



SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM RESTRIÇÕES DE FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO VIA PSO

José Pedro Gonçalves Carvalho

Érica da Costa Reis Carvalho

Heder Soares Bernardino

Patrícia Habib Hallak

Afonso Celso de Castro Lemonge

jose.carvalho@engenharia.ufjf.br

ericacrcarvalho@gmail.com

heder@ice.ufjf.br

patricia.hallak@ufjf.edu.br

afonso.lemonge@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, MG, Brasil

Resumo. Estratégias de penalização são comumente utilizadas para o tratamento de problemas com restrições. Tais técnicas têm apresentado relativo sucesso quando aplicadas em conjunto com Algoritmos Evolutivos (AEs). Este trabalho apresenta um AE baseado no comportamento de enxame de partículas (Particle Swarm Optimization - PSO) adaptado para a solução de problemas de otimização estrutural com restrições. O PSO é um algoritmo de fácil implementação e competitivo perante aos demais algoritmos populacionais inspirados na natureza. São analisados problemas de otimização de estruturas reticuladas com restrições de frequências de vibração. Para o tratamento destas restrições incorpora-se ao PSO uma técnica de penalização adaptativa (Adaptive Penalty Method - APM), que tem demonstrado robustez e eficiência na grande maioria dos problemas com restrições em que é adotada. O algoritmo proposto é validado através de experimentos computacionais em problemas de otimização estrutural amplamente discutidos na literatura.

Palavras-chave: Otimização por Enxame de Partículas, Método de Penalização Adaptativa, Otimização Estrutural, Restrições de frequência de vibração.

1 INTRODUÇÃO

A otimização é de grande interesse em várias áreas das ciências e do mundo real de uma forma geral. Especialmente, ela tem grande aplicabilidade nas engenharias, possibilitando encontrar soluções que apresentam baixo custo (minimização) e/ou um máximo desempenho (maximização).

Na engenharia estrutural, os recentes avanços tecnológicos aliados ao desenvolvimento de recursos e técnicas computacionais têm permitido o projeto de estruturas cada vez mais arrojadas. Estas estruturas, mais leves e flexíveis que as concebidas no passado, tendem a apresentar comportamento dinâmico quando solicitadas. Dentre as ações que induzem vibrações estruturais, tem-se as ações ambientais corriqueiras, tais como vento, veículos e pedestres. Desta forma, o estudo da dinâmica das estruturas não pode ser desprezado nas modelagens mais complexas que atualmente são mais fidedignas e desejadas. Esforços e deslocamentos provenientes de carregamentos dinâmicos antes negligenciados na análise das estruturas, talvez pela falta de algum tipo de recurso tecnológico ou de conhecimento, agora são de vital importância.

Na otimização estrutural, quando depara-se com projetos que demandam a análise de características dinâmicas, estes aspectos são incluídos na formulação do problema de otimização estrutural. Comumente nos problemas de otimização estrutural define-se uma ou mais funções que representam o custo ou o desempenho que, em sua maioria, são submetidas a restrições. Estas funções são definidas como funções objetivo. Em muitos casos, as restrições limitam deslocamentos, tensões e, no caso de aspectos dinâmicos, por exemplo, frequências naturais de vibrações mínimas.

Para resolver os problemas de otimização são encontrados na literatura vários tipos de algoritmos. Estes podem ser classificados em determinísticos ou probabilísticos. Alguns são razoavelmente eficientes mas de aplicabilidade limitada dependendo do tipo de função objetivo e do tipo de restrições, por exemplo, requerendo que ambas sejam contínuas e diferenciáveis. Por outro lado, os algoritmos inspirados na natureza, entre outras denominações, conhecidos como metaheurísticas bioinspiradas, atingiram um uso expressivo nas últimas décadas. Apesar de serem consideradas de alto custo computacional na análise de problemas, as metaheurísticas inspiradas na natureza são muitas vezes adotadas por causa da larga aplicabilidade e robustez. Alguns exemplos: Algoritmo Genéticos (AGs) (Holland, 1973), Otimização inspirada em Colônia de Formigas (ACO) (Colorni *et al.*, 1992), Otimização por Enxame de Partículas (PSO) (Kennedy & Eberhart, 1995), dentre muitos outros.

Alguns trabalhos podem ser encontrados na literatura em que metaheurísticas são utilizadas para resolver problemas de otimização estrutural levando-se em consideração, entre outros dados, as restrições de frequências naturais de vibração. Em Wei *et al.* (2010) foi utilizado um AG paralelo na otimização dimensional e de forma de treliças com restrições de frequências naturais de vibração. Gomes (2011) fez uso de um PSO em problemas de otimização dimensional e de forma. Zuo *et al.* (2011) utilizaram um método de reanálise de autovalor adaptável para a otimização estrutural com restrições de dinâmica baseada em um AG. Em Kaveh & Zolghadr (2012) é proposta uma hibridização de dois algoritmos, *Charged System Search* e *Big Bang-Big Crunch*, para a solução de problemas de otimização com restrições de frequências naturais de vibração. Em Pholdee & Bureerat (2014) foram estudados problemas de otimização dimensional com restrições de dinâmica com o objetivo de avaliar o desempenho de várias metaheurísticas. Kaveh, & Javadi (2014) compararam nove metaheurísticas para a otimização

de treliças com restrições de frequência naturais de vibração. A otimização dimensional e de forma de estruturas treliçadas é utilizada por Kaveh & Zolghadr (2014) juntamente com várias restrições de frequências utilizando uma estratégia de enxame de partículas e um otimizador *ray*.

Este trabalho tem por objetivo tratar problemas de otimização de treliças planas e espaciais com restrições de frequências naturais de vibração. Estes problemas com restrições são transformados em problemas sem restrições através da introdução de uma função de penalização. Esta penalização é feita através de uma estratégia para tratamento de restrições chamada de APM (*Adaptive Penalty Method*) (Barbosa & Lemonge, 2002). O APM, por sua vez, é acoplado a um PSO e o desempenho do algoritmo é analisado através de testes em problemas de engenharia estrutural encontrados na literatura.

O restante do texto é organizado da seguinte forma: na Seção 2 descreve-se o problema de otimização estrutural, na Seção 3 descreve-se o algoritmo PSO, na Seção 4 apresenta-se a estratégia usada para o tratamento das restrições do problema de otimização estrutural e na Seção 5 os experimentos numéricos são descritos, analisados e comparados. Finalmente, as conclusões e trabalhos futuros são apresentados na Seção 6.

2 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

O problema de otimização estrutural analisado neste trabalho refere-se à otimização dimensional ou de forma, ou ambas ao mesmo tempo, de treliças planas ou espaciais. Ou seja, as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras (otimização dimensional) ou as posições de alguns nós da estrutura (otimização de forma). Como a otimização feita neste trabalho tem como restrições as frequências naturais de vibração f , o problema de otimização é escrito como: Encontrar um conjunto de áreas $\mathbf{a} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ e as coordenadas de alguns nós da estrutura X_i, Y_i, Z_i , que minimize o seu peso W .

$$W(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \rho A_i L_i \quad (1)$$

sujeito às restrições de frequências de vibração normalizadas

$$1 - \frac{f_j}{\bar{f}_k} \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m \quad (2)$$

onde ρ é o peso específico do material, A_i é a área da seção transversal, L_i é o comprimento da i -ésima barra da estrutura, f_j é a j -ésima frequência natural de vibração da estrutura, $\bar{f}_k$ são as k frequências naturais mínimas que a estrutura deve satisfazer, N é o número de barras e m é o número de restrições. Nota-se que L_i pode ter seu valor alterado entre as soluções candidatas quando considera-se otimização de forma.

Para a determinação das frequências naturais de vibração a modelagem da estrutura consiste na associação das matrizes de massa e rigidez dos elementos que a compõem (com seus respectivos dados de entrada - coordenadas dos nós, módulo de elasticidade, peso específico, comprimento e área de cada elemento), formando duas matrizes globais de massa e rigidez.

Dada essa modelagem, as frequências naturais de vibração são obtidas a partir dos autovalores da matriz $[(f_n^2 * M) + K]$, onde M e K são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez da estrutura e f_n são os autovalores correspondentes às n frequências naturais de vibração da estrutura.

3 OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS

O algoritmo de otimização por enxame de partículas, mais conhecido como PSO (*Particle Swarm Optimization*), foi originalmente desenvolvido por Eberhart & Kennedy (1995) a partir de observações feitas no comportamento social de grupos de pássaros. Segundo esta inspiração, os pássaros são considerados partículas em um espaço de busca multidimensional e o objetivo a ser alcançado é um ponto neste espaço, no caso de otimização de funções, o ponto ótimo.

O PSO é um algoritmo populacional e evolutivo. Ele se baseia na atualização das velocidades das partículas ao longo do tempo e esta atualização impacta na modificação do seu posicionamento. Considerando que a velocidade de uma de uma partícula i pode ser representada por v_i e a posição da mesma como sendo x_i . Os vetores de velocidade e posição desta partícula i são armazenados durante o processamento do algoritmo em um tempo t e utilizados para a atualização do enxame no tempo $t + 1$.

A atualização da velocidade v_i e a posição x_i de cada partícula i são apresentados nas Eqs. (3) e (4), respectivamente.

$$v_i(t + 1) = v_i(t) + c_1 \cdot r_1(x_{pbest} - x_i) + c_2 \cdot r_2(x_{gbest} - x_i) \quad (3)$$

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t + 1) \quad (4)$$

onde $v_i(t)$ é a velocidade de cada partícula, t é a iteração atual, c_1 e c_2 são constantes de aceleração para controlar a influência da informação cognitiva e social, respectivamente e r_1 e r_2 são números aleatórios reais entre 0 e 1 com distribuição uniforme. O x_{pbest} é a melhor posição de cada partícula até então e x_{gbest} é a melhor posição entre todas as partículas do enxame. A posição $x_i(t + 1)$ é a posição da partícula na iteração $t + 1$ e $v_i(t + 1)$ é sua velocidade.

O conjunto inicial de partículas x é gerado de forma aleatória no espaço de busca, atendendo aos limites estabelecidos na Eq. (5).

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

onde x_i^L e x_i^U contêm os limites inferiores e superiores das posições das partículas, respectivamente, e n é o número de partículas.

O algoritmo básico de otimização por enxame de partículas pode ser descrito brevemente utilizando os seguintes passos:

1. Inicializar um enxame de partículas (posições) e velocidades aleatoriamente distribuídos dentro do espaço de busca.
2. Calcular a função objetivo.
3. Definir x_{pbest} e x_{gbest} iniciais.
4. Para cada partícula do enxame:
 - Atualizar a velocidade e a posição utilizando as Eqs. (3) e (4).
 - Calcular a função objetivo.
5. Atualizar x_{pbest} e x_{gbest} .
6. Repetir os passos 4 e 5 até que uma condição de parada seja satisfeita.

4 TRATAMENTO DAS RESTRIÇÕES

Funções de penalização têm ocupado uma parte da literatura sobre otimização com restrições por décadas (Smith & Coit, 1995). Elas têm por objetivo aproximar um problema com restrições por um problema sem restrições.

Dentre as várias técnicas de penalização destacam-se as estáticas, as dinâmicas e as adaptativas. Neste trabalho será utilizado uma técnica de penalização adaptativa, na qual os valores dos coeficientes de penalização são adaptados ao longo do processo de evolução.

Em Barbosa & Lemonge (2002) é proposto um método de penalização adaptativa denominado APM (*Adaptive Penalty Method*) para aplicação em problemas com restrições. O APM adapta o valor dos coeficientes de penalização de cada restrição fazendo uso de informações coletadas da população, tais como a média da função objetivo e o nível de violação de cada restrição. A função aptidão é definida como

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é factível} \\ \bar{f}(x) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(x), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

tal que

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) > \langle f(x) \rangle \\ \langle f(x) \rangle, & \text{se } f(x) \leq \langle f(x) \rangle \end{cases} \quad (7)$$

onde $\langle f(x) \rangle$ é a média dos valores da função objetivo da população atual.

O parâmetro de penalização k_j é definido como

$$k_j = |\langle f(x) \rangle| \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{l=1}^m [\langle v_l(x) \rangle]^2} \quad (8)$$

tal que $\langle v_j(x) \rangle$ é o somatório das violações j de todos os indivíduos dividido pelo número de indivíduos da população (factíveis e infactíveis), ou seja, é a média da violação $v_j(x)$.

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os experimentos computacionais foram realizados com o objetivo de testar o PSO juntamente com o APM e compará-lo com outros métodos para a obtenção de soluções para os problemas de otimização com restrições de frequências naturais de vibração existentes na literatura. Os testes envolvem 4 problemas de otimização em engenharia estrutural: treliças planas de 10, 37 e 200 barras e o domo de 52 barras.

O PSO adotado utilizou os seguintes parâmetros: codificação real das variáveis, e c_1 e $c_2 = 2.05$. Para cada problema foi utilizado uma quantidade de partículas diferente: 100 para as treliças de 10, 37 e 52 barras e 150 para a treliça de 200 barras. Os testes foram realizados num total de 50 execuções independente e apenas os indivíduos factíveis foram considerados como solução.

Os resultados dos problemas propostos são apresentados através de tabelas e figuras. As tabelas contêm o *método*, a *melhor* solução, os valores da *mediana*, *média* e o *std* (desvio padrão) e, finalmente, a *pior* solução. Nas tabelas com comparações, os melhores resultados

são destacados em **negrito**. As figuras apresentam uma representação das melhores soluções encontradas para os problemas, sendo que a espessura das linhas é proporcional às áreas das barras encontradas e as cores (se houverem) referem-se ao agrupamento de áreas, ou seja, as barras que contêm a mesma cor têm a mesma área da seção transversal.

5.1 Treliça plana de 10 barras

O primeiro experimento considerado é a treliça de 10 barras plana ilustrada pela Fig. 1. As variáveis de projeto são as áreas da seção transversal dos dez elementos. Em cada nó livre (1-4) é adicionado uma massa não estrutural de 453.6 kg/m³. O material é o alumínio, com módulo de elasticidade $E = 68.95$ GPa e massa específica de 2767.99 kg. As frequências naturais de vibração mínimas são $f_1 \geq 7$ Hz, $f_2 \geq 15$ Hz e $f_3 \geq 20$ Hz. O limite inferior das áreas da seção transversal é 6.4516×10^{-5} m² e o superior 4.0000×10^{-3} m². Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1 e o melhor peso encontrado foi 532.2188 kg. Na Fig. 2 é ilustrado o melhor resultado encontrado para a treliça plana de 10 barras.

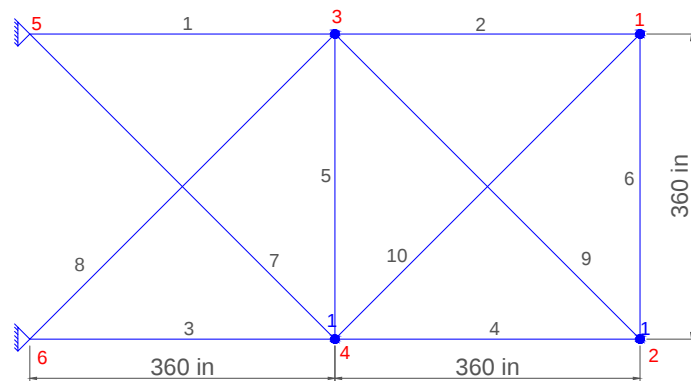


Figura 1: Treliça plana de 10 barras.

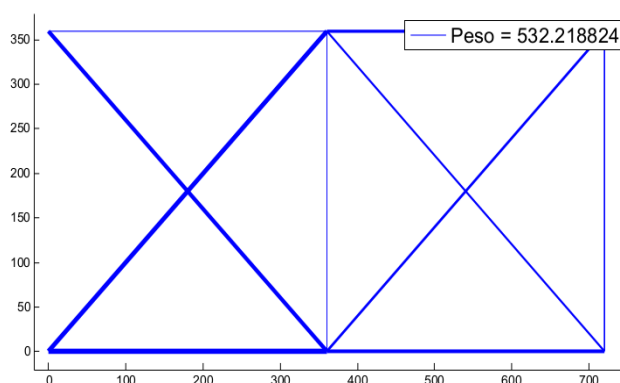


Figura 2: Melhor resultado encontrado aqui para a treliça plana de 10 barras.

5.2 Treliça plana de 37 barras

O segundo experimento é a treliça de 37 barras plana com configuração inicial conforme Fig. 3. Uma massa não estrutural de 10 kg é adicionada em cada nó inferior, que permanece fixa

durante toda a execução. O material é o aço, com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$ e massa específica de 7800 kg/m^3 . A minimização do peso é obtida variando-se dimensionamento e forma da estrutura, havendo simetria dos nós equidistantes do centro da estrutura. As barras inferiores possuem área da seção transversal fixa de $4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e as demais são variáveis de projeto, com limites inferior e superior de $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e $1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, respectivamente. Os nós superiores podem movimentar-se verticalmente entre 0.8 m e 2.0 m de acordo com o referencial adotado na Fig. 4. Dessa maneira, somente cinco variáveis de forma e quatorze variáveis dimensionais são consideradas na otimização. As frequências naturais de vibração mínimas são $f_1 \geq 20 \text{ Hz}$, $f_2 \geq 40 \text{ Hz}$ e $f_3 \geq 60 \text{ Hz}$. Os resultados dessa treliça são apresentados na Tabela 1, que mostra o melhor peso obtido igual a 369.1927 kg. Uma ilustração do melhor resultado encontrado aqui é apresentada na Fig. 4.

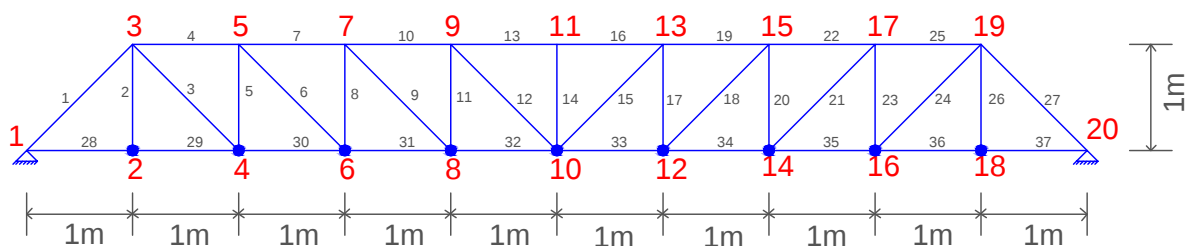


Figura 3: Treliça plana de 37 barras.

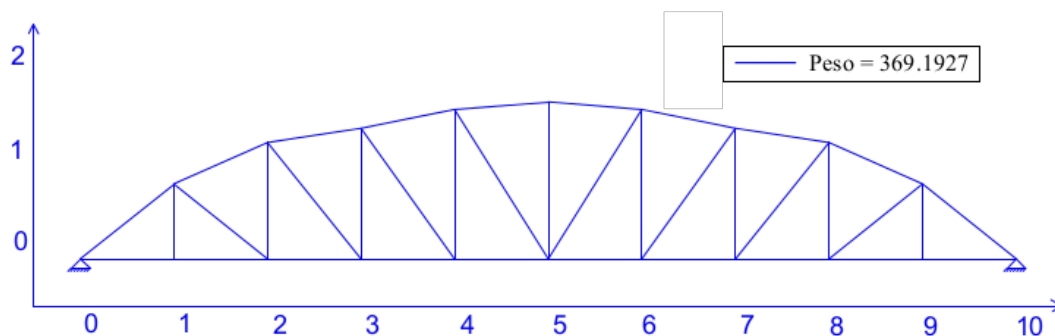


Figura 4: Melhor resultado encontrado aqui para a treliça plana de 37 barras.

5.3 Treliça plana de 200 barras

A Fig. 5 apresenta a treliça de 200 barras plana. Nesse terceiro experimento é adicionado aos nós 1 ao 5 uma massa de 100 kg e somente as áreas da seção transversal são otimizadas. São utilizados 19 grupos de elementos conforme Vu (2015). O material utilizado é o aço, com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$ e massa específica de 7860 kg/m^3 . Os limites inferior e superior das áreas são de, respectivamente, $0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e $30 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Observa-se que a área da seção transversal aumenta gradualmente em grupos de elementos (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14) e (15, 16, 17, 18, 19). Os resultados para essa treliça são apresentados na Tabela 1 com melhor valor final de 3113.7153 kg. A Fig. 6 ilustra o melhor resultado encontrado aqui para a treliça de 200 barras.

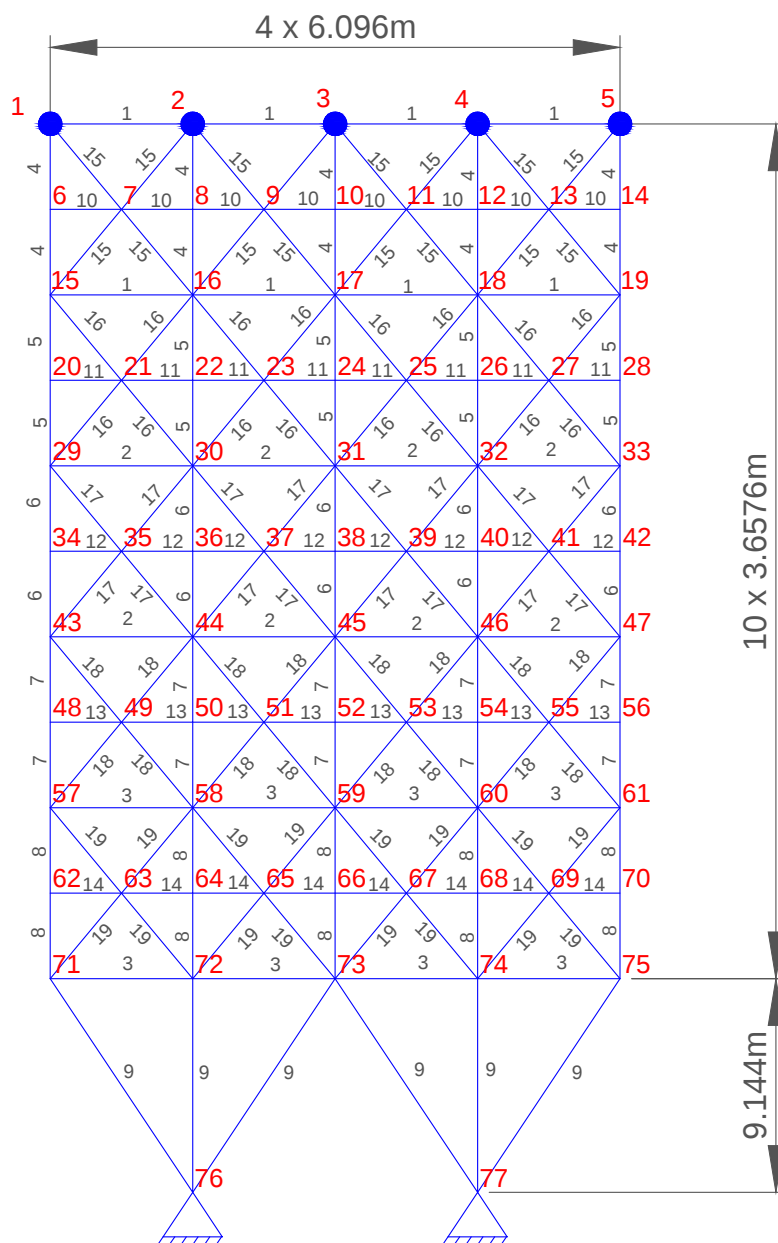


Figura 5: Treliça plana de 200 barras.

5.4 Domo de 52 barras

O domo de 52 barras é o quarto e último experimento e tem configuração inicial conforme as Figs. 7 e 8. Para cada nó livre é adicionado uma massa não-estrutural de 50 kg e o material utilizado é o aço, com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$ e massa específica de 7800 kg/m^3 . Para esse domo também são adotadas variáveis de dimensão e forma. Para as áreas são utilizados 8 grupos de variáveis de projeto conforme a tabela 3 e as posições dos nós livres podem variar $\pm 2.0 \text{ m}$, desde que os nós de cada elevação tenham uma mesma coordenada em z e mantenha-se a simetria no plano xy em relação ao nó 1. Dessa maneira, existem 13 variáveis de projeto independentes, sendo 8 dimensionais e 5 de forma. As frequências naturais de vibração

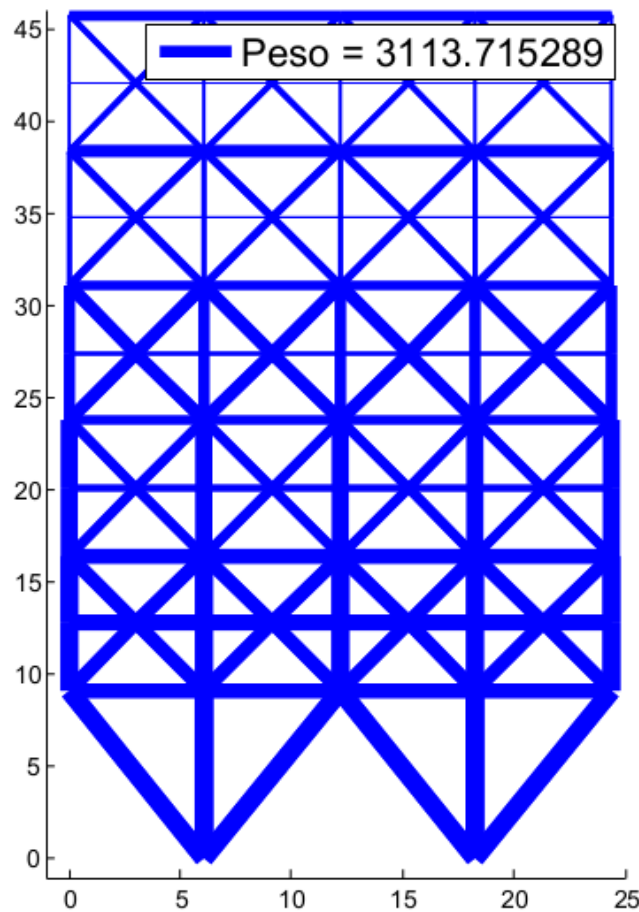


Figura 6: Melhor resultado encontrado aqui para a treliça plana de 200 barras.

mínimas são $f_1 \leq 15.9155$ Hz e $f_2 \geq 28.6479$ Hz. O limite inferior das áreas da seção transversal é de 1×10^{-4} m² e o superior é de 1×10^{-3} m². Os resultados são apresentados na Tabela 1 e a melhor solução para esse problema tem um peso final de 255.3467 kg. As Figuras 9,10 e 11 ilustram o melhor resultado encontrado para o domo de 52 barras.

Tabela 1: Resultados para a treliça plana de 10, 37 e 200 barras e para o domo de 52 barras, onde "na" representa o número de avaliações da função objetivo.

Problema	Melhor	Mediana	Média	Std	Pior	na
Treliça de 10 barras	532.2188	535.9770	537.1714	3.630e+00	544.2149	15000
Treliça de 37 barras	369.1927	383.2521	384.5321	8.850e+00	411.2526	15000
Treliça de 200 barras	3113.7153	4258.8199	4375.9841	9.124e+02	6659.4076	30000
Domo de 52 barras	255.3467	349.1303	350.761287	5.965e+01	502.6799	15000

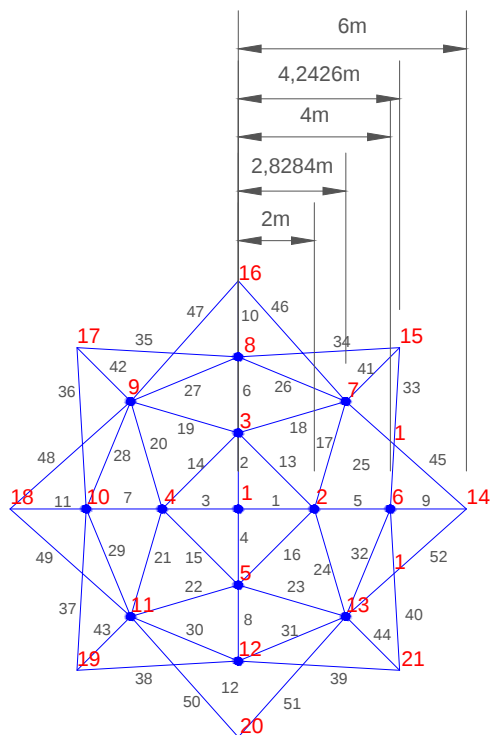


Figura 7: Domo de 52 barras.

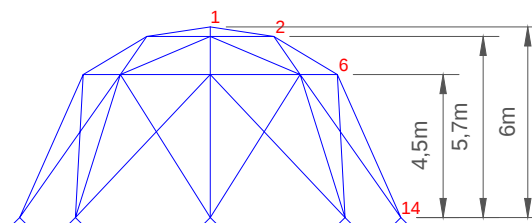


Figura 8: Domo de 52 barras.

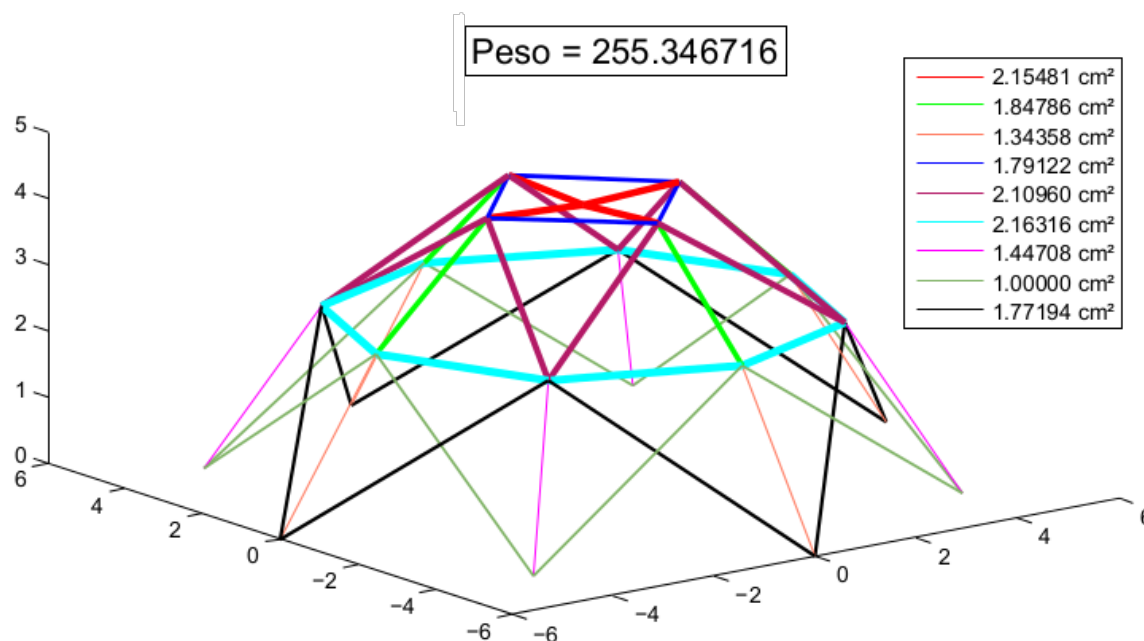


Figura 9: Melhor resultado encontrado aqui para o domo de 52 barras.

5.5 Análise dos resultados

As Tabelas 2 e 3 apresentam uma comparação dos resultados obtidos pelo PSO+APM com alguns resultados de algoritmos encontrados na literatura. Como os resultados obtidos neste artigo são preliminares optou-se por não fazer estudos comparativos extensos com os vários

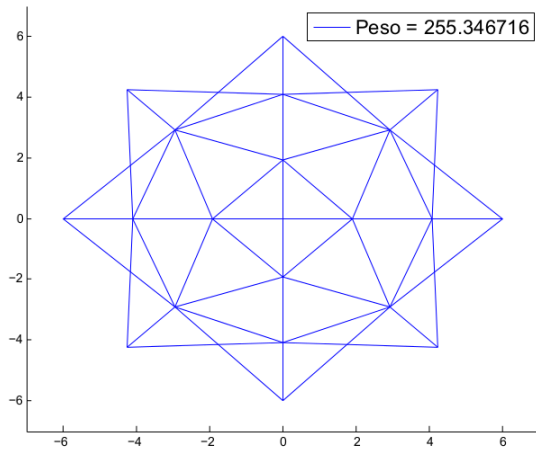


Figura 10: Melhor resultado encontrado aqui para o domo de 52 barras - Plano xy .

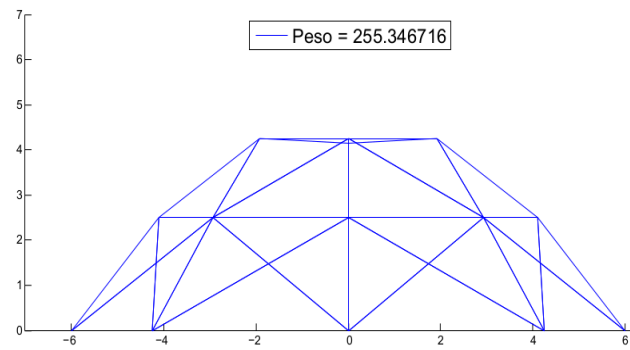


Figura 11: Melhor resultado encontrado aqui para o domo de 52 barras - Plano xz .

resultados disponíveis na literatura. Em cada tabela são apresentadas as variáveis de projeto, as frequências naturais de vibração e o peso final da estrutura.

Os experimentos analisados nesse trabalho (Trelças planas de 10, 37 e 200 barras e Domo de 52 barras) apresentaram peso final da estrutura maiores que os algoritmos da literatura usados para comparação. Pode-se afirmar que o PSO+APM se mostrou bastante competitivo, em particular, para as trelças de 10 e 37 barras. Entretanto, para o Domo de 52 barras e para a Trelça de 200 barras os resultados ainda não são competitivos. Espera-se com ajustes futuros no algoritmo usado neste artigo alcançar um desempenho melhor do mesmo nestes e em outros experimentos a serem analisados em trabalhos futuros.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A otimização dimensional e de forma de estruturas reticuladas é um problema de alto comportamento não-linear devido às diferentes naturezas das variáveis envolvidas e da sensibilidade das frequências de vibração às mudanças na forma das mesmas. O algoritmo proposto pelo presente estudo em associação com o método de penalização utilizado se mostrou competitivo em dois dos exemplos analisados.

Foi adotado aqui um algoritmo de otimização por enxame de partículas padrão, diferentemente dos algoritmos com os quais os resultados encontrados foram comparados. Os experimentos aqui apresentados são comumente conhecidos na literatura e os resultados obtidos podem ser considerados satisfatórios. Conclui-se, portanto, que o método aqui apresentado pode ser utilizado para esse tipo de problema de otimização de maneira satisfatória.

Como trabalhos futuros pretende-se considerar os carregamentos estáticos e advindos do peso próprio da estrutura no problema de otimização. Além disso, uma característica muito atrativa nas configurações estruturais é a possibilidade de buscar melhores agrupamentos de barras, além dos naturais definidos pelas simetrias da estrutura. Assim, pretende-se introduzir restrições de cardinalidade no problema, que limitam o número máximo de tipos/tamanhos diferentes de áreas das seções transversais das barras.

Tabela 2: Melhores resultados para as treliças planas de 10 e 37 barras. HS e FA representam *Harmony Search* e *Firefly Algorithm*, respectivamente, (Miguel & Miguel, 2012). As áreas das seções transversais das barras A_i estão em cm^2 , as coordenadas Y_i dos nós em m e as frequências f_j em Hz.

Treliça de 10 barras			Treliça de 37 barras		
Variáveis	PSO	FA	Variáveis	PSO	HS
A_1	36.7086	36.198	A_1, A_{27}	4.4345	3.2031
A_2	14.5403	14.030	A_2, A_{26}	1.0000	1.1107
A_3	34.9325	34.754	A_3, A_{24}	1.0000	1.1871
A_4	14.8264	14.900	A_4, A_{25}	2.5124	3.3281
A_5	0.6565	0.654	A_5, A_{23}	2.1699	1.4057
A_6	4.6404	4.672	A_6, A_{21}	1.2057	1.0883
A_7	24.0361	23.467	A_7, A_{22}	2.3720	2.1881
A_8	24.4611	25.508	A_8, A_{20}	1.0000	1.2223
A_9	12.1267	12.707	A_9, A_{18}	1.5691	1.7033
A_{10}	12.7952	12.351	A_{10}, A_{19}	4.2249	3.1885
f_1	7.0000	7.0002	A_{11}, A_{17}	1.0000	1.0100
f_2	16.1961	16.1640	A_{12}, A_{15}	2.0277	1.4074
f_3	20.0020	20.0029	A_{13}, A_{16}	3.9947	2.8499
W (kg)	532.22	531.28	A_{14}	1.0000	1.0269
			$Y_{3,19}$	1.2405	1.2409
			$Y_{7,15}$	1.3900	1.4464
			$Y_{9,13}$	1.5909	1.5334
			Y_{11}	1.6736	1.5971
			f_1	21.4651	20.0037
			f_2	41.7247	40.0003
			f_3	61.9832	60.0001
			W (kg)	369.19	360.05

Tabela 3: Melhores resultados para a treliça plana de 200 barras e o domo de 52 barras. DE representa *Differential Evolution* (Vu, 2015). As áreas das seções transversais das barras A_i estão em cm^2 , as coordenadas X_i, Z_i dos nós em m e as frequências f_j em Hz.

Treliça de 200 barras			Domo de 52 barras		
Variáveis	PSO	DE	Variáveis	PSO	DE
A_1	2.2359	0.2789	A_1-A_4	2.15481	1.0000
A_2	1.9635	0.2725	A_5-A_8	1.84786	1.5406
A_3	5.1868	5.7222	A_9-A_{12}	1.34358	1.0889
A_4	0.3938	0.5423	$A_{13}-A_{16}$	1.79122	1.2652
A_5	0.9734	1.4830	$A_{17}-A_{24}$	2.10960	1.0339
A_6	1.9885	3.1676	$A_{25}-A_{32}$	2.16316	1.2461
A_7	6.1509	4.8800	$A_{33}-A_{40}$	1.44708	1.3722
A_8	9.9244	7.9840	$A_{41}-A_{44}$	1.00000	1.0000
A_9	30.0000	18.7813	$A_{45}-A_{52}$	1.77194	1.6035
A_{10}	0.1000	0.1000	Z_1	4.1522	6.0710
A_{11}	0.2711	0.1000	X_2	1.9148	2.6047
A_{12}	0.4265	0.1000	Z_2	4.2433	3.7267
A_{13}	1.3110	0.1000	X_6	4.0975	4.1584
A_{14}	5.7888	0.2326	Z_6	2.5109	2.5000
A_{15}	1.0697	0.8481	f_1	3.6557	15.2070
A_{16}	1.6535	1.2137	f_2	28.6909	28.6487
A_{17}	2.4410	1.6352	W (kg)	255.35	191.28
A_{18}	1.9871	2.0476			
A_{19}	2.4792	4.3721			
f_1	5.0471	5.0004			
f_2	14.3587	12.3446			
f_3	15.9180	15.0018			
W (kg)	3113.72	2296.38			

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências de fomento pelos seguintes apoios CNPq (305175/2013-0 e 305099/2014-0) e FAPEMIG (TEC PPM 528/11, TEC PPM 388/14 e TEC APQ 00103-12).

REFERÊNCIAS

- Barbosa, H. J. C. & Lemonge, A. C. C., An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems. *In GECCO*, vol. 2, pp. 287-294, 2002.
- Barbosa, H. J. C. & Lemonge, A. C. C., An adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. *In Frontiers in Evolutionary Robotics, I-Tech Education, Austria*, v. 34, 2008.
- Barbosa, H. J. C., Bernardino, H. S. & Barreto, A. d. M. S., Using performance profiles to analyze the results of the 2006 CEC constrained optimization competition. *In Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on*, pp. 1-8, 2010.
- Bernardino, H. S., Barbosa, H. J. C. & Fonseca, L. G., Surrogate-assisted clonal selection algorithm for expensive optimization problems. *Evolutionary Intelligence*, vol. 4, n. 2, pp. 81-97, 2011.
- Coloni, A. and Dorigo, M. and Maniezzo, V., Distributed optimization by ant colonies, *Proceedings of the first European conference on artificial life*, vol. 142, pp. 134-142, Paris, France, 1991.
- Eberhart, R. & Kennedy, J., A new optimizer using particle swarm theory. In Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95., *Proceedings of the Sixth International Symposium on*, pp. 39-43, 1995.
- Gomes, H. M., Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm, *In Expert Systems with Applications, Elsevier*, vol. 38, n.1, pp. 957-968, 2011.
- Holland, J. H., Genetic algorithms and the optimal allocation of trials, *SIAM Journal on Computing*, vol. 2, n. 2, pp. 88-105, 1973.
- Karaboga, D., An idea based on honey bee swarm for numerical optimization. *Techn. Rep. TR06, Erciyes Univ. Press, Erciyes*
- Kaveh, A. & Javadi, S. M., Shape and size optimization of trusses with multiple frequency constraints using harmony search and ray optimizer for enhancing the particle swarm optimization algorithm, *In Acta Mechanica, Springer*, vol. 225, n. 6, pp. 1595-1605, 2014.
- Kaveh, A. & Zolghadr, A., Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability, *Computers & Structures, Elsevier*, vol. 102, pp. 14-27, 2012.
- Kaveh, A. & Zolghadr, A., Comparison of nine meta-heuristic algorithms for optimal design of truss structures with frequency constraints, *Advances in Engineering Software, Elsevier*, vol. 76, pp. 9-30, 2014.
- Miguel, L. F. F. & Miguel, L. F. F., Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. *Expert Systems with Applications, Elsevier*, vol. 39, n. 10, pp. 9458-9467, 2012.

Pholdee, N. & Bureerat, S., Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints, *In Advances in Engineering Software, Elsevier*, vol. 75, pp 1-13, 2014.

Smith, A. E. Coit, D. W., Penalty functions. *In Handbook of Evolutionary Computation. A Joint Publication of Oxford University Press and Institute of Physics*, vol. 97, n. 1, pp. C5, 1995.

Vu, T. V., Weight Minimization of Trusses with Natural Frequency Constraints. *In 11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015.

Zuo, W, Xu, T., Zhang, H. & Xu, T., Fast structural optimization with frequency constraints by genetic algorithm using adaptive eigenvalue reanalysis methods, *In Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer*, vol. 43, n. 6, pp. 799-810, 2011.

Wei, L., Tang, T., Xie, X. & Shen, W., Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on parallel genetic algorithm, *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer*, vol. 43, n. 5, pp. 665-682, 2010.