E_a = 69\text{GPa}$, $\nu_a = 0,33$, $E_e = 2,1\text{GPa}$ e $\nu_e = 0,25$. O módulo de elasticidade das fibras de carbono e o diâmetro da seção transversal são dados, respectivamente, por $E_c = 200\text{GPa}$ e $\phi_c = 0,1\text{mm}$. As densidades adotadas para o alumínio, epóxi e fibras de carbono são dadas, respectivamente, por $\rho_a = 2,79\text{g/cm}^3$, $\rho_e = 1,21\text{g/cm}^3$ e $\rho_c = 1,71\text{g/cm}^3$. Considera-se para a integração no tempo com o método de Newmark $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,5$. O amortecimento das fibras de carbono e das lâminas de alumínio e de epóxi é considerado nulo, ou seja, $\lambda_a = 0$, $\lambda_e = 0$ e $\lambda_c = 0$.

A superfície de referência do anel foi discretizada em 80 elementos finitos cúbicos triangulares totalizando 480 nós e 3360 graus de liberdade. Para as fibras de carbono dispostas segundo o ângulo $\alpha = 0^\circ$ nas lâminas de epóxi, foram utilizadas 15042 fibras cúbicas nas lâminas 2 e 4 para representar o problema de referência homogeneizado. Para as fibras de carbono dispostas segundo o ângulo $\alpha = 90^\circ$ nas lâminas de epóxi, foram adotadas 180 fibras para representar o problema de referência homogeneizado, sendo 90 fibras em cada lâmina discretizadas em 40 elementos finitos cúbicos cada. Dois valores para a carga uniformemente distribuída q foram considerados: $q = 2\text{N/mm}$ e $q = 5,33\text{N/mm}$ aplicadas em 230 passos de tempo de tamanho $\Delta t = 0,9\text{s}$.

Os procedimentos realizados para obter as propriedades do problema homogeneizado foram apresentados por Sampaio et al., (2014) e os resultados obtidos nas simulações realizadas pelos autores são aqui utilizados como valores de referência para validar a matriz de massa consistente deduzida para as fibras.

Duas análises foram realizadas para cada um dos arranjos de fibras considerado, ou seja, para $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ e para cada uma das cargas uniformemente distribuída consideradas, ou seja, para $q = 2\text{N/mm}$ e $q = 5,33\text{N/mm}$, a saber: (a) análise dinâmica considerando a matriz laminada elástica e (b) análise dinâmica considerando a matriz laminada plástica. Para o caso (b) as curvas tensão-deformação adotadas para o alumínio e para o epóxi são mostradas nas Figs. 4a e 4b, respectivamente. Adotam-se as mesmas curvas para as direções X, Y e Z. Em ambas as análises as fibras de carbono são considerados elásticas.

A Fig. 5 compara a trajetória de equilíbrio do ponto central de aplicação da carga $q = 2\text{N/mm}$ para $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ com aquelas obtidas considerando o material carbono-epóxi homogeneizado e matriz laminada elástica. Na Fig. 6 as comparações são feitas considerando-se a matriz laminada plástica. Analisando as Figs. 5 e 6 é possível observar que que a amplitude do movimento diminui com o tempo no caso plástico (Fig. 6), pois o anel atinge o máximo deslocamento, plastifica e vibra em torno da posição de equilíbrio deformada, ou seja, não há retorno à posição inicial devido à presença de deformações plásticas permanentes.

Analogamente, a Fig. 7 compara a trajetória de equilíbrio do ponto central de aplicação da carga $q = 5,33\text{N/mm}$ para $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ com aquelas obtidas considerando o material carbono-epóxi homogeneizado e matriz laminada elástica. Na Fig. 8 as comparações são feitas considerando-se a matriz laminada plástica. Neste caso, o anel elástico comportou-se de forma inesperada e apresentou valor máximo de deslocamento inferior àqueles obtidos para o caso plástico. Além disto, devido a problemas de integração no tempo a análise para o caso elástico foi realizada em 2300 passos de tempo de tamanho $\Delta t = 0,09\text{s}$. Destaca-se que não

foi feito qualquer tratamento numérico para filtrar as frequências maiores que a natural presentes nas curvas da Fig. 7.

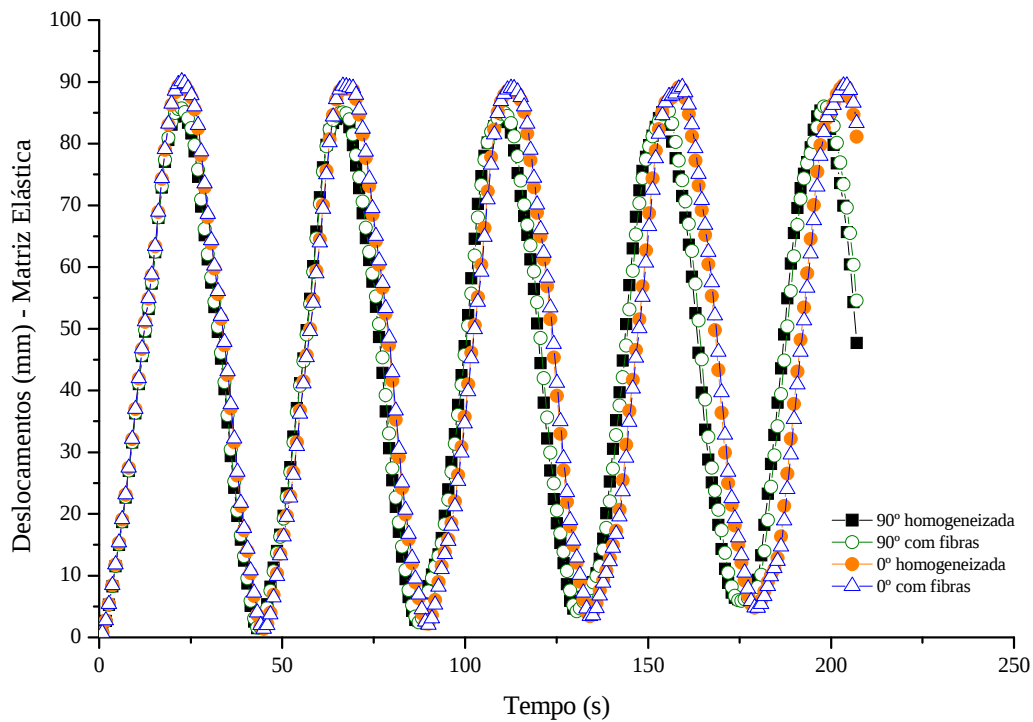


Figura 5. Trajetória de equilíbrio dinâmico para o ponto central de aplicação da carga $q = 2 \text{ N/mm}$ e matriz elástica

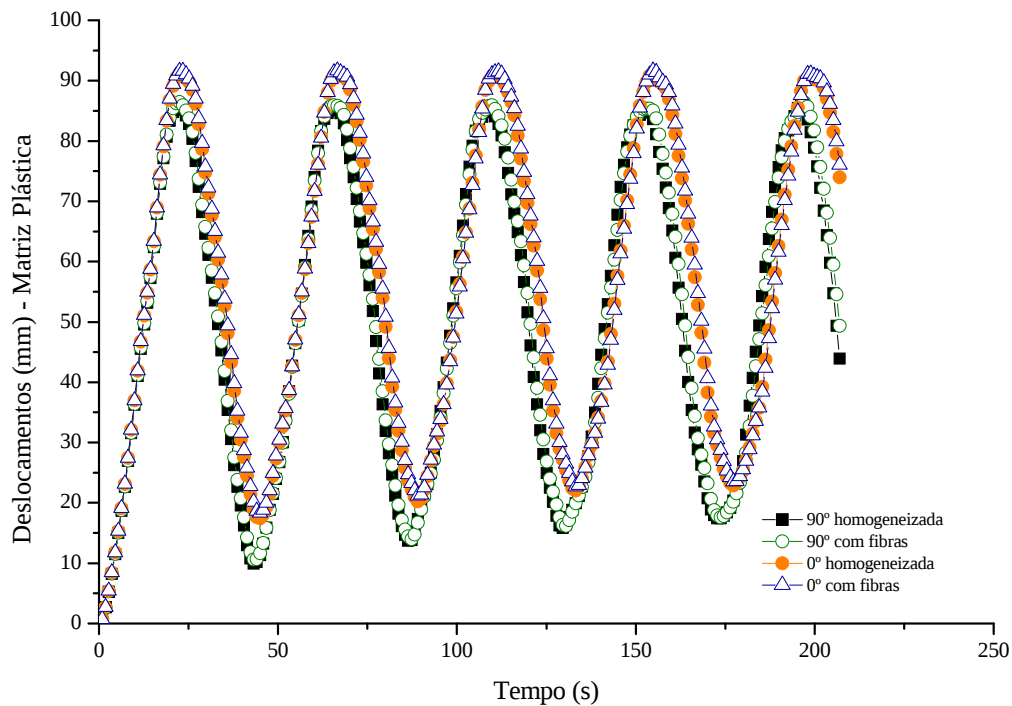


Figura 6. Trajetória de equilíbrio dinâmico para o ponto central de aplicação da carga $q = 2 \text{ N/mm}$ e matriz plástica

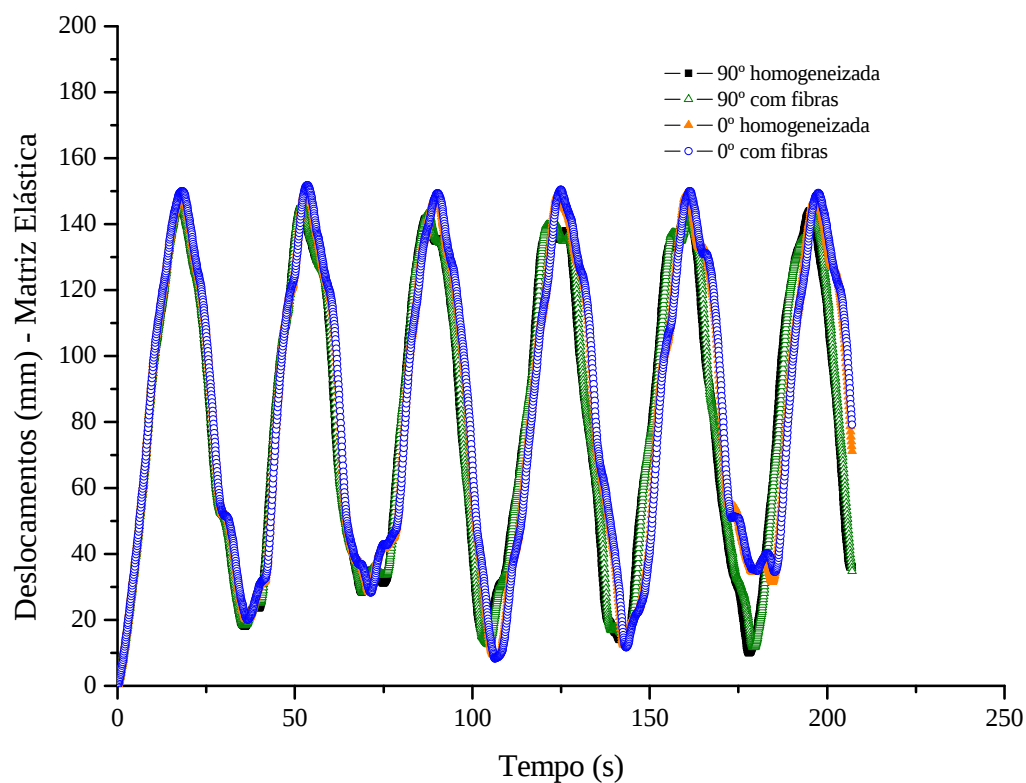


Figura 7. Trajetória de equilíbrio dinâmico para o ponto central de aplicação da carga $q = 5,33 \text{ N/mm}$ e matriz elástica

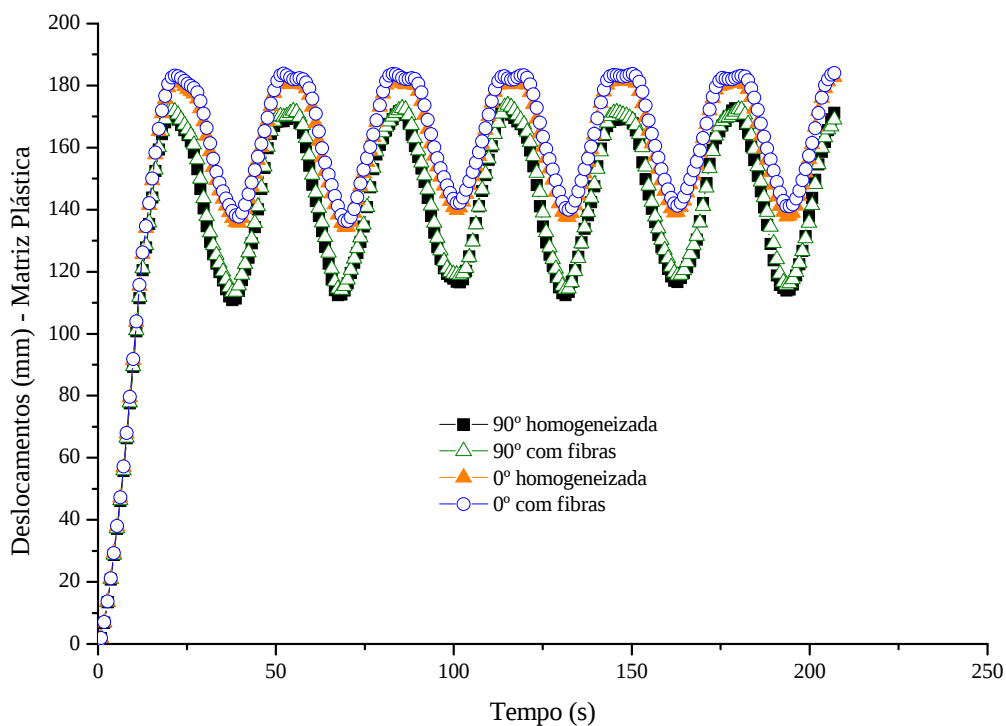


Figura 8. Trajetória de equilíbrio dinâmico para o ponto central de aplicação da carga $q = 5,33 \text{ N/mm}$ e matriz plástica

SOLUÇÃO HOMOGENEIZADA				SOLUÇÃO COM FIBRAS			
		0°	90°	0°	90°		
2N/mm	ELÁSTICO					ELÁSTICO	2N/mm
	PLÁSTICO					PLÁSTICO	
5,33N/mm	ELÁSTICO					ELÁSTICO	5,33N/mm
	PLÁSTICO					PLÁSTICO	

Figura 9. Configuração final do anel laminada no passo de tempo 60

SOLUÇÃO HOMOGENEIZADA			SOLUÇÃO COM FIBRAS		Legenda
	0°	90°	0°	90°	
2N/mm					
5,33N/mm					

Figura 10. Vista qualitativa da deformação plástica acumulada no passo de tempo 60 para o intervalo de deformação variando de 0 a 0.1

A Fig. 9 mostra a configuração final do anel para o passo de tempo 60 para todas as análises realizadas. A diferença de cor observada na superfície de referência do anel na Fig. 9 ocorre devido à discretização das fibras com a presente formulação.

A partir dos resultados obtidos é possível observar o bom comportamento da formulação proposta, ou seja, a formulação introduzida neste trabalho para considerar uma matriz de massa consistente para cada elemento finito fibra apresenta boa concordância com os resultados obtidos com a formulação homogeneizada que apresenta como dificuldade, por exemplo, a determinação das tensões de contato caso se deseje realizar a análise de falha do material.

Finalmente, a Fig. 10 mostra uma vista qualitativa da degradação do material, em termos de deformação plástica acumulada no passo de tempo 60 para os casos em que se considera a possibilidade de plastificação da matriz laminada. Os valores visualizados foram selecionados para um intervalo de deformação plástica acumulada variando de 0 a 0.1, de forma a demonstrar a convergência dos valores obtidos com a formulação apresentada neste trabalho em que se discretizam as fibras quando comparados com aqueles obtidos para o caso homogeneizado.

8 CONCLUSÃO

Uma formulação dinâmica não linear em elementos finitos para a análise em grandes deslocamentos de cascas laminadas reforçadas com fibras foi proposta e implementada computacionalmente neste trabalho. O elemento finito de casca laminada possui dez nós e sete graus de liberdade por nó totalizando setenta graus de liberdade por elemento em posições. As fibras são discretizadas com elementos finitos unidimensionais curvos de ordem qualquer com 3 graus de liberdade por nó. A consideração de um número qualquer de lâminas não aumenta o número de graus de liberdade do elemento e a inclusão das fibras em qualquer lâmina do laminado não aumenta o número de graus de liberdade do problema e não exige a coincidência dos nós das fibras com os nós da matriz na discretização do problema. O modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é utilizado para modelar tanto o material das fibras quanto o da matriz. Para considerar as propriedades mecânicas individuais da matriz laminada e das fibras e naturalmente representar as propriedades dinâmicas do meio heterogêneo original, uma matriz de massa consistente foi deduzida para cada elemento finito fibra. A matriz de massa das fibras e a matriz de massa do elemento finito de casca laminada são constantes e método de Newmark β é utilizado como integrador temporal. Um modelo constitutivo elastoplástico multi-linear não associativo e uma superfície geral de ruína são utilizados para simular a plastificação da matriz laminada e as fibras são consideradas elásticas. Os exemplos numéricos foram comparados com resultados de referência onde dados homogeneizados foram adotados para representar as propriedades dinâmicas do material, demonstrando o bom comportamento e as potencialidades da formulação proposta.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro concedido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Armero, F., 2006. Energy-dissipative momentum-conserving time-stepping algorithms for finite strain multiplicative plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 4862-4889.
- Botta, A.S., Paccola, R.R., Venturini, W.S., & Coda, H.B., 2008. A discussion on volume change in the plastic phase. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 24(11), pp. 1149-1162.
- Braun, M., Bischoff, M., & Ramm, E., 1994. Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates. *Comput. Mech.*, Vol. 15, pp. 1-18.
- Campelo, E.M.B., Pimenta, P.M., & Wriggers, P., 2011. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity. Part 2: shells. *Computational Mechanics*, vol. 48, pp. 195-211.
- Coda, H. B.; Paccola, R. R., 2008. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 5, pp. 205-223.
- Coda, H.B., 2009. A solid-like FEM for geometrical non-linear 3D frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 47-48.
- Coda, H.B., 2015. Continuous inter-laminar stresses for regular and inverse geometrically non linear dynamic and static analyses of laminated plates and shells. *Composite Structures*, vol. 132, pp. 406-422.
- Coda, H.B., & Paccola, R.R., 2009. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. *Mathematical Problems in Engineering*, 575131, doi:10.1155/2009/575131.
- Coda, H.B., & Paccola, R.R., 2011. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 47, pp. 319-333.
- Coda, H.B., Paccola, R.R., & Sampaio, M.S.M., 2013. Positional description applied to the solution of geometrical non-linear plates and shells. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 67, pp. 66-75.
- Coda, H.B., Sampaio, M.S.M., & Paccola, R.R., 2015. A FEM continuous transverse stress distribution for the analysis of geometrically nonlinear elastoplastic laminated plates and shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 101, pp. 15-33.
- Kulikov, G.M., & Plotnikova, S.V., 2007. Non-linear geometrically exact assumed stress-strain four-node solid-shell element with high coarse-mesh accuracy. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 43, pp. 425-443.
- Qatu, M., Sullivan, R., & Wang, W., 2010. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009. *Composite Structures*, vol. 9, pp. 14-31.
- Rigobello, R., Coda, H.B., & Munaiar Neto, J., 2013. Inelastic analysis of steel frames with a solid-like finite element. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 86, pp. 140-152.
- Sampaio, M.S.M., Coda, H.B., & Paccola, R.R., 2014. Geometrical and Physical Nonlinear Dynamic Analysis of Reinforced Plates and Shells. in *Proceedings of the Twelfth International Conference on Computational Structures Technology*, B.H.V. Topping and P.

Iványi, (Editors), Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland, paper 143, doi:10.4203/ccp.106.143.

Sampaio, M.S.M., Paccola, R.R., & Coda, H.B., 2015. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. *Composite Structures*, vol. 119, pp. 12-25.

Simo, J.C., Rifai, M.S., & Fox, D.D., 1992. On a stress resultant geometrically exact shell-model. Part VI: Conserving Algorithms for nonlinear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 34, pp. 117-164.

Wagner, W., & Balzani, C., 2008. Simulation of delamination in stringer stiffened fiber-reinforced composite shells. *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 930-939.

Yang, H., Saigal, S. & Liaw, D., 1990. Advances of thin shell finite elements and some applications - version I. *Computers & Structures*, vol. 35, pp. 481-504.

Yang, H.T.Y., Saigal, S., Masud, A., & Kapania, R.K., 2000. A survey of recent shell finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 47, pp. 101-127.