



INTERAÇÃO FLUIDO-CASCA COM ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Jeferson Wilian Dossa Fernandes

Rodolfo André Kuche Sanches

jefersondossa@usp.br

rodolfo.sanches@usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo - EESC/USP

Av. Trabalhador Sãocarlense, 400, CEP 13566-590, São Carlos, SP, Brasil

Resumo. Dentre os problemas de interação fluido-estrutura encontrados na engenharia, grande parte compreende escoamentos incompressíveis, tal como a ação de vento sobre edifícios, as marés sobre estruturas offshore e até mesmo em escoamentos cardiovasculares. O tratamento matemático do problema, no entanto, é de grande complexidade por envolver três diferentes assuntos: a dinâmica das estruturas computacional, a dinâmica dos fluidos computacional, e o problema de acoplamento. No caso da dinâmica das estruturas, é importante que a formulação empregada compreenda os efeitos de não linearidade geométrica, muitas vezes manifestados nos problemas de IFE. Para tanto, propõe-se uma abordagem Lagrangeana total, com base no método dos elementos finitos (MEF) posicional, livre de rotações como graus de liberdade. Isso evita a necessidade de aproximações de grandes rotações, resultando em matriz de massa constante e permitindo o uso do integrador temporal de Newmark de forma estável mesmo para problemas com grandes deslocamentos. Quanto à dinâmica dos fluidos computacional, o escoamento é considerado incompressível, isotérmico e Newtoniano. É utilizado um elemento finito misto, respeitando a condição LBB e com a aplicação do processo Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) para a obtenção de uma solução fraca estabilizada. De modo a respeitar as variações geométricas dos domínios, o fluido é descrito na forma Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE). Emprega-se um modelo particionado de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann. Por fim, obtém-se resultados satisfatórios quanto ao acoplamento particionado, que mesmo explícito se aproxima dos resultados implícitos disponíveis em literatura.

Palavras-chave: Interação Fluido-Casca, Escoamento incompressível, Descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária, Acoplamento Particionado.

1 INTRODUÇÃO

Problemas de interação fluido-estrutura (IFE) estão presentes nas mais diversas áreas da engenharia. Na engenharia civil, por exemplo, tem-se a ação do vento sobre estruturas, escoamentos em canais e vertedores, a água interagindo com barragens e estruturas *offshore*, entre outros. Sua aplicação estende-se também à engenharia aeronáutica, hidráulica e até mesmo à bioengenharia, onde destacam-se os efeitos de IFE nos escoamentos cardiovasculares. Em todos os casos supracitados, têm-se escoamentos com baixo número de Mach, isto é, incompressíveis.

Além de sua importância e ampla aplicabilidade, os problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE) ainda demandam conhecimento de 3 diferentes tópicos: a mecânica dos sólidos computacional, a mecânica dos fluidos computacional e o problema de acoplamento.

Em muitos casos, os problemas de IFE avaliam a estabilidade dinâmica de estruturas, fenômenos que podem desenvolver grandes deslocamentos, demandando análises não lineares. Muitas formulações Lagrangeanas foram e vêm sendo propostas para a análise não linear geométrica de estruturas de casca através do MEF, como por exemplo os trabalhos de Hughes & Carnoy (1983), Hughes & Liu (1981a), Hughes & Liu (1981b) e Brendel & Ramm (1980).

Neste trabalho, aborda-se o problema de dinâmica de cascas através do método dos elementos finitos posicional. Motivada pelo trabalho de Bonet *et al.* (2000) e introduzida por Coda (2003) no contexto de estruturas de barras espessas, a formulação posicional tem como base uma cinemática geometricamente exata, que contempla intrinsecamente os efeitos de não linearidade geométrica. Além disso, estudos recentes como os de Coda & Paccola (2007), Coda (2009a), Coda (2009b), Sanches (2011) e Sanches & Coda (2013), têm desenvolvido e descrito melhorias no elemento de casca em formulação posicional aplicando-o a problemas dinâmicos.

Os problemas de dinâmica das estruturas caracterizam-se por possuírem deformações finitas. Isso faz com que a estrutura seja representada mais adequadamente em uma descrição Lagrangeana, tendo como incógnitas principais os deslocamentos ou posições. Por outro lado, os fluidos em geral não apresentam resistência às tensões tangenciais, podendo se deformar indefinidamente. Desse modo, uma formulação Euleriana, com velocidades como variáveis principais torna-se mais adequada para a maior parte dos problemas. Tais particularidades implicam na necessidade de se acoplar duas descrições matemáticas diferentes. Uma estratégia bastante difundida é a resolução do fluido empregando a descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária (ALE), onde o domínio físico (computacional) pode se mover arbitrariamente e independentemente do movimento da partícula do fluido (Donea *et al.* , 1982).

Em dinâmica dos fluidos, à medida que se aumenta a viscosidade do fluido e se diminui a velocidade do escoamento, tem-se um problema cada vez mais linear. Ao contrário, os termos não lineares, ou convectivos, se tornam significativos e podem gerar variações espúrias nos resultados. Esse problema é reduzido com o refinamento da malha. Entretanto, um método numérico eficiente deve ser capaz de tratar o problema de forma estável mesmo em uma malha pouco refinada. Para contornar esse problema, a alternativa adotada neste trabalho é o emprego de uma das metodologias mais difundidas na literatura, proposta por Brooks & Hughes (1982), o *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* - SUPG.

Em se tratando de problemas incompressíveis, para a formulação mista adotada não é possível realizar interpolação de mesma ordem para as variáveis do problema (pressão e velocidades) sem que hajam problemas de estabilidade. Tal restrição é denominada condição de Babuska-

Brezzi (Zienkiewicz & Taylor, 2000a; Chung, 2002). Assim, é empregado um elemento finito misto com interpolação quadrática para a velocidade e linear para a pressão.

Adota-se também um método de acoplamento particionado no esquema clássico (Dirichlet-Neumann). Nele, as equações governantes do fluido e da estrutura são integradas no tempo separadamente e as condições de contorno transferidas de um meio para o outro: condições de Dirichlet do fluido, obtidas a partir dos deslocamentos do sólido; condições de Neumann para a estrutura, obtidas a partir da pressão e tensões desviadoras do fluido.

2 DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE CASCA

Cascas são elementos estruturais espaciais com duas dimensões preponderantes na direção da superfície média, e sua aplicação se estende desde coberturas abobadadas até estruturas aeroespaciais. Do ponto de vista mecânico e, mais especificamente, no âmbito do MEF, sua representação cinemática é realizada tomando-se as posições da superfície média da casca na configurações inicial X e atual Y da estrutura, além de um espaço adimensional, de acordo com a Fig. 1.

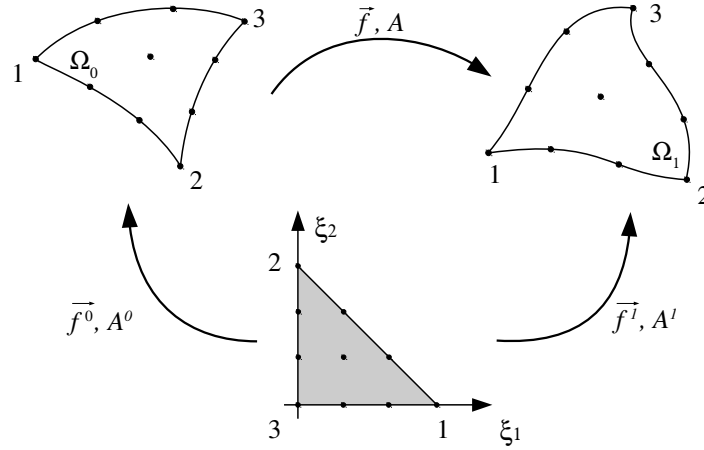


Figura 1: Cinemática do MEF posicional.

De acordo com o procedimento proposto por Coda & Paccola (2007), para um elemento finito de casca com aproximação cúbica e 7 graus de liberdade por nó (3 posições Y_{ji} , 3 componentes de um vetor generalizado $\bar{G}_{ij}$ e a taxa de deformação ao longo da espessura a) as configurações Ω_0 e Ω_1 são mapeadas no espaço adimensional por:

$$f_i^0 = N_j(\xi_1, \xi_2)X_{ji} + \frac{h_0}{2}\xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2)e_{ij}^0, \quad (1)$$

$$f_i^1 = N_j(\xi_1, \xi_2)Y_{ji} + \frac{h_0}{2}[\xi_3 + N_j(\xi_1, \xi_2)a_j\xi_3^2]N_j(\xi_1, \xi_2)\bar{G}_{ij}, \quad (2)$$

em que h_0 é a espessura inicial e e_i^0 é a i -ésima componente do vetor e^0 , normal à superfície média na configuração inicial.

Assim, é possível representar a função de mapeamento $\vec{f}$ como a aplicação linear de $\vec{f}^1$ sobre a imagem de $(\vec{f}^0)^{-1}$:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1}. \quad (3)$$

Analogamente, para o gradiente do mapeamento f tem-se:

$$A = \nabla \vec{f} = A^1(A^0)^{-1}. \quad (4)$$

Trabalhando algebricamente, é possível expressar a deformação de Green em função de A :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}), \quad (5)$$

em que C_{ij} é o alongamento à direita de Cauchy-Green e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Adotando-se a relação constitutiva linear de Saint-Venant-Kirchhoff, tem-se a energia específica de deformação definida por:

$$u_e = \frac{1}{2}E_{ij}S_{ij} \quad (6)$$

em que S_{ij} é o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, escrito como:

$$S_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}E_{kl}, \quad (7)$$

em que $\mathbb{C}$ é o tensor constitutivo que relacionado às constantes elásticas do material.

Para determinar o equilíbrio dinâmico da casca, utiliza-se o princípio da energia potencial estacionária. Após escrever o funcional de energia e aplicar as regras de minimização, tem-se o equilíbrio dinâmico definido por:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{F} + \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

em que $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ são denominadas matrizes de massa e amortecimento, respectivamente, $\mathbf{F}$ é o vetor das forças externas e o ponto acima da variável denota sua derivada com relação ao tempo.

Para o avanço no tempo, opta-se por uma integração implícita através do método Newmark- β . Embora não apresente bons resultados para outras formulações não-lineares geométricas, Sanches & Coda (2013) mostram que para uma descrição Lagrangeana total, sem rotação como grau de liberdade, como é o caso deste trabalho, este método apresenta bons resultados para a maioria das situações admitindo-se aceleração constante no intervalo de um passo de tempo ($\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$). Desse modo, a aplicação do método de Newmark à Eq. 8 resulta na expressão dada por:

$$\left. \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{t+1} - \mathbf{F}_{t+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{t+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_t + \mathbf{C} \mathbf{R}_t + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{t+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_t = \mathbf{0}, \quad (9)$$

com $\mathbf{Q}_t = \frac{\mathbf{Y}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_t$ e $\mathbf{R}_t = \dot{\mathbf{Y}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_t$.

Por se tratar de uma equação claramente não linear a Eq. 9 é resolvida utilizando o método iterativo de Newton-Raphson.

3 DINÂMICA DOS FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

Um escoamento é definido como isotérmico e incompressível quando não existem variações significativas de temperatura e massa específica do fluido ao longo do tempo, respectivamente. Nestes casos, o comportamento dinâmico de um fluido num referencial Euleriano é descrito através das equações de conservação da massa e do *momentum*:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \rho g_i - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (11)$$

em que u_i é a componente de velocidade na direção x_i , t é o tempo, g_i são as forças de domínio e ρ é a massa específica e μ a viscosidade dinâmica do fluido.

Nos problemas de Interação Fluido-Estrutura, no entanto, a formulação deve ser capaz de contemplar as movimentações que ocorrem na região de interface com a estrutura. Tal fenômeno é contemplado com a introdução de uma abordagem Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE) às equações governantes, proposta inicialmente por Donea *et al.* (1982).

Para compreendê-la tomam-se, de acordo com a Fig. 2, três domínios: os contínuos nos tempos inicial e final da análise e um domínio de referência, $C(t_0)$, $C(t)$ e $R(t)$, respectivamente.

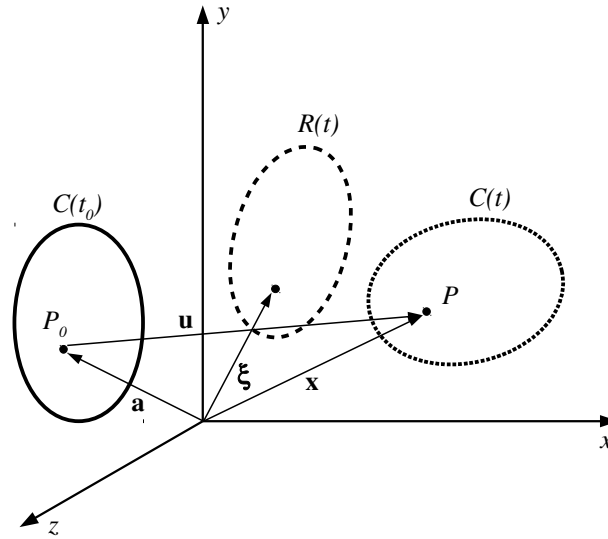


Figura 2: Cinemática da descrição ALE.

A descrição ALE é introduzida ao se relacionar a configuração atual, isto é, o domínio de referência com o contínuo no tempo inicial. Este mapeamento é realizado através do Jacobiano (J) da mudança de configuração, dado por:

$$J = \det(A), \text{ em que } A_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}. \quad (12)$$

Lançando mão de manipulações algébricas (ver Donea *et al.* (1982)), é possível ainda obter a expressão que relaciona a variação de J com o tempo:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \omega, \quad (13)$$

em que ω denota a velocidade de movimentação da malha.

Seja uma propriedade física qualquer $g(\xi_i, t)$ na configuração de referência, igual a $G(a_i, t)$ na configuração inicial. Aplicando a regra da cadeia, pode-se representar a variação de G com

o tempo da seguinte forma:

$$\frac{\partial G(a_i, t)}{\partial t} = \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial t} \bigg|_{\xi} + \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t}. \quad (14)$$

Considerando que a velocidade da malha pode ser escrita como $\omega_i = \partial \xi_i / \partial t$, além das relações de diferenciação para $\nabla \cdot (g\omega)$ e a Eq. 13, pode-se reescrever a Eq. 14 como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(JG) = J \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot (g\omega) \right]. \quad (15)$$

Substituindo g por ρ e levando em consideração as Eq. 13 e 14, as equações governantes são finalmente reescritas:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \rho g_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \rho \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (17)$$

Como pode-se observar, quando a velocidade da malha ω_j for igual à zero, a equação 17 retorna à descrição Euleriana. Em contrapartida, para $\omega_j = u_j$, tem-se a descrição Lagrangeana.

3.1 Discretização espacial pelo MEF

A obtenção de uma formulação com base no MEF pode ser alcançada aplicando-se um método de resíduos ponderados qualquer diretamente às equações governantes. Uma alternativa simples é o emprego do Método de Galerkin (ou Bubnov-Galerkin), por exemplo, que propõe o uso de funções aproximadoras iguais às ponderadoras.

Deste modo, aplicando-se a regra de integração por partes às Eq.16 e 17 e o teorema da divergência de Gauss, obtém-se:

$$- \left[\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} d\Omega \right] \mathbf{u}_i = 0, \quad (18)$$

$$\left[\int_{\Omega} \rho \Psi \Psi^T d\Omega \right] \dot{\mathbf{u}}_i + \left[\int_{\Omega} \rho \Psi \Psi^T (u_j - \omega_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega \right] \mathbf{u}_i + \left[\int_{\Omega} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} d\Omega \right] \mathbf{u}_j \quad (19)$$

$$- \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T d\Omega \right] \mathbf{p} = \left[\int_{\Omega} \rho \Psi g_i d\Omega \right] + \left[\int_{\Gamma} f_i \Phi d\Gamma \right], \quad (20)$$

em que Φ e Ψ representam as funções aproximadoras para os respectivos campos de pressão e velocidade, f_i é a força de superfície atuante nos contornos do domínio computacional e $\dot{\mathbf{u}}$ denota a derivada de $\mathbf{u}$ com relação ao tempo.

Combinando as Eq. 18 e 20, o sistema de equações resultante pode ser representado matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}(\omega) & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

ou numa notação simbólica:

$$\overline{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \overline{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{U} = \overline{\mathbf{F}}, \quad (22)$$

com $\dot{\mathbf{U}} = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_3, \dot{\mathbf{p}}\}^T$ e $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{p}\}^T$.

Na Eq. 21, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{K}$ correspondem, respectivamente, às parcelas de massa, convecção (ou advecção) e viscosidade (ou difusão) e $\mathbf{Q}$ carrega os termos referentes à pressão. $\mathbf{C}(\boldsymbol{\omega})$ se refere ao termo adicional advindo da descrição ALE e $\mathbf{F}$ compreende as forças externas aplicadas ao fluido.

Segundo Donea & Huerta (2003), a matriz $\mathbf{Q}$ é positiva-definida somente se $\ker(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{0}\}$. Caso isso ocorra, a matriz $\bar{\mathbf{K}}$ é não-singular e leva a uma solução única e estável para os campos de velocidade e pressão. Caso contrário, pode-se até obter um campo estável para a velocidade, porém oscilatória e com variações espúrias para a pressão. Isso leva à condição de estabilidade de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, ou LBB, fazendo com que a escolha do elemento finito a ser utilizado não seja arbitrária. Deste modo, trabalhos como os de Zienkiewicz & Taylor (2000b) e Donea & Huerta (2003) demonstram que elementos tetraédricos com aproximação quadrática para a velocidade e linear para a pressão, adotados neste trabalho, apresentam solução estável e satisfazem a condição LBB.

Um problema que se pode enfrentar ao simular problemas da mecânica dos fluidos é a convecção dominante, que se torna importante com o acréscimo de velocidade ou decréscimo de viscosidade. O Método de Galerkin, por sua vez, não é capaz de neutralizar satisfatoriamente as variações espúrias decorrentes da não linearidade deste tipo de escoamento. Assim, o emprego de métodos de estabilização como o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG), se faz necessário. Nele, adiciona-se uma viscosidade artificial atuante na direção da velocidade, capaz de controlar a magnitude dos termos convectivos neste sentido.

Em termos práticos, o resíduo da Eq. 17 é calculado e ponderado por um fator τ_{SUPG} , determinado segundo Basilevs *et al.* (2013):

$$\tau_{SUPG} = \left(\frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

em que

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{i=1}^{n_{en}} |\mathbf{u} \cdot \nabla \Psi_i| \right)^{-1}, \quad \tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad \tau_{SUGN3} = \frac{\rho h_{RGN}^2}{4\mu}, \quad (24)$$

$$h_{RGN} = 2 \left(\sum_{i=1}^{n_{en}} |\mathbf{r} \cdot \nabla \Psi_i| \right)^{-1}, \quad \mathbf{r} = \frac{\nabla |\mathbf{u}|}{\|\nabla |\mathbf{u}|\|}, \quad (25)$$

e Δt é o incremento de tempo.

3.2 Integração temporal

Para o avanço discreto no tempo, emprega-se um método implícito de primeira ordem do tipo preditor-corretor. Tal procedimento consiste na aplicação direta do método de Euler à Eq. 22:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{U}^{n+1}) \right] \mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U}^n + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^{n+1}), \quad (26)$$

onde $\mathbf{U}^n$ e $\mathbf{U}^{n+1}$ são, respectivamente, os vetores que contêm as velocidades e pressões dos passos de tempo anterior e atual.

Devido à não linearidade da Eq. 26, a busca pelo valor de $\mathbf{U}^{n+1}$ deve ser realizada de forma iterativa e progressiva, tendo sido novamente empregado o método de Newton-Raphson.

Para um passo de tempo qualquer, calcula-se um vetor preditor da solução que tem por objetivo a redução no número de iterações necessárias para a convergência, definido por:

$$\mathbf{U}_p^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{U}}^n - \dot{\mathbf{U}}^{n-1}) \quad (27)$$

Em seguida, a solução real é obtida a partir da Eq. 26. Por fim, o vetor de acelerações é atualizado através da Eq. 28 e o processo reinicia com o cálculo de um novo preditor para o passo de tempo seguinte.

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - \dot{\mathbf{U}}^n. \quad (28)$$

4 ACOPLAMENTO FLUIDO-CASCA PARTICIONADO

Um dos desafios enfrentados na análise numérica de problemas de IFE é a compatibilização dos deslocamentos, velocidades (condições de Dirichlet) e das forças (condições de Neumann) na interface entre os domínios. Para realizar esse acoplamento, duas abordagens são amplamente difundidas na literatura: monolítica e particionada. Na primeira, o movimento do sólido e do fluido, além da interação e compatibilidade entre os meios é efetuada em uma única formulação, tratando ambos os meios como uma única entidade. Apesar de ser muito robusto, tem-se a desvantagem de que o método é computacionalmente mais caro em comparação com o modelo particionado, sendo considerado muitas vezes inviável para problemas de larga escala (Heil *et al.*, 2008).

O modelo de acoplamento particionado, por sua vez, apresenta maior versatilidade pois permite que a solução para cada meio seja obtida de forma independente. No seu esquema clássico (Dirichlet-Neumann), a cada passo de tempo inicialmente a malha é rearranjada com base na movimentação da estrutura. Em seguida, a solução para o fluido é obtida deslocamento do sólido, que por fim é recalculado aplicando-se as tensões obtidas para o fluido na interface (Teixeira & Awruch, 2005).

4.1 Transferência de velocidades e forças

Na metodologia adotada, não é necessário que haja coincidência entre os nós do fluido e os nós da estrutura. Como a discretização espacial do problema é realizada independentemente, na região de interface, é efetuada uma busca pelos pontos Ps_i que devem ser atados aos nós i do fluido. Analogamente para os nós da estrutura, repete-se o procedimento para determinar a relação entre cada nó k da estrutura e seu respectivo ponto Pf_k localizado no contorno do fluido, como ilustra a Fig. 3.

Desse modo, as condições de Dirichlet para um nó i são obtidas do ponto Ps_i da casca. Assim, para um escoamento viscoso, tem-se $\mathbf{u}_f(i) = \mathbf{u}_s(Ps_i)$ e para escoamentos invíscidos:

$$\mathbf{u}_f(i) = \mathbf{u}_f(i) + [(\mathbf{u}_s(Ps_i) - \mathbf{u}_f(i)) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad (29)$$

onde que $\mathbf{u}_f$ é a velocidade do fluido, $\mathbf{u}_s$ é a velocidade da casca e $\mathbf{n}$ é o vetor normal à interface Γ_s .

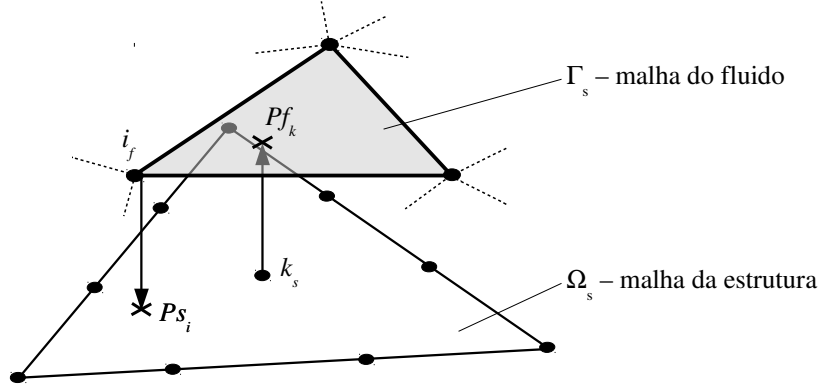


Figura 3: Esquema de acoplamento particionado fraco.

Já as condições de contorno de Neumann no nó k são obtidas no ponto Pf_k pela seguinte expressão:

$$q_{kj} = [\tau_{jl}n_l - pn_l]_{Pf_k} \quad (30)$$

em que j e l representam as direções Cartesianas e n_l são as componentes do vetor $\mathbf{n}$.

4.2 Movimentação da malha

Ao estudar problemas de IFE, é importante que seja dada atenção às mudanças geométricas que o domínio do fluido sofre na região de interface em decorrência dos deslocamentos desenvolvidos pela estrutura. Um bom método para realizar essa movimentação deve ser capaz de fazê-la sem que hajam grandes distorções nos elementos, preservando a qualidade da discretização inicial. Uma relação que atende bem a esses requisitos é a equação de Laplace.

Kanchi & Masud (2007) propõem que o campo de deslocamentos do domínio computacional (d) seja realizada por meio de uma suavização Laplaciana (*Laplacian smoothing*) ponderada por um fator η :

$$\nabla \cdot [(1 + \eta)\nabla]\mathbf{d} = 0, \text{ com } \mathbf{d} = \mathbf{y} \text{ em } \Gamma^{sf} \text{ e } \mathbf{d} = \mathbf{0} \text{ nos demais contornos de } \Omega^f. \quad (31)$$

O emprego de η tem como objetivo reduzir a distorção dos elementos próximos a Γ^{sf} , que normalmente é a região de maior refinamento. Isso é alcançado através da Eq. 32, que provê uma rigidez adicional aos elementos inversamente proporcional ao seu tamanho relativo na malha:

$$\eta^e = \frac{1 - V_{\min}/V_{\max}}{V^e/V_{\max}}, \quad (32)$$

em que $V_{\min}$, $V_{\max}$ e V^e são, respectivamente, os volumes do menor, maior e do elemento em questão.

4.3 Processo de acoplamento

Como mencionado anteriormente, o método de acoplamento particionado possui diversas vantagens, como a resolução dos problemas físicos separadamente. O acoplamento fraco através de condições Dirichlet-Neumann explícito empregado neste trabalho é executado de acordo com o esquema ilustrado na figura 4.

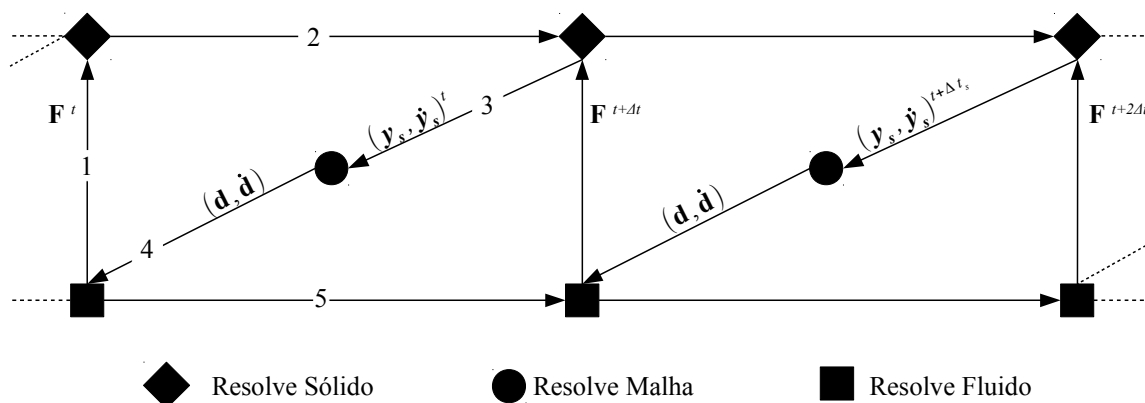


Figura 4: Esquema de acoplamento particionado fraco.

Para um determinado passo de tempo t , a integração temporal ocorre de acordo com os seguintes passos:

1. As tensões viscosas e pressões provenientes da análise do fluido são calculadas ($\mathbf{F}^t$) e aplicadas à estrutura;
2. A estrutura avança no tempo;
3. Uma nova configuração para a malha do fluido é calculada com base nas novas posições ($\mathbf{y}_s$) e velocidades ($\dot{\mathbf{y}}_s$) da estrutura;
4. Com as malhas atualizadas, uma nova resposta para o fluido é calculada;
5. O fluido avança no tempo e voltamos ao passo 1 até que o tempo final da análise seja alcançado.

5 RESULTADOS

Para verificar o desempenho da metodologia proposta, escolheu-se como exemplo uma cavidade quadrada com base flexível, ilustrada na Fig. 5. Este exemplo se mostra interessante por permitir avaliar o algoritmo de acoplamento particionado através da comparação com resultados confiáveis disponíveis na literatura, bem como pela estrutura desenvolver grandes deslocamentos.

As propriedades físicas do problema são adimensionalizadas e adotadas iguais às de Fernández *et al.* (2013) e Wall (1999). Para o fluido, tem-se $\rho_f = 1,0$ e $\mu = 0,01$. Já a estrutura possui massa específica $\rho_s = 500$, módulo de elasticidade longitudinal $E = 250$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$ e espessura $e = 0,002$. Além disso, utilizou-se um valor de $\Delta t = 0,1$ com tempo total de análise igual a 45.

O problema em si consiste numa massa de fluido confinada em um recipiente quadrado com paredes laterais rígidas e base flexível. As paredes possuem condição de não escorregamento e tem altura de 0,9. Na superfície superior do fluido, é prescrita uma velocidade tangencial $u(t) = 1 - \cos(0,4\pi t)$. A simulação tridimensional é ainda realizada considerando-se condições de simetria nas faces perpendiculares ao eixo z . A estrutura, por sua vez, é considerada engastada

nas paredes rígidas. Por fim, é também aplicado o valor de pressão relativa igual à zero no ponto B .

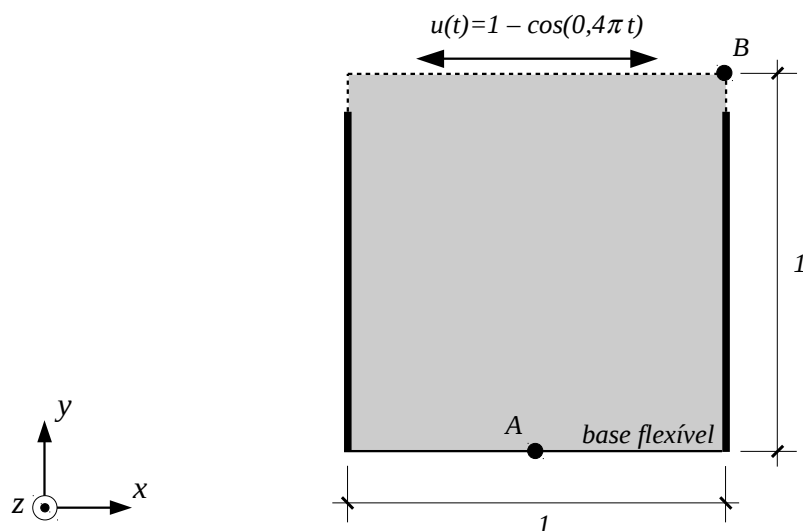


Figura 5: Geometria do exemplo de cavidade quadrada com base flexível.

São apresentadas aqui simulações com três diferentes discretizações para o domínio do fluido, exibidas na Fig. 6, sendo os dados referentes a cada malha apresentados na Tab. 1. Para a estrutura, adotou-se uma única malha com 40 elementos e 244 nós em todas as análises.

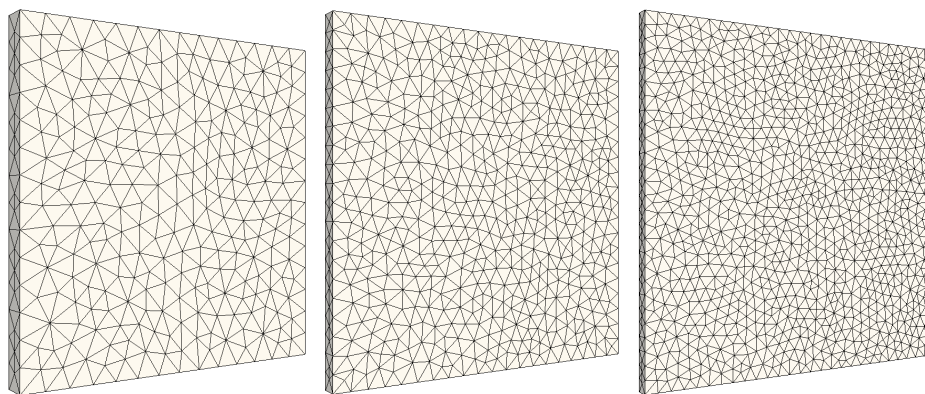


Figura 6: Vista em perspectiva das malhas 1, 2 e 3.

Tabela 1: Características das malhas de elementos finitos utilizadas nas análises

Malha	Número de elementos	Nós para pressão	Nós para velocidade
1	1844	632	3737
2	3810	1217	7457
3	6698	2126	13073

Assim, a Fig. 7 mostra o comportamento observado em deslocamento vertical no ponto A ao longo do tempo para cada caso, bem como sua comparação com os resultados obtidos por Fernández *et al.* (2013) e Wall (1999).

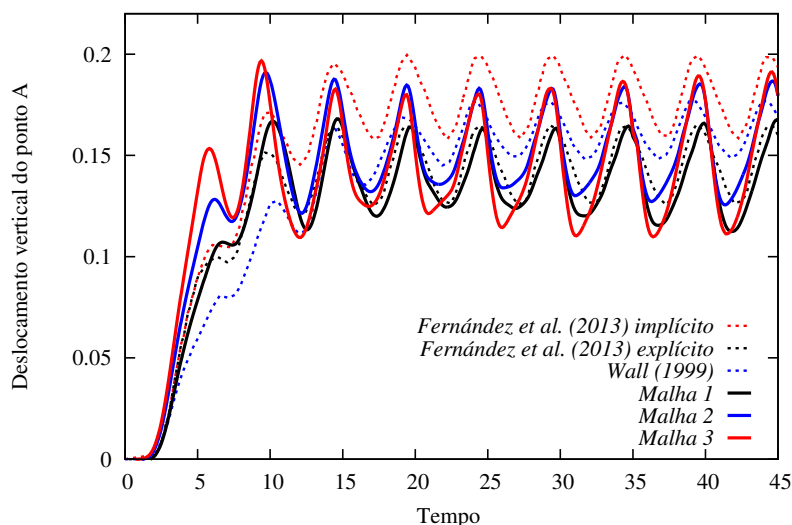


Figura 7: Linhas de corrente e pressão para os tempos $t=5, 10, 16$ e 24 (da esquerda para a direita e de cima para baixo).

Como pode-se perceber, no caso da malha 1, o resultado se aproxima do obtido por Fernández *et al.* (2013) ao utilizar um esquema de acoplamento explícito sem extrapolação. À medida que se aumenta o refinamento da malha, observa-se que o deslocamento aproxima-se mais do resultado implícito obtido pelo mesmo autor.

Tal variação pode ser atribuída, por exemplo, ao fato de se utilizar integradores temporais diferentes para a aproximação da resposta do fluido e também às formulações e elementos completamente diferentes para a estrutura.

Por fim, apresentam-se também as configurações deformadas da estrutura e, por consequência, da malha do fluido, das linhas de corrente e as curvas de pressão para os tempos $t=5, 10, 16$ e 24 , de acordo com a Fig. 8.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho propôs-se uma metodologia de acoplamento particionado com a utilização do método dos elementos finitos posicional aplicado a estruturas de casca. Seu emprego se mostra vantajoso por não utilizar rotações como graus de liberdade, tornando-o robusto e de fácil implementação. Para o fluido, adotou-se uma formulação mista em descrição ALE, respeitando a condição de estabilidade LBB e com estabilização pelo método SUPG. Optou-se ainda por um esquema de acoplamento explícito padrão no modelo Dirichlet-Neumann. São observados bons resultados para a simulação numérica realizada, que se aproxima do modelo implícito utilizado por Fernández *et al.* (2013) à medida que se tem uma melhor discretização espacial, atestando a eficiência do método.

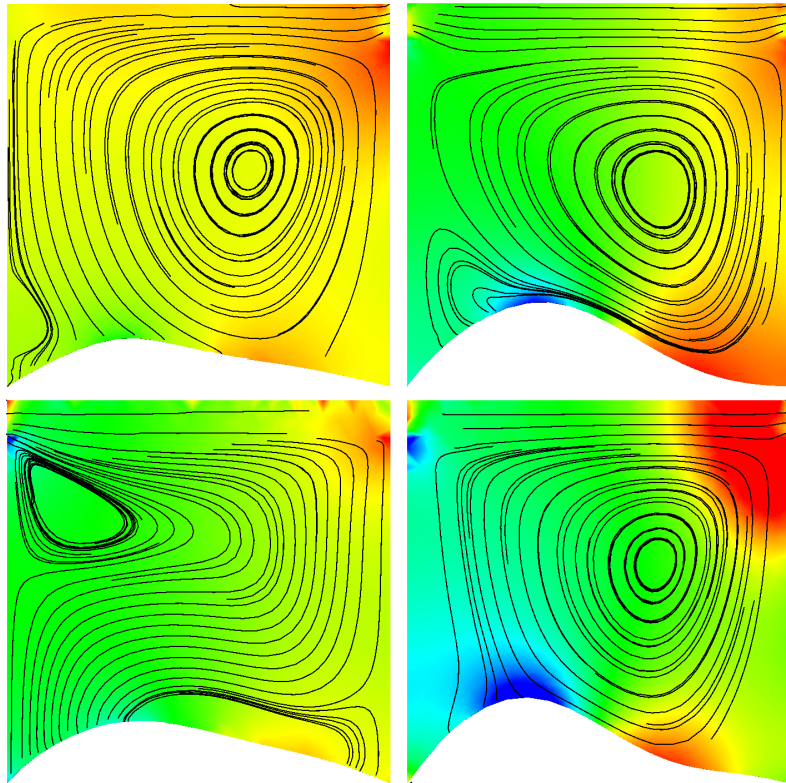


Figura 8: Linhas de corrente e pressão para os tempos $t=5,10,16$ e 24 (da esquerda para a direita e de cima para baixo).

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro dedicado à pesquisa, bem como ao Prof. Humberto Breves Coda pela disponibilização do programa de casca dinâmica.

REFERÊNCIAS

- Basilevs, Y., Takizawa, K., & Tezduyar, T. E. 2013. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Bonet, J., *et al.* . 2000. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**(5-7), 579–595. ISSN 0045-7828.
- Brendel, B., & Ramm, E. 1980. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. *Computers & Structures*, **12**(4), 549–558.
- Brooks, A. N., & Hughes, T. J. 1982. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32**(1-3), 199–259.
- Chung, T. J. 2002. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- Coda, H. B. 2003. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Ph.D. thesis, SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil.
- Coda, H. B. 2009a. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**(47-48), 3712–3722. a.
- Coda, H. B. 2009b. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, **6**(3), 187–212. b. ISSN 1679-7817.
- Coda, H. B., & Paccola, R. R. 2007. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, **40**(1), 185–200.
- Donea, J., & Huerta, A. 2003. *Finite Element Methods for flow problems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Donea, J., Giuliani, S., & Halleux, J. 1982. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**(1-3), 689–723.
- Fernández, M. A., Mullaert, J., & Vidrascu, M. 2013. Explicit Robin-Neumann schemes for the coupling of incompressible fluids with thin-walled structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **267**, 566–593.
- Heil, M., Hazel, A. L., & Boyle, J. 2008. Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches. *Comput. Mech.*, **43**, 91–101.
- Hughes, T. J., & Carnoy, E. 1983. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **39**(1), 69–82.
- Hughes, T. J. R., & Liu, W. K. 1981a. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **26**(3), 331–362. a. ISSN 0045-7825.
- Hughes, T. J. R., & Liu, W. K. 1981b. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **27**(2), 167–181. a. ISSN 0045-7825.
- Kanchi, H., & Masud, A. 2007. A 3D adaptative mesh moving scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **54**, 923–944.
- Sanches, R. A. K. 2011. *Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos*. Doutorado, SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil.
- Sanches, R. A. K., & Coda, H. B. 2013. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to Fluid Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **259**, 177–196.
- Teixeira, P. R. F. E., & Awruch, A. M. 2005. Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. *Computers and Fluids*, **34**, 249–273.
- Wall, W. A. 1999. *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Doutorado, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, Germany.

- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. 2000a. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics*. Vol. 3. Butterworth Heinemann Linacre house. 334 p.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. 2000b. *The Finite Element Method: The Basis*. Vol. 1. Butterworth Heinemann Linacre house. 689 p.