



FORMULAÇÃO DE ELEMENTO FINITO POSICIONAL PARA MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS CONSTITUÍDAS POR COMPÓSITOS LAMINADOS

Geovanne Viana Nogueira

Rodrigo Ribeiro Paccola

Humberto Breves Coda

geovanne@usp.br

rpaccola@sc.usp.br

hbcoda@sc.usp.br

Departamento de Engenharia de Estruturas – SET-EESC-USP

Av. Trabalhador Sãocarlense 400, 13566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil

Resumo. A análise de estruturas constituídas por compósitos laminados apresenta grandes desafios, pois, como estes materiais são heterogêneos e anisotrópicos, as distribuições de tensões interlaminares obtidas com as formulações convencionais são descontínuas e imprecisas. Sua melhoria, portanto, é imprescindível para buscar e modelar critérios de falha. Este trabalho propõe um elemento finito posicional para modelagem de vigas laminadas cuja cinemática permite a ocorrência de giros independentes e variação de espessura das lâminas. O elemento considera a não linearidade geométrica, mas no regime de deformações moderadas por conta da lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff que é adotada. A formulação desenvolvida é Lagrangiana total com emprego do método dos elementos finitos baseado em posições. Os graus de liberdade do elemento são as posições nodais e as componentes de vetores generalizados associados às seções transversais de cada lâmina. Resultados de análises numéricas realizadas em vários exemplos de vigas laminadas com diferentes relações vão/altura demonstram a eficiência da formulação proposta, pois as distribuições de deslocamentos e tensões ao longo da espessura do laminado concordaram bem com as obtidas a partir de análises numéricas utilizando elementos finitos bidimensionais em discretizações bastante refinadas.

Palavras-Chave: Vigas laminadas, Elemento finito posicional, Não linearidade geométrica.

1 INTRODUÇÃO

Um compósito laminado é formado pelo empilhamento e união de lâminas de materiais diferentes. Em aplicações estruturais, destacam-se os laminados formados por lâminas reforçadas com fibras. Esse tipo de material é produzido segundo um esquema de laminação pré-definido em função das propriedades desejadas (Jones, 1999).

De acordo com Carrera (2002), uma análise realista de estruturas constituídas por compósitos laminados deve considerar os seguintes aspectos: anisotropia no plano do laminado, heterogeneidade transversal, efeito Zig-Zag e continuidade interlaminar. Os principais modelos existentes se baseiam em teorias de camada única equivalente (*Equivalente Single Layer* - ESL) e em teorias tridimensionais.

Nas teorias ESL, o laminado é representado por uma única lâmina equivalente cujas propriedades são obtidas através de uma média ponderada das propriedades mecânicas de cada lâmina que compõe o laminado ou por meio de técnicas de homogeneização (Ghugal e Shimpi, 2001; Kreja, 2011). Ao trabalhar com uma lâmina equivalente, as tensões ficam descontínuas e as deformações contínuas nas interfaces, portanto, imprecisas. Em laminados espessos ou com grande variação de propriedades elásticas de uma lâmina para outra, essa imprecisão se torna significativa.

Nesse sentido, as teorias tridimensionais são mais adequadas, pois, ao diferenciar as lâminas, geram distribuições de deformações e tensões mais realistas. Uma teoria bastante conhecida é a *Layerwise* cujas hipóteses cinemáticas consideram campos de deslocamentos independentes em cada lâmina, mas compatibilizados nas interfaces (Reddy, 2004; Moreira, Sousa e Valente, 2010).

Os materiais compósitos laminados são leves e possuem elevada resistência e rigidez específicas. Assim, as estruturas tendem a ser esbeltas e sujeitas a grandes deslocamentos e rotações. Como consequência, a análise na configuração indeformada não é mais aceitável, sendo necessário considerar a não linearidade geométrica.

Formulações numéricas destinadas à análise não linear geométrica podem ser desenvolvidas com descrição Euleriana (espacial) ou Lagrangiana (material) (Bonet; Wood, 2008). A descrição Euleriana se refere a uma posição do espaço e ao que acontece com o corpo naquela posição. A descrição Lagrangiana se refere ao comportamento de uma partícula material do corpo.

Formulações do método dos elementos finitos baseadas na descrição Lagrangiana são as mais vastamente empregadas na análise de problemas não lineares da mecânica dos sólidos (Bonet; Wood, 2008). Essa descrição utiliza duas abordagens distintas para a escolha da configuração de referência: a Lagrangiana total e a Lagrangiana atualizada (Bathe, 1996). Felippa e Haugen (2005) também inclui a abordagem corrotacional como uma descrição Lagrangiana.

Na descrição Lagrangiana total, a configuração de referência é conhecida e permanece fixa durante todo o processo de solução. Segundo Gadala e Oravas (1984) e Foucard et al. (2015), as principais vantagens desse tipo de descrição são a simplicidade na definição de uma cinemática e no cálculo de grandezas físicas. Outras vantagens apontadas são a implementação computacional mais simples, o menor custo e a facilidade de tratamento de condições de contorno. Formulações com essa descrição podem ser encontradas em Surana (1983) e Schulz e Filippou (2001).

A formulação desenvolvida neste trabalho é baseada no método dos elementos finitos po-

sicional. Nesse método, a descrição é Lagrangiana total com emprego de graus de liberdade em posição no lugar de deslocamentos. Os problemas analisados podem estar sujeitos a grandes deslocamentos e rotações, mas com deformações moderadas. O material é representado por um modelo constitutivo Hiperelástico com a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona a medida de deformação objetiva de Green ao seu conjugado energético, o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (Ogden, 1984).

O desenvolvimento da formulação posicional constitui uma importante linha de pesquisa do Grupo de Mecânica Computacional (GMEC) pertencente ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos – USP. Trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento dessa formulação são os de Bonet et al. (2000), Coda e Paccola (2007, 2011), Pascon (2012) e Sampaio (2014).

A análise de estruturas constituídas por compósitos laminados apresenta grandes desafios, pois as distribuições de tensões nas formulações convencionais são descontínuas e imprecisas. Sua melhoria é imprescindível para definir eficientes critérios de falha. Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho é propor um elemento finito para análise de vigas laminadas baseado na formulação posicional cuja cinemática possibilite giros independentes e variação de espessura das lâminas. Com essa cinemática, o efeito Zig-Zag e a heterogeneidade transversal são considerados. Além disso, as distribuições de deformações e tensões ao longo da espessura são mais realistas, viabilizando futuras modelagens do processo de falha do laminado por delaminação ou deslizamento.

2 ELEMENTO FINITO POSICIONAL LAMINADO

O método dos elementos finitos posicional apresenta como principal característica o emprego de graus de liberdade em posições, o que justifica seu nome, em vez dos tradicionais graus de liberdade em deslocamentos. Todo o desenvolvimento do método é realizado a partir da determinação de uma função mudança de configuração f que define a configuração atual, ou de equilíbrio, a partir de um domínio fixo e representado pela configuração inicial. Em vista disso, a formulação posicional é caracterizada como Lagrangiana total.

A não linearidade geométrica é considerada, pois não são impostas quaisquer simplificações relativas à ordem de grandeza dos deslocamentos e rotações na definição da função mudança de configuração. Para isso, emprega-se a deformação de Green que é uma medida de deformação objetiva e consistente com problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações. O conjugado energético da deformação de Green é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (Ogden, 1984).

A solução aproximativa dos elementos finitos posicionais é representada por uma interpolação das posições nodais com emprego de polinômios de Lagrange. Para a determinação dessas posições nodais, o princípio da energia potencial total estacionária é utilizado. Ao impor a nulidade da primeira variação do funcional de energia potencial total, um sistema de equações não linear é obtido (Chou; Pagano, 1992). A resolução desse sistema de equações é realizada por meio de uma estratégia baseada no método de Newton-Raphson.

2.1 Mapeamento posicional das configurações inicial e atual

O mapeamento posicional do elemento finito é realizado a partir da interpolação das posições de nós localizados em uma linha de referência (lr) e dos vetores generalizados tangentes aos planos nodais de cada lâmina. A linha de referência pode ser atribuída a qualquer lâmina, não havendo necessidade de estar localizada no seu centro.

A configuração inicial e a configuração atual têm suas posições mapeadas de maneira semelhante. Na configuração inicial, a localização da linha de referência e as posições dos nós são informações fornecidas durante o pré-processamento. Os vetores generalizados são unitários, normais à linha de referência e podem ser obtidos a partir do vetor tangente. Na configuração atual, as posições dos nós da linha de referência e os vetores generalizados de cada lâmina constituem os graus de liberdade do elemento, sendo as incógnitas do problema não linear. Na Fig. 1, ilustra-se a ideia do mapeamento posicional.

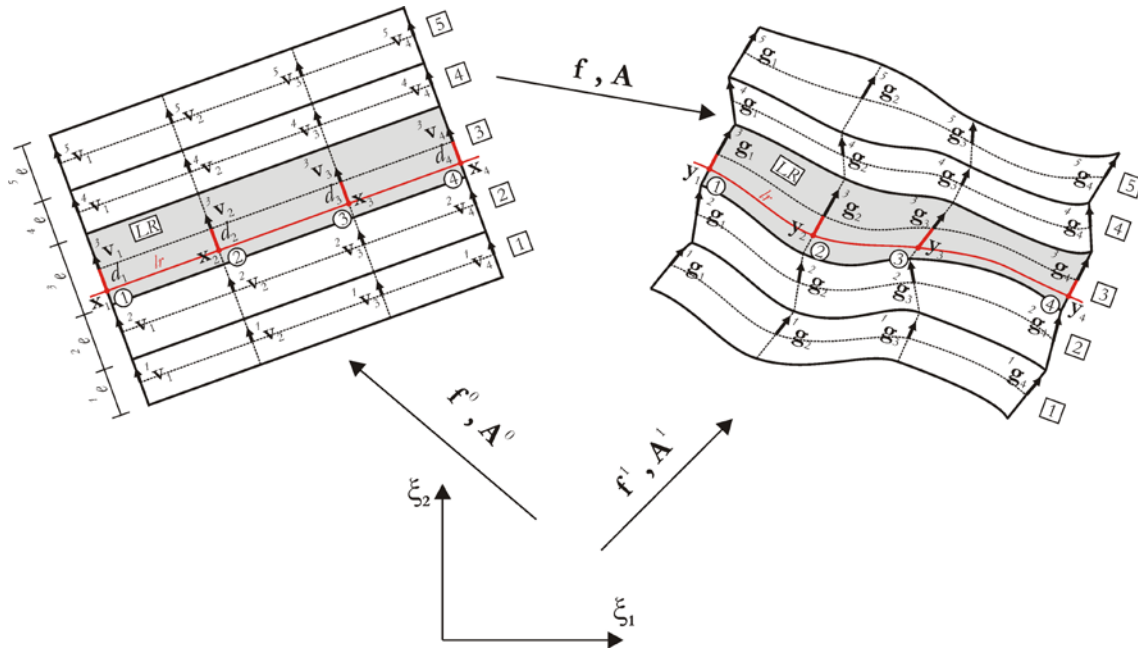


Figura 1. Mapeamento posicional do elemento

O mapeamento posicional de uma determinada lâmina depende se essa lâmina coincide com a Lâmina de Referência (LR) ou se está acima ou abaixo desta. Assim, três expressões distintas para o mapeamento são necessárias:

a) Mapeamento para a lâmina k igual à LR:

$$\begin{aligned} {}^k \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2) &= {}^k \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) \\ {}^k \mathbf{x}^i(\xi_1, \xi_2) &= [x_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] + \frac{{}^k e}{2} \xi_2 \right\} [{}^k v_w^i \Phi_w(\xi_1)] \end{aligned} \quad (1)$$

com $i = 1, 2$ e $j, w = 1, \dots, (gr+1)$,

na qual ${}^k \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2)$ é a função de mapeamento posicional da configuração inicial ${}^k \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ a partir do espaço adimensional para a lâmina $k = LR$, ${}^k \mathbf{x}^i(\xi_1, \xi_2)$ é a posição inicial na direção i de um ponto qualquer localizado na lâmina k , x_j^i é a posição na direção i do nó j localizado na lr , d_j é a distância entre o nó j na lr e o centro da lâmina k , ${}^k e$ é a espessura da lâmina k , ${}^k v_w^i$ é a componente na direção i do versor pertencente ao plano da seção transversal da lâmina k passando pelo nó w e $\Phi_w(\xi_1)$ é a função de forma associada ao nó w com grau gr .

b) Mapeamento para as lâminas k abaixo da LR:

$$\begin{aligned}
 {}^k \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2) &= {}^k \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) \\
 {}^k x^i(\xi_1, \xi_2) &= [x_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR \ell}{2} \right\} [{}^{LR} v_w^i \Phi_w(\xi_1)] \\
 &\quad - \sum_{m=k+1}^{LR-1} {}^m \ell [{}^m v_j^i \Phi_j(\xi_1)] + {}^k \ell [{}^k v_j^i \Phi_j(\xi_1)] \frac{\xi_2 - 1}{2} \\
 &\quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } j, w = 1, \dots, (gr+1),
 \end{aligned} \tag{2}$$

na qual ${}^{LR} \ell$ e ${}^{LR} v_w^i$ são a espessura da LR e a componente na direção i do versor pertencente ao plano da seção transversal da LR passando pelo nó w , respectivamente. ${}^m \ell$ e ${}^m v_w^i$ são análogos para as lâminas inferiores a LR , ou seja, da lâmina $k+1$ à $LR-1$.

c) Mapeamento para as lâminas k acima da LR :

$$\begin{aligned}
 {}^k \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2) &= {}^k \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) \\
 {}^k x^i(\xi_1, \xi_2) &= [x_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR \ell}{2} \right\} [{}^{LR} v_w^i \Phi_w(\xi_1)] \\
 &\quad + \sum_{m=LR+1}^{k-1} {}^m \ell [{}^m v_j^i \Phi_j(\xi_1)] + {}^k \ell [{}^k v_j^i \Phi_j(\xi_1)] \frac{\xi_2 + 1}{2} \\
 &\quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } j, w = 1, \dots, (gr+1),
 \end{aligned} \tag{3}$$

na qual ${}^m \ell$ e ${}^m v_w^i$ são, para cada lâmina m de $LR+1$ à $k-1$, a espessura e a componente na direção i do versor pertencente ao plano da seção transversal da lâmina m no plano nodal w , respectivamente.

O mapeamento posicional para a configuração atual é totalmente análogo, bastando substituir as posições iniciais ${}^k x^i$ e x_j^i pelas posições atuais ${}^k y^i$ e y_j^i e os versores ${}^{LR} v_j^i$, ${}^m v_j^i$ e ${}^k v_j^i$ pelos vetores generalizados ${}^{LR} g_j^i$, ${}^m g_j^i$ e ${}^k g_j^i$.

Como não se trabalha com deslocamentos, a função mudança de configuração pode ser determinada através da composição de funções:

$${}^k \mathbf{f} = {}^k \mathbf{f}^1(\xi_1, \xi_2) \circ [{}^k \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2)]^{-1}. \tag{4}$$

A deformação de Green é obtida a partir do gradiente da função mudança de configuração:

$${}^k \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[({}^k \mathbf{A})^T \cdot {}^k \mathbf{A} - \mathbf{I} \right], \quad \text{com } {}^k \mathbf{A} = \nabla {}^k \mathbf{f}. \tag{5}$$

Observando a composição de funções estabelecida na Eq. (4), ${}^k \mathbf{A}$ é determinado pelo produto entre o gradiente de ${}^k \mathbf{f}^1(\xi_1, \xi_2)$, ${}^k \mathbf{A}^1 = \nabla {}^k \mathbf{f}^1$, e a inversa do gradiente de ${}^k \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2)$, $[{}^k \mathbf{A}^0]^{-1} = [\nabla {}^k \mathbf{f}^0]^{-1}$, ficando expresso por:

$${}^k \mathbf{A} = {}^k \mathbf{A}^1(\xi_1, \xi_2) \cdot [{}^k \mathbf{A}^0(\xi_1, \xi_2)]^{-1}. \tag{6}$$

2.2 Energia potencial de deformação

O tensor de deformação de Green apresenta como conjugado energético o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (Ogden, 1984). Neste trabalho, a relação entre eles é definida pela lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff, que, para um estado plano de tensões, apresenta a energia específica de deformação expressa por:

$${}^k u_e = \frac{1}{2} \frac{{}^k E}{1 - ({}^k \nu)^2} \left[({}^k E_{11})^2 + ({}^k E_{22})^2 + 2 ({}^k \nu) ({}^k E_{11}) ({}^k E_{22}) + \frac{1 - {}^k \nu}{2} ({}^k E_{12} + {}^k E_{21})^2 \right], \quad (7)$$

com ${}^k E$ correspondendo ao módulo de elasticidade longitudinal da lâmina k e ${}^k \nu$ ao coeficiente de Poisson. A repetição do índice k nessa equação não implica em somatório.

Integrando em relação ao volume inicial do elemento, uma vez que a descrição é Lagrangiana total, a energia potencial de deformação de uma lâmina k fica determinada por:

$${}^k U = \int_{{}^k V_0} {}^k u_e d {}^k V_0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^k U = {}^k b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^k u_e (\xi_1, \xi_2) {}^k J (\xi_1, \xi_2) d \xi_1 d \xi_2, \quad (8)$$

na qual ${}^k b$ é a largura da lâmina k e ${}^k J (\xi_1, \xi_2) = \det [{}^k \mathbf{A}^0 (\xi_1, \xi_2)]$ é o Jacobiano da mudança de variáveis. A repetição do índice k nessa equação também não implica em somatório.

Como energia é uma grandeza escalar, a energia de deformação do elemento laminado pode ser obtida por meio de um simples somatório das energias de cada lâmina k :

$$U^{elm} = \sum_{k=1}^{nlam} {}^k U. \quad (9)$$

2.3 Energia potencial relativa às ações externas

As ações externas são conservativas e a relação entre força e posição é energeticamente conjugada. Na parcela da energia potencial, são consideradas as contribuições de forças concentradas e de forças distribuídas.

A formulação do elemento laminado foi desenvolvida de forma a permitir a aplicação de forças externas em qualquer posição do elemento, fato que contribui para viabilizar a análise de laminados finos ou espessos.

A possibilidade de analisar laminados finos ou espessos e de considerar o carregamento aplicado em qualquer posição, e não restrito à linha de referência do elemento, constituem contribuições importantes do trabalho.

Como as forças concentradas são consideradas aplicadas em qualquer ponto ao longo de uma seção nodal, a energia potencial associada depende de qual lâmina a força está sendo aplicada. A fim de exemplificar, a energia potencial de uma força $\mathbf{P}_n$ aplicada em uma lâmina k superior à Lâmina de Referência (LR) pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \Omega &= -\mathbf{P}_n \cdot {}^k \mathbf{y} (\xi_{1n}, \xi_{2n}) \\ \Omega &= -P_n^i y_n^i - \left[P_n^i \left(d_n + \frac{LR \ell}{2} \right) \right] {}^{LR} g_n^i - \sum_{m=LR+1}^{k-1} \left[(P_n^i {}^m \ell) {}^m g_n^i \right] - \left[P_n^i \left({}^k \ell \frac{\xi_{2n} + 1}{2} \right) \right] {}^k g_n^i \\ \Omega &= -P_n^i y_n^i - {}^{LR} M_n^i {}^{LR} g_n^i - \sum_{m=LR+1}^{k-1} ({}^m M_n^i {}^m g_n^i) - {}^k M_n^i {}^k g_n^i, \text{ com } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Nessa expressão, a repetição dos índices k e n não implica em somatório. Os termos escritos com a letra M são os conjugados energéticos associados aos vetores generalizados $\mathbf{g}$ das lâminas da seção nodal n ($\xi_1 = \xi_{1n}$) que contém a força concentrada e ξ_{2n} é a coordenada adimensional correspondente à posição na espessura da lâmina k na qual a força está aplicada.

A força distribuída também pode estar aplicada em qualquer posição e não somente na linha de referência (lr). Assim, a energia potencial associada é calculada a partir do mapeamento das posições da força distribuída em uma determinada lâmina k . O ponto de aplicação da força em relação à espessura da lâmina é identificado através da coordenada adimensional $\xi_2 = \xi_{2q}$. A expressão para cálculo da energia potencial fica escrita como:

$$\Omega = - \int_{-1}^1 {}^k q^i(\xi_1) {}^k y^i(\xi_1, \xi_{2q}) {}^k J(\xi_1) d\xi_1, \text{ com } i = 1, 2, \quad (11)$$

na qual ${}^k q^i(\xi_1)$ é a força distribuída, representada através de uma interpolação polinomial, ${}^k y^i(\xi_1, \xi_{2q})$ é o mapeamento das posições atuais da força distribuída na lâmina k e ${}^k J(\xi_1)$ é o Jacobiano da transformação do espaço adimensional para a linha de mapeamento dessas posições na configuração inicial. A repetição do índice k não implica em soma.

Ao aplicar a força distribuída em uma posição fora da linha de referência (lr), além das forças nodais equivalentes, surgem conjugados energéticos equivalentes associados às componentes dos vetores generalizados das lâminas influenciadas pela força. A energia potencial associada depende da lâmina na qual a força é aplicada. A fim de exemplificar, a energia potencial de uma força aplicada em uma lâmina k superior à Lâmina de Referência (LR) pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \Omega = & - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i(\xi_1)] \Phi_j(\xi_1) {}^k J(\xi_1) d\xi_1 \right\} y_j^i \\ & - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_j^i(\xi_1)] \left\{ [d_{\xi} \Phi_{\xi}(\xi_1)] + \frac{LR}{2} \right\} \Phi_w(\xi_1) {}^k J(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^{LR} g_w^i \\ & - \sum_{m=LR+1}^{k-1} \left\{ \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i(\xi_1)] {}^m \Phi_j(\xi_1) {}^k J(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^m g_j^i \right\} \\ & - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i(\xi_1)] {}^k \Phi_j(\xi_1) \frac{\xi_{2q} + 1}{2} {}^k J(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^k g_j^i \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Omega = -Q_j^i y_j^i - {}^{LR} M_w^i {}^{LR} g_w^i - \sum_{m=LR+1}^{k-1} ({}^m M_j^i {}^m g_j^i) - {}^k M_j^i {}^k g_j^i$$

com $i = 1, 2$ e $j, w, \xi = 1, \dots, (gr+1)$.

Nessas expressões, a repetição do índice k não implica em somatório. Os termos escritos com as letras Q e M representam forças nodais equivalentes e conjugados energéticos equivalentes associados aos vetores generalizados das lâminas, respectivamente. De forma compacta, a energia potencial relativa às ações externas pode ser escrita como:

$$\Omega = - (P_j^i + Q_j^i) y_j^i - {}^m M_j^i {}^m g_j^i, \quad (13)$$

com $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, (gr+1)$ e $m = 1, \dots, nlam$. P_j^i e Q_j^i representam forças concentradas e

forças nodais equivalentes, respectivamente, com componentes nas direções i aplicadas no nó j localizado na linha de referência. A parcela ${}^m M_j^i$ representa conjugados energéticos associados aos vetores generalizados das lâminas m .

2.4 Energia potencial total e equações de equilíbrio

A energia potencial total é composta pelas parcelas da energia de deformação mais o potencial das ações externas. Considerando a contribuição de cada elemento nas parcelas de energia de deformação, definida nas Eq. (8) e Eq. (9), e de energia das ações externas, definida na Eq. (13), a energia potencial total da estrutura $\Pi(y_j^i)$ fica expressa por:

$$\Pi(y_j^i) = U(y_j^i) - (P_j^i + Q_j^i + M_j^i) y_j^i, \quad (14)$$

na qual y_j^i agora representa o vetor posição atual que contém os graus de liberdade nodais de todos os elementos finitos utilizados na discretização.

O vetor posição atual y_j^i é a solução do sistema de equações não lineares definido a partir do princípio da energia potencial total estacionária. A estacionariedade implica na nulidade do gradiente da função de energia potencial total. Na formulação posicional, esse gradiente é calculado em relação às posições nodais:

$$\nabla \Pi(y_k^i) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi(y_k^i)}{\partial y_\alpha^\beta} = 0, \quad (15)$$

na qual α representa os nós com numeração global e β , os graus de liberdade. Considerando a Eq. (14), essa condição resulta no seguinte sistema de equações de equilíbrio nodal:

$$F_{\text{int}\alpha}^\beta(y_j^i) - (P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta + M_\alpha^\beta) = 0. \quad (16)$$

O vetor de forças internas é definido a partir das Eq. (8) e Eq. (9) por:

$$\frac{\partial U(y_k^i)}{\partial y_\alpha^\beta} \Rightarrow F_{\text{int}\alpha}^\beta(y_j^i) = \sum_{k=1}^{nlam} \left[{}^k b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial {}^k u_e(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^\beta} {}^k J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right]. \quad (17)$$

2.5 Processo de solução

A Equação (16) representa um sistema de equações não linear. A estratégia de solução empregada é baseada no método de Newton-Raphson. Como as posições atuais y_k^i dos nós não são conhecidas, posições-tentativa $y_{j\text{tentativa}}^i$ são assumidas. Uma vez que essas posições não verificam o equilíbrio nodal, gera-se um resíduo que corresponde ao vetor de desbalanceamento mecânico:

$$R_\alpha^\beta(y_{j\text{tentativa}}^i) = F_{\text{int}\alpha}^\beta(y_{j\text{tentativa}}^i) - (P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta + M_\alpha^\beta). \quad (18)$$

No método de Newton-Raphson, a busca pela solução da Eq. (16) é feita através da linearização do resíduo com uma expansão em série de Taylor truncada em dois termos. Impondo a nulidade dessa expansão, correções para as posições-tentativa são obtidas. Esse procedimento está descrito nas equações a seguir:

$$R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i) \approx R_{\alpha}^{\beta}(y_{k \text{ tentativa}}^i) + \left. \frac{\partial R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \right|_{y_{k \text{ tentativa}}^i} \Delta y_{\gamma}^{\zeta}$$

$$R_{\alpha}^{\beta}(y_{k \text{ tentativa}}^i) + H_{\alpha \gamma}^{\beta \zeta}(y_{k \text{ tentativa}}^i) \Delta y_{\gamma}^{\zeta} = 0 \quad (19)$$

$$H_{\alpha \gamma}^{\beta \zeta}(y_{k \text{ tentativa}}^i) \Delta y_{\gamma}^{\zeta} = -R_{\alpha}^{\beta}(y_{k \text{ tentativa}}^i)$$

$$\Delta y_{\gamma}^{\zeta} = -[H_{\alpha \gamma}^{\beta \zeta}(y_{k \text{ tentativa}}^i)]^{-1} R_{\alpha}^{\beta}(y_{k \text{ tentativa}}^i)$$

na qual $H_{\alpha \gamma}^{\beta \zeta}(y_{k \text{ tentativa}}^i) = \left. \frac{\partial R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \right|_{y_{k \text{ tentativa}}^i}$ é a matriz Hessiana calculada nas posições-tentativa.

Todas as ações externas são consideradas conservativas. Assim, observando as Eq. (17) e Eq. (18), a Hessiana fica definida por:

$$H_{\alpha \gamma}^{\beta \zeta}(y_k^i) = \frac{\partial F_{\text{int } \alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{\alpha \gamma}^{\beta \zeta}(y_k^i) = \sum_{k=1}^{nlam} \left[{}^k b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 [{}^k u_e(\xi_1, \xi_2)]}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} {}^k J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \quad (20)$$

Obtidas novas posições-tentativa, o vetor de desbalanceamento mecânico é recalculado e correções são novamente determinadas através da repetição desse procedimento. O controle sobre o processo iterativo é feito por meio de critérios de convergência em posição e em força, conforme Eq. (21).

$$\frac{\|\Delta y_k^i\|}{\|x_k^i\|} < \text{tolerância} \quad \frac{\|R_k^i\|}{\|F_{\text{ext } k}^i\|} < \text{tolerância} \quad (21)$$

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Dois exemplos são apresentados a fim de avaliar diferentes aspectos da formulação. Os resultados são comparados aos obtidos através de análises numéricas realizadas no software Ansys®. O elemento finito bidimensional PLANE42 foi empregado e os resultados de análises com uma discretização bastante refinada são utilizados como referência.

Também foram realizadas análises com discretizações equivalentes às discretizações utilizadas nas análises feitas com o elemento proposto. Para isso, um número de elementos PLANE42 igual ao número de lâminas foi adicionado entre dois nós da discretização com o elemento posicional laminado. O número de lâminas do modelo numérico é independente do número de lâminas do laminado.

O objetivo é comparar o desempenho do elemento proposto neste trabalho em relação aos elementos finitos bidimensionais que podem apresentar problemas de mau condicionamento matricial quando utilizados na análise de vigas laminadas.

No primeiro exemplo, analisou-se uma viga sanduíche biapoiada com carregamento distribuído uniforme aplicado na face superior. Três casos com relações vão/altura S igual a 2, 4 e 10 são considerados. O objetivo principal do exemplo é verificar a precisão das

distribuições de deslocamentos e tensões ao longo da seção transversal em problemas de laminados finos ou espessos. Além disso, a possibilidade de aplicação de forças distribuídas fora da linha de referência é avaliada.

No segundo exemplo, a mesma viga foi analisada. Um único caso com $S = 4$ foi considerado, porém três combinações entre o módulo de elasticidade das lâminas nas faces e da lâmina do núcleo, modelos AAA, ABA e ACA, são estudados.

A viga é submetida à ação de uma força concentrada aplicada na face superior da seção localizada na metade do vão. Nesse exemplo, verifica-se a capacidade do elemento em representar com precisão as distribuições de deslocamentos e tensões à medida que o módulo de elasticidade do núcleo é reduzido ($A \rightarrow B \rightarrow C$). Os resultados obtidos permitem também avaliar a possibilidade de aplicar forças concentradas fora da linha de referência.

3.1 Exemplo 01: Viga sanduíche biapoada com força distribuída

O exemplo é representado por uma viga biapoada solicitada por uma força distribuída uniforme. A seção transversal é composta por três lâminas formando um compósito laminado do tipo sanduíche. As lâminas das faces possuem espessura correspondente a 5% da altura total e módulo de elasticidade igual a 100 vezes o módulo de elasticidade da lâmina que compõe o núcleo. O carregamento, as características geométricas da seção transversal e os parâmetros elásticos do material estão representados na Fig. 2.

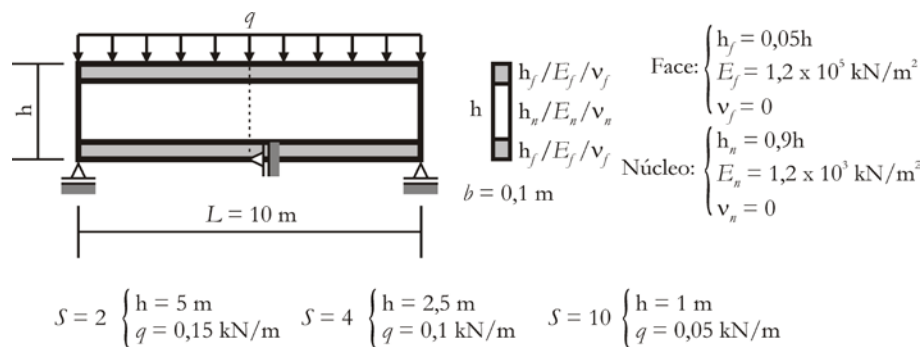


Figura 2. Exemplo 01: geometria, carregamento e parâmetros elásticos do problema

A viga foi discretizada com 16 elementos finitos e 20 lâminas (Fig. 3), estando 4 na lâmina da face inferior, 12 na lâmina do núcleo e 4 na lâmina da face superior (notação: 4/12/4). Essa discretização foi adotada a partir de observações extraídas de análises de convergência realizadas.

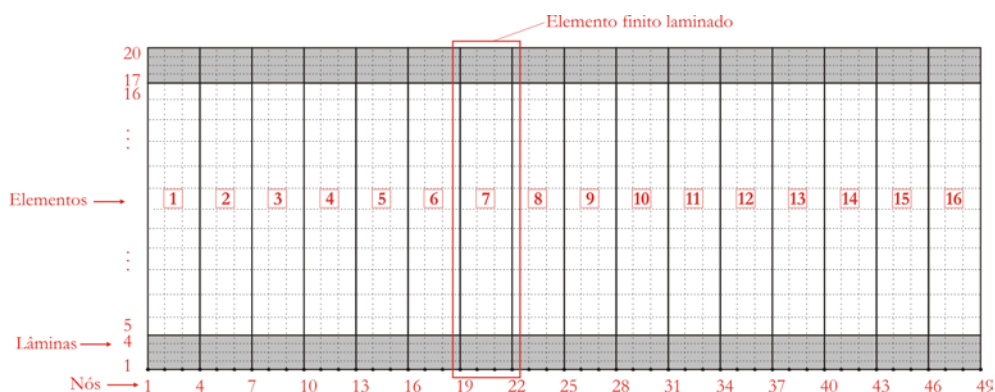


Figura 3. Exemplo 01: Malha de elementos finitos posicionais (16 elem., 20 lâm. e 2058 g.l.)

Em todas as análises, a força distribuída foi aplicada em um único incremento e o processo de solução baseado no método de Newton-Raphson foi controlado por meio dos critérios de convergência em posição e em força com tolerâncias de 10^{-9} e 10^{-6} , respectivamente.

Os resultados das análises são apresentados por meio das distribuições de deslocamento horizontal e de tensões ao longo de algumas seções transversais (Fig. 4 e Fig. 5). Os resultados de análises numéricas realizadas no Ansys® com emprego de uma discretização equivalente e de uma discretização refinada também são apresentados. A equivalência entre as discretizações é a seguinte: posicional com 16 elementos cúbicos e 20 lâminas (4/12/4) $\Leftrightarrow$ PLANE42 com malha de 48 x 20 elementos, sendo 20 distribuídos em 4/12/4.

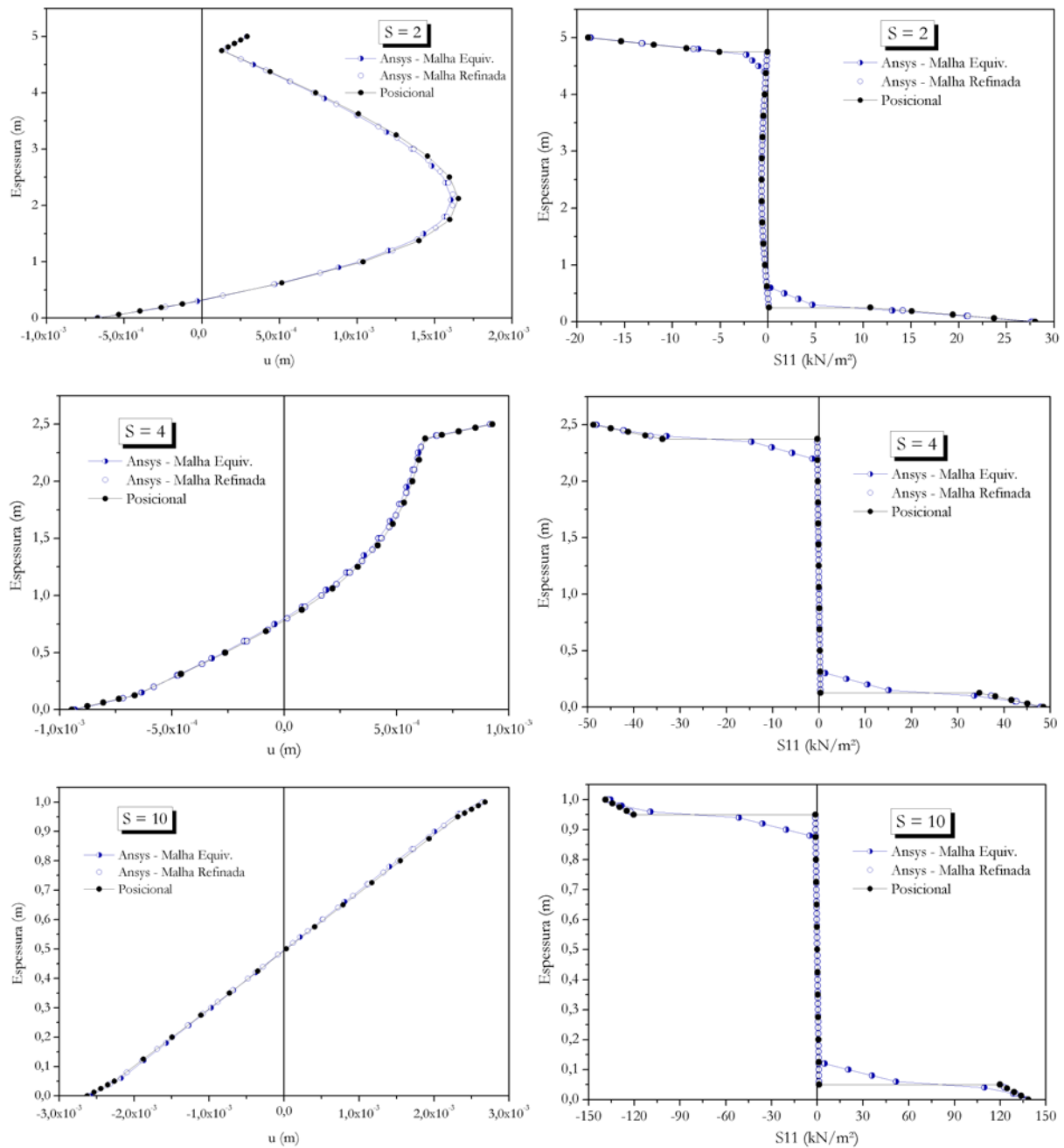


Figura 4. Resultados do Exemplo 01: deslocamento na direção 1 (u) para seção a 2,5 m do apoio esquerdo e tensão axial S_{11} para seção no meio do vão

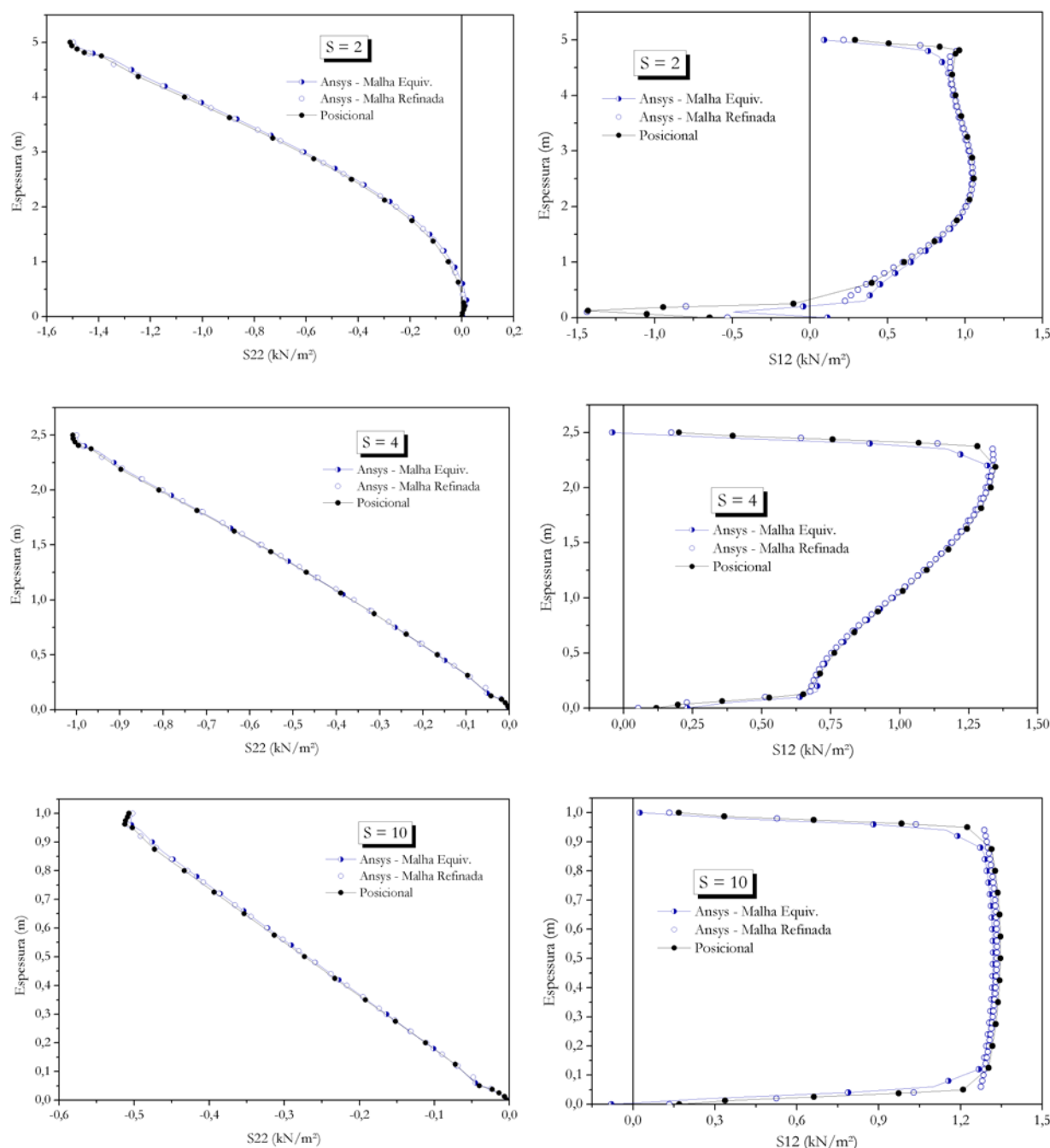


Figura 5. Resultados do Exemplo 01: tensão axial S22 para seção no meio do vão e tensão de cisalhamento S12 para seção a 2,5 m do apoio esquerdo

A precisão dos resultados obtidos com o elemento posicional laminado foi excelente, pois uma ótima concordância com os resultados de referência foi alcançada. Os resultados obtidos no Ansys® através de uma malha equivalente apresentaram menor precisão para as tensões S11 e S12 na região em torno das interfaces entre as lâminas. Essa menor precisão é atribuída a um possível mau condicionamento matricial gerado pela distorção do elemento PLANE42 e pela mudança das propriedades elásticas do material na região de interfaces.

Distribuições de deslocamentos e tensões são representados para a viga espessa ($S = 2$) por meio de mapas de cores (Fig. 6). As imagens foram geradas no programa de pós-processamento AcadView.

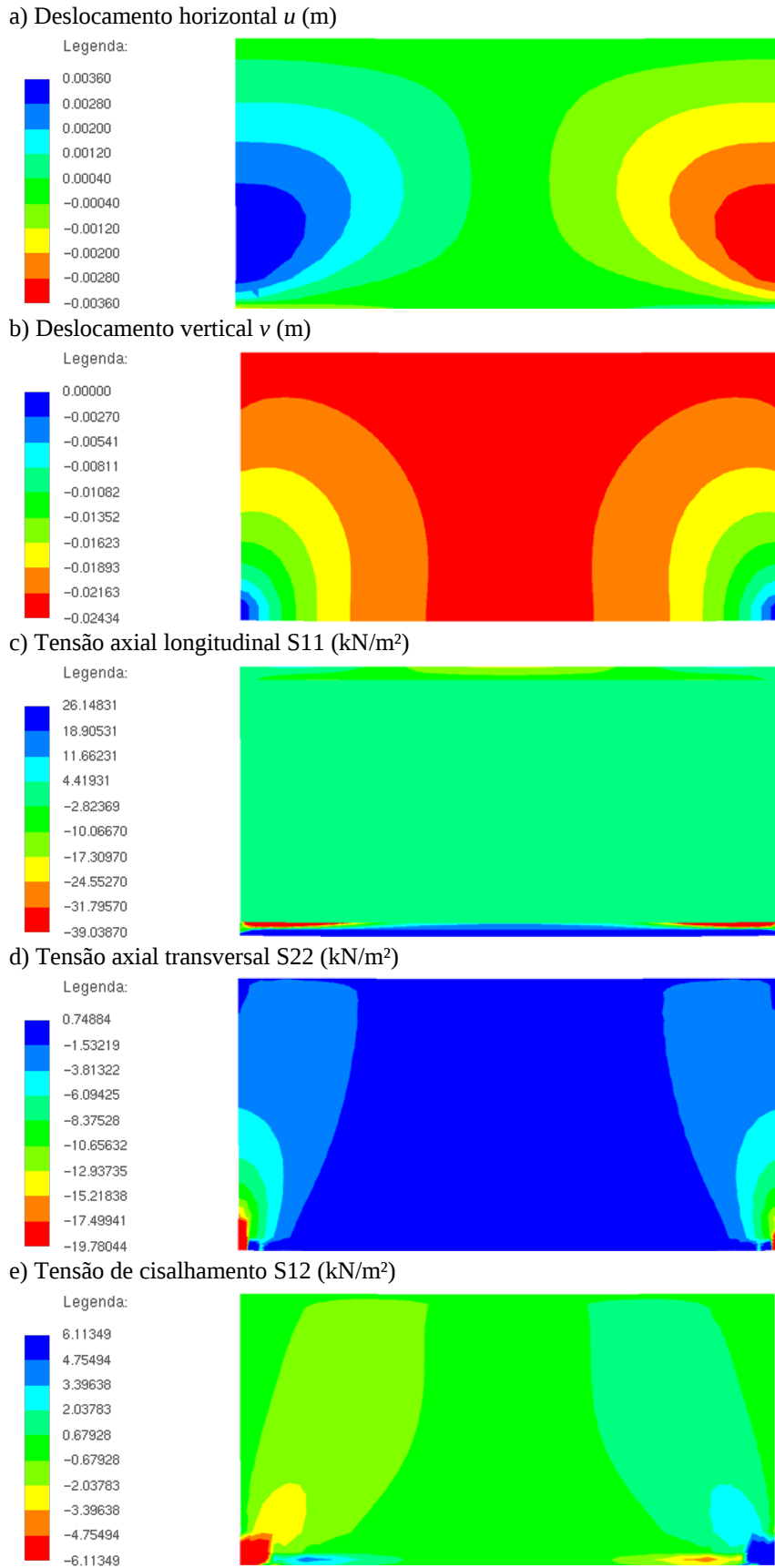


Figura 6. Resultados do Exemplo 01: distribuições de deslocamentos e tensões na viga com $S = 2$

3.2 Exemplo 02: Viga sanduíche biapoiada com força concentrada

Neste segundo exemplo, a viga está submetida à ação de uma força concentrada aplicada no topo da seção localizada no meio do vão. Uma única relação entre vão e altura ($S = 4$) é considerada. São analisados três modelos (AAA, ABA e ACA) nos quais somente o módulo de elasticidade da lâmina do núcleo é variado. As características geométricas da seção transversal e os parâmetros elásticos do material das lâminas estão representados na Fig. 7.

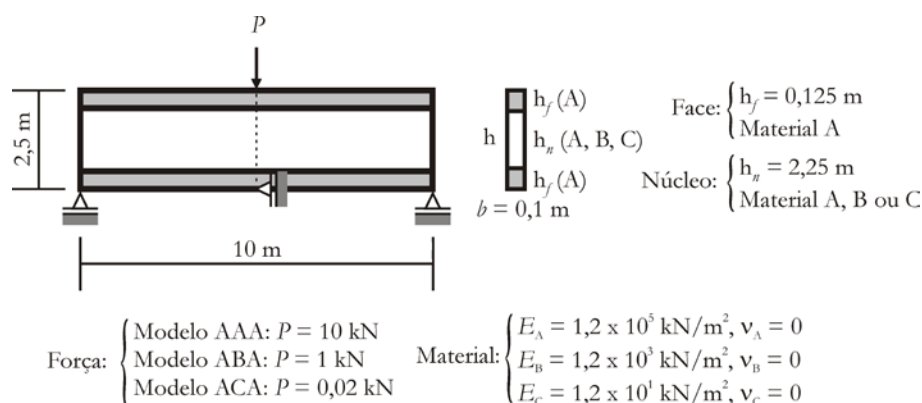
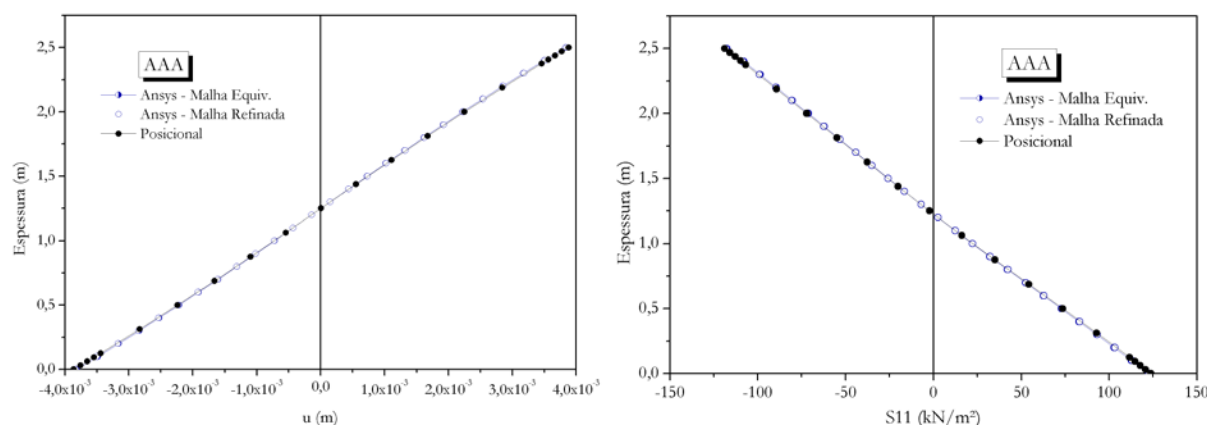


Figura 7. Exemplo 02: geometria, carregamento e parâmetros elásticos

As análises dos três modelos permitiram verificar a capacidade da formulação em representar com precisão as distribuições de deslocamentos e tensões em problemas com variações significativas no módulo de elasticidade das lâminas. O problema também permitiu avaliar a possibilidade de aplicar uma força concentrada em um ponto localizado fora da linha referência do elemento.

A discretização empregada foi a mesma do exemplo anterior. Em todas as análises, a força concentrada foi aplicada em um único incremento e o processo de solução baseado no método de Newton-Raphson foi controlado por meio dos critérios de convergência em posição e em força com tolerâncias de 10^{-9} e 10^{-6} , respectivamente.

Os resultados das análises são apresentados através das distribuições de deslocamento horizontal e de tensões na seção transversal localizada a 2,5 m do apoio esquerdo (Fig. 8 e Fig. 9). Nessas figuras, também constam os resultados de análises numéricas realizadas no Ansys®. A mesma equivalência entre as malhas do elemento finito posicional e do elemento PLANE42 foi empregada.



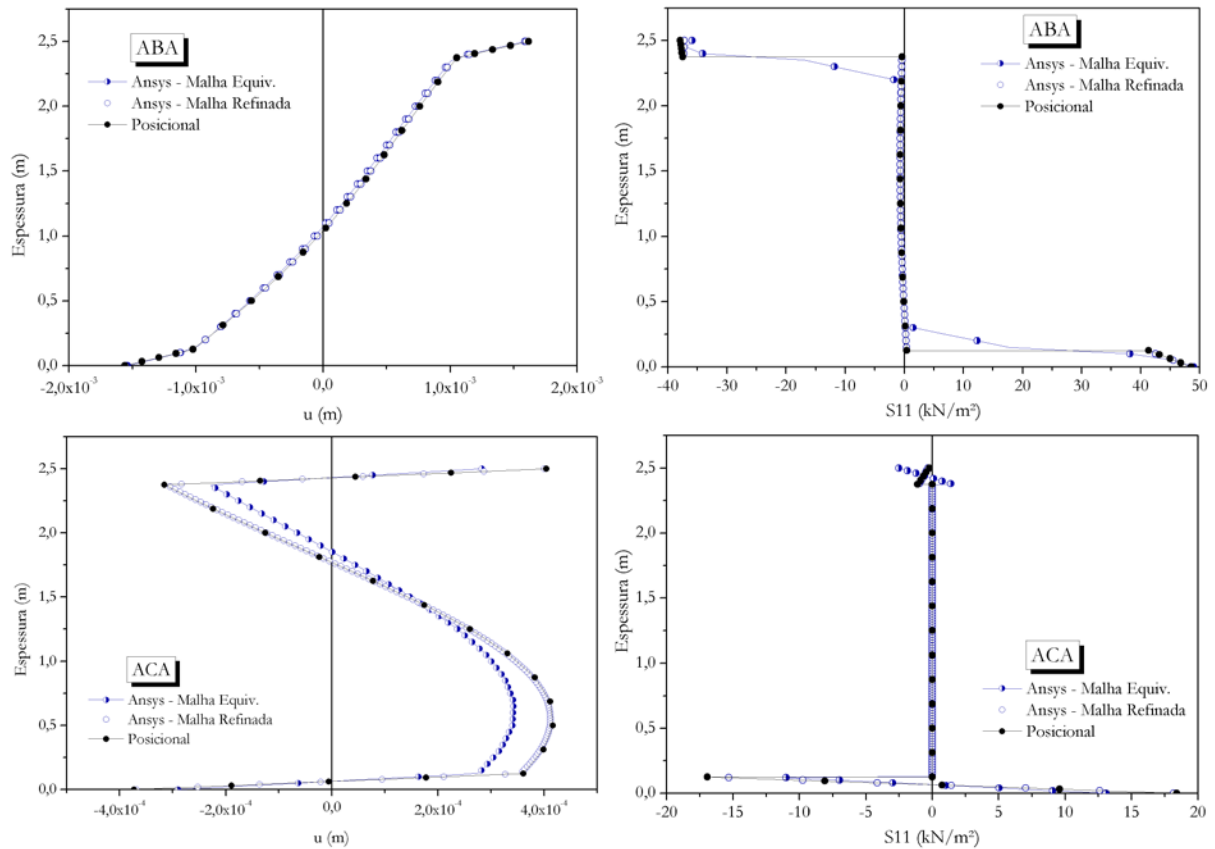
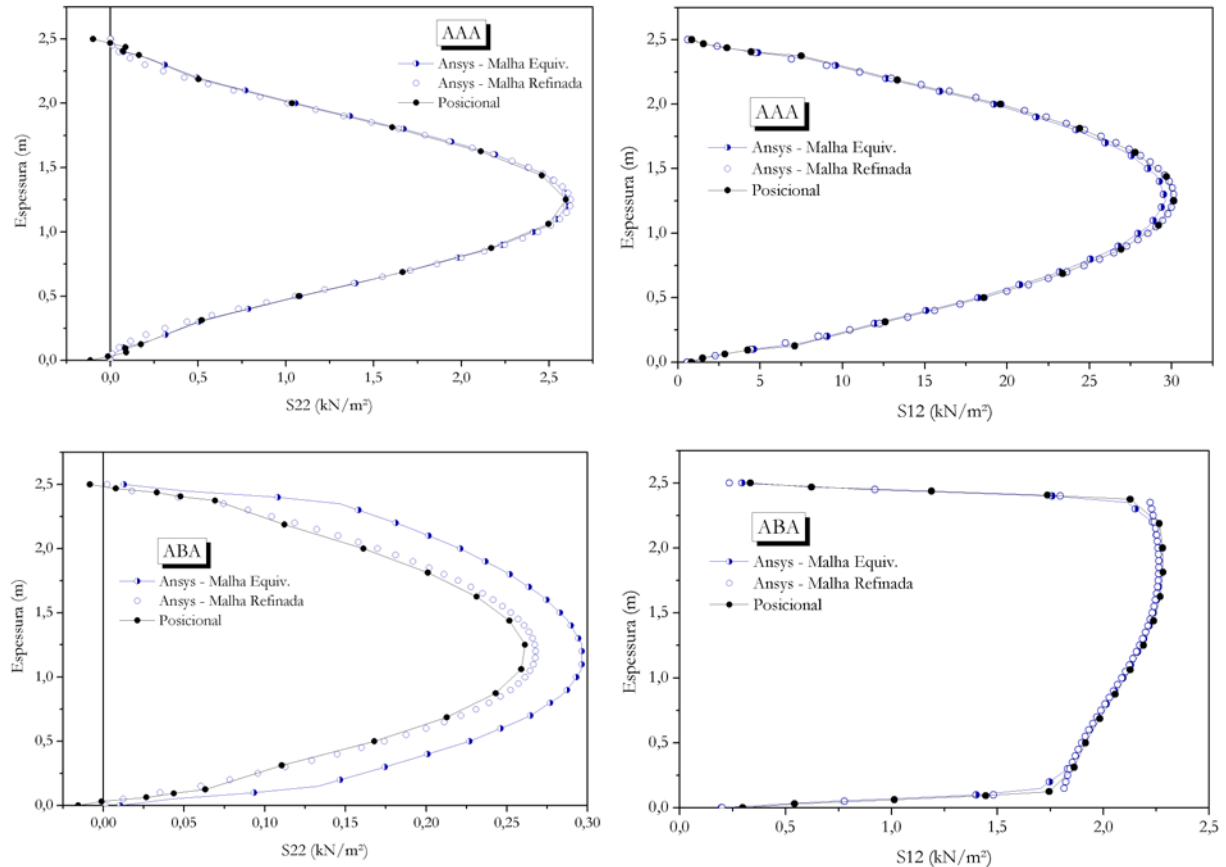


Figura 8. Resultados do Exemplo 02: deslocamento na direção 1 (u) e tensão axial $S11$ para seção a 2,5 m do apoio esquerdo.



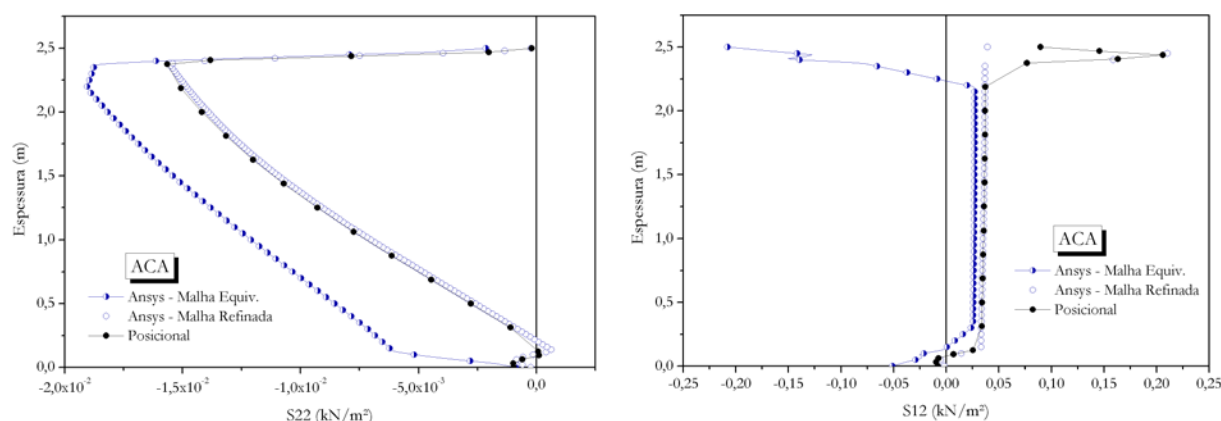


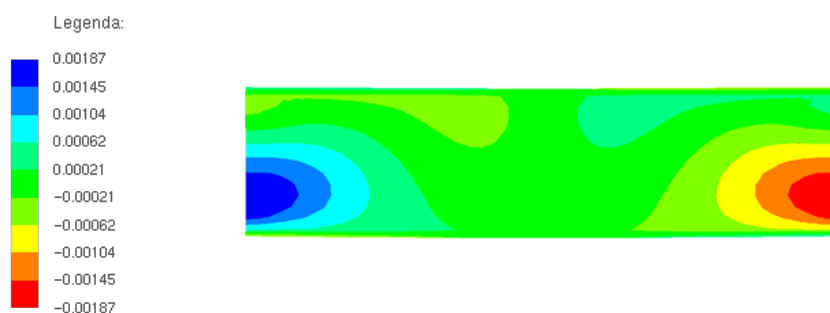
Figura 9. Resultados do Exemplo 02: tensão axial S22 e tensão de cisalhamento S12 para seção a 2,5 m do apoio esquerdo.

Os resultados fornecidos pelo elemento posicional laminado são considerados satisfatórios, pois as diferenças observadas são pequenas mesmo para o modelo ACA. Essas diferenças foram bem menores do que as observadas nos resultados obtidos no Ansys® com emprego do elemento finito bidimensional PLANE42 através de uma malha equivalente. A influência do mau condicionamento matricial ficou evidente principalmente para o modelo ACA.

A possibilidade de aplicar uma força concentrada fora da linha de referência do elemento também se mostrou consistente.

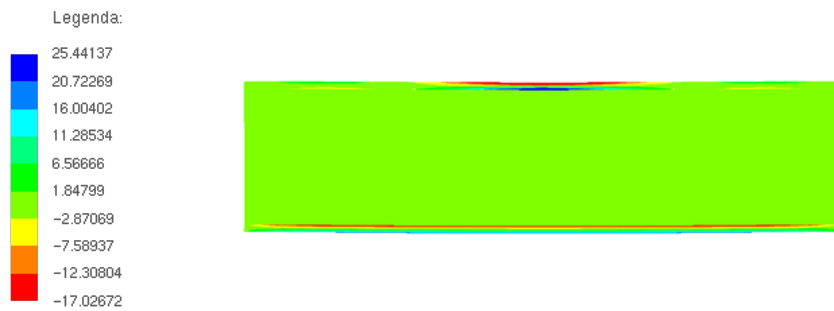
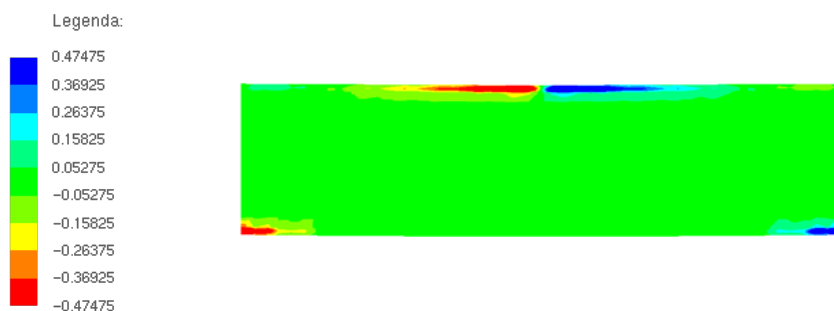
Distribuições de deslocamentos e tensões são representados para a viga do modelo ACA por meio de mapas de cores (Fig. 10). As imagens foram geradas no programa de pós-processamento AcadView.

a) Deslocamento horizontal u (m)



b) Deslocamento vertical v (m)



c) Tensão axial longitudinal S11 (kN/m²)d) Tensão axial transversal S22 (kN/m²)e) Tensão de cisalhamento S12 (kN/m²)**Figura 10. Resultados do Exemplo 02: distribuições de deslocamentos e tensões na viga com modelo ACA.**

4 CONCLUSÃO

A formulação do elemento finito posicional foi desenvolvida, implementada computacionalmente e verificada em problemas com soluções numéricas encontradas a partir de análises realizadas no software Ansys®.

A eficiência do elemento laminado foi comparada em relação ao elemento finito bidimensional PLANE42 do Ansys® com uma discretização equivalente e mesmo número de graus de liberdade. Foram identificados neste elemento, problemas de mau condicionamento matricial provocados por distorções nos elementos e por variações elevadas e bruscas nas propriedades elásticas das lâminas. Por conta disso, um refinamento da malha foi necessário.

Esses problemas não foram verificados no elemento laminado e, portanto, reduções do custo computacional são possíveis, pois resultados satisfatórios são alcançados com considerável menor número de elementos e graus de liberdade se comparado a uma malha refinada de elementos bidimensionais.

Uma vez que não foram encontradas na literatura aplicações dos elementos laminados para análise não linear geométrica, atrelando a este fato ainda a possibilidade da presente formulação de considerar o carregamento aplicado fora da linha de referência dos elementos, pode-se considerar que os desenvolvimentos apresentados para o elemento posicional laminado são contribuições alcançadas no presente trabalho.

A formulação posicional proposta para o elemento permite considerar uma seção transversal composta por várias lâminas de materiais diferentes, com independência de giro e variação de espessura. Com essa cinemática, a heterogeneidade transversal e o efeito Zig-Zag presente nos laminados são representados. Além disso, é importante ressaltar que a compatibilidade de posição nas interfaces é atendida de forma intrínseca pelas funções de mapeamento posicional empregadas.

Os resultados dos exemplos demonstraram a capacidade do elemento em realizar análises não lineares geométricas em estruturas de vigas constituídas por materiais compósitos laminados com seção transversal fina ou espessa. Distribuições de tensão axial na direção longitudinal e principalmente de tensão axial e de cisalhamento na direção transversal foram representadas com excelente precisão.

A cinemática e o elemento finito propostos são considerados consistentes e eficientes, viabilizando, portanto, futuras expansões para modelos estruturais de casca e para modelagens do processo de falha de laminados por delaminação ou deslizamento.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

AcadView: software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D. Universidade de São Paulo/São Carlos, 2005. Disponível em: < <http://www.set.eesc.usp.br/> >

Ansys® Multiphysics, Version 12.0.1. [S.l]: ANSYS, Inc, 2009.

Bathe, K. J., 1996. *Finite element procedures*. Prentice Hall.

Bonet, J.; Wood, R. D., 2008. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press.

Bonet, J., Wood, R. D., Mahaney, J., Heywood, P., 2000. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 579-595.

Carrera, E., 2002. Theories and Finite Elements for Multilayered Anisotropic, Composite Plates and Shells. *Archives of Computational Methods in Engineering: State of the art reviews*, v. 9, p. 87-140.

Chou, P. C., Pagano, N. J., 1992. *Elasticity: Tensor, dyadic and engineering approaches*. Dover.

Coda, H. B., Paccola, R. R., 2007. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. *Compu-*

tational Mechanics, v. 40, p. 185-200.

Coda, H. B., Paccola, R. R., 2011. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, p. 319-333.

Felippa, C. A., Haugen, B., 2005. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 2285-2335.

Foucard, L., Aryal, A., Duddu, R., Vernerey, F., 2015. A coupled Eulerian–Lagrangian extended finite element formulation for simulating large deformations in hyperelastic media with moving free boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, p. 280-302.

Gadala, M. S., Oravas, G. A., 1984. Numerical solutions of nonlinear problems of continua - I. *Computers & Structures*, v.19, p.865-877.

Ghugal, Y. M., Shimpi, R. P., 2001. A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 20, p. 255-272.

Jones, R. M., 1999. *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis.

Kreja, I., 2011. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Central European Journal of Engineering*, v. 1, p. 59-80.

Moreira, R. A. S., Sousa, R. J. A. de, Valente, R. A. F., 2010. A solid-shell layerwise finite element for non-linear geometric and material analysis. *Composite Structures*, v. 92, p. 1517-1523.

Ogden, R. W., 1984. *Non-linear Elastic Deformation*. Ellis Horwood.

Pascon, J. P., 2012. *Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica*. Tese, Universidade de São Paulo/São Carlos.

Reddy, J. N., 2004. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press.

Sampaio, M. S. M., 2014. *Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras*. Tese, Universidade de São Paulo/São Carlos.

Schulz, M., Filippou, F. C., 2001. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, p. 761-785.

Surana, K. S., 1983. Geometrically non-linear formulation for bidimensional curved beam elements. *Computer & Structures*, v. 17, p. 105-114.