



INFLUÊNCIA DA PERFUSÃO SANGUÍNEA NA SIMULAÇÃO DE QUEIMADURAS EM TECIDOS VIA MODELO NÃO-LINEAR DE BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR

Thiago dos Santos Ribeiro

tsribeiro@poli.ufrj.br

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, 36036-330, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil

Felipe dos Santos Loureiro

felipe.loureiro@ufsj.edu.br

Departamento de Ciências Térmicas e dos Fluidos, Universidade Federal de São João del-Rei 36307-352, São João del-Rei, Minas Gerais, Brasil

Jonathan Esteban Arroyo Silva

jeas560@gmail.com

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, 36036-330, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil

Abstract. *O presente trabalho tem como objetivo efetuar uma análise de sensibilidade da perfusão sanguínea ao se simular processos de queimadura de pele devido a uma fonte de calor externa, considerando diferentes condições de contorno e utilizando o método dos elementos finitos (MEF) para discretizar a equação de Pennes. O modelo 2D aqui empregado considera um tecido formado pelas camadas de epiderme, derme, subcutâneo e músculo além de uma perfusão sanguínea não linear uma vez que se observa um aumento seguido de uma diminuição da perfusão acima das temperaturas específicas resultantes de danos induzidos pelo aumento de temperatura nos capilares sanguíneos. O sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares oriundo da discretização via MEF é resolvido empregando-se o método de Euler implícito em conjunto com o método de Picard. Uma vez determinado a distribuição de temperatura, o modelo de Arrhenius é utilizado para calcular o dano térmico e classificar a queimadura quanto ao seu grau (ou seja, primeiro, segundo ou terceiro grau).*

Keywords: *Equação de Pennes, Queimadura de pele, Método dos elementos finitos, Perfusão sanguínea*

1 INTRODUÇÃO

A pele humana é composta por quatro camadas, que são: epiderme (camada mais externa), derme, subcutânea e muscular. Queimadura de pele é uma lesão que pode ser causada por eletricidade, radiação, contato com substâncias químicas ou contato com algum material a uma temperatura elevada. Essas queimaduras podem ser classificadas como queimaduras de primeiro, segundo ou terceiro grau (Grabb et al., 2014).

Devido aos altos índices de casos de queimaduras de pele e os altos custos dos tratamentos, o interesse no desenvolvimento de modelos matemáticos que possam descrever o comportamento da transferência de calor em tecidos vivos durante o processo de queimadura está crescendo (Rubinsky et al., 2006; Xu et al., 2011; Loureiro et al., 2014). O fluxo sanguíneo nas regiões do corpo quando em contato com superfícies aquecidas é menor ou maior do que nos tecidos normais, dependendo da resistência do mesmo, e tem-se observado que este fluxo através da rede vascular é lento e retardado quando comparado com o fluxo nos tecidos normais (Song et al., 1984). Além disso, quando a pele é aquecida a uma temperatura além de um determinado valor considerado crítico (a partir de aproximadamente 44°C), o dano térmico causado é cumulativo, e além disso as células ao se quebrarem, liberam uma série de substâncias que irão ativar e sensibilizar alguns neoreceptores, principalmente aqueles ligados diretamente a dor, que pode ser tão intensa quanto a extensão e temperatura aplicada ao tecido (Xu et al., 2011). Para modelar tal fenômeno, diferentes modelos matemáticos foram propostos (Rubinsky et al., 2006; e Khanafer et al., 2009). Dos modelos existentes, o modelo baseado na equação de Pennes é o mais utilizado (Pennes, 1948).

O objetivo deste trabalho é analisar a influência da perfusão sanguínea ao simular um processo de queimadura de pele devido a uma fonte de calor externa, considerando como condição inicial a temperatura normal do corpo. Existem alguns modelos para a perfusão sanguínea não linear (Rai et al., 1999; Zhang et al., 2014), e será feita uma comparação entre um modelo baseado em uma função construída a partir de dados experimentais extraídos de Song et al. (1984) com o modelo baseado em uma equação descrita por Xu et al. (2011). Além disso também será analisado a sensibilidade da condutividade térmica não linear. O método dos elementos finitos (MEF) (Souza, 2003; Azevedo, 2003; e Lewis et al., 2004) é empregado para a discretização espacial da equação de Pennes. O modelo 2D a ser empregado neste trabalho, considera um tecido formado pelas camadas epiderme, derme, subcutâneo e tecido muscular. Os resultados obtidos permitirão fazer uma comparação da influência da perfusão sanguínea linear e não linear, bem como uma comparação da condutividade térmica linear e não linear; uma vez que para a perfusão sanguínea se observa um aumento na mesma seguido de uma diminuição, acima das temperaturas específicas resultantes de danos induzidos pelo aumento da temperatura nos capilares sanguíneos (Xu et al., 2011).

2 MODELO MATEMÁTICO

Uma aplicação de um modelo de biotransferência de calor que será estudado aqui é a simulação do contato da pele com uma placa aquecida, mostrando os resultados relacionados a temperatura final do processo e dos danos causados ao tecido da pele. O modelo 2D aqui utilizado é composto pelas quatro camadas da pele, como dito anteriormente e a simulação aqui ocorrerá da seguinte forma: a pele está a uma temperatura inicial T_0 . Uma parte da epiderme,

entrará em contato com uma placa aquecida conforme indicado na Figura 1, durante um determinado tempo.

A exposição da pele por um determinado tempo a temperaturas elevadas pode resultar em danos reversíveis ou irreversíveis (necrose) em uma ou mais camadas. Esse dano causado pela queimadura e que pode ser classificado em queimadura de primeiro, segundo ou terceiro grau, como exposto anteriormente, será determinado pelo modelo de Arrhenius (Rubinsky et al., 2006).

Vale ressaltar que a equação a ser utilizada é a equação de biotransferência de calor de Pennes, e as respectivas condições de contorno serão mostradas mais adiante.

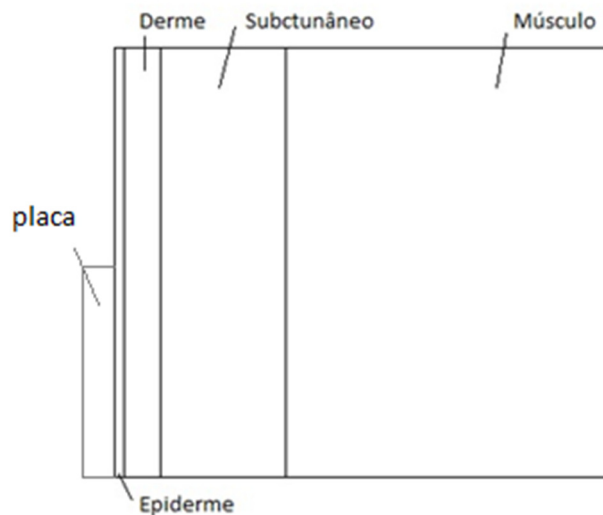


Figura 1: Esquema mostrando o contato da pele com a placa

Para simular o problema, foi gerada a partir da Figura 1, uma malha (Figura 2), de altura 0.04m e cujos comprimentos de cada camada encontram-se na Tabela 1. Nota-se, que a malha é mais refinada nas primeiras camadas, presumindo-se um gradiente maior de temperatura nessa região.

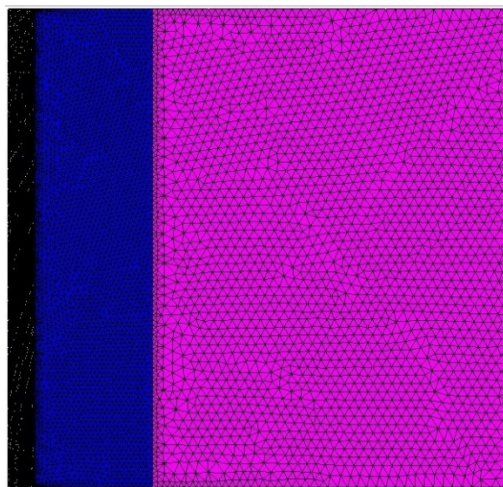


Figura 2: Malha 2D de elementos finitos com 36470 elementos triangulares

A escolha de uma malha mais refinada foi devido a sua precisão na geração dos resultados. Simulações utilizando malhas ainda mais refinadas foram realizadas, não ocorrendo diferenças significativas nos resultados obtidos. Para efeito de comparação, além dos modelos que serão apresentados nas Eq. (8) até a Eq. (13) serão considerados valores para a perfusão sanguínea linear (ω_b) para cada camada da pele que estão representados na Tabela 1. Essa tabela também contém algumas propriedades de cada camada da pele, como os valores para a condutividade térmica linear. Além disso a produção de calor metabólico e a temperatura arterial foram ajustados para $Q_m = 420\text{W/m}^3$ e $T_a = 37^\circ\text{C}$.

Tabela 1: Propriedades térmicas da cada camada da pele do modelo

Propriedades e geometria	Epiderme	Derme	Subcutânea	Músculo
Comprimento (m)	0.00008	0.002	0.01	0.03
k ($\text{W m}^{-1} ^\circ\text{C}^{-1}$)	0.22	0.4	0.2	0.45
ρ (kg m^{-3})	1200	1200	1000	1085
c ($\text{J kg}^{-1} ^\circ\text{C}^{-1}$)	3600	3400	2500	3800
ω_b (s^{-1})	0	0.0008	0.0002	0.001
ρ_b (kg m^{-3})	1000	1000	1000	1000
c_b ($\text{J kg}^{-1} ^\circ\text{C}^{-1}$)	4200	4200	4200	4200

O problema de condução de calor, que consiste na solução de equações diferenciais parciais, pode se apresentar sob a forma forte, cuja solução deve satisfazer todas as equações de definição em qualquer ponto (x,y) do domínio. Sob a forma fraca, as equações que descrevem o problema são equações integrais sobre o domínio Ω e a fronteira do corpo Γ .

2.1 Equação de Pennes

A equação da biotransferência de calor de Pennes representa a distribuição espacial e temporal da temperatura em tecidos biológicos. Foi obtida através do balanço de energia, considerando a taxa de energia interna, condução de calor, convecção via aproximação de um sumidouro e geração local de calor.

Considere que o tecido da pele ocupe uma região cuja superfície seja Γ e o volume seja Ω , e que essa equação de condução de calor possui um termo dependente da perfusão sanguínea, que pode ser dependente ou não da temperatura, como mostrado na Eq. (1):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \nabla T) + \rho_b c_b \omega_b(T) (T_a - T) + Q_m + Q_r \quad \text{em } \Omega \times (0, t_f] \quad (1)$$

onde ρ , c e $k(T)$ representam, respectivamente, a densidade (kg/m^3), calor específico ($\text{J/kg } ^\circ\text{C}$) e condutividade térmica do tecido ($\text{W/m } ^\circ\text{C}$), ρ_b , c_b e $\omega_b(T)$ representam, respectivamente, a

densidade (kg/m^3), o calor específico do sangue ($\text{J/kg } ^\circ\text{C}$) e a perfusão sanguínea ($1/\text{s}$), T_a é a temperatura arterial do sangue ($^\circ\text{C}$), Q_m representa a produção de calor metabólico do tecido (W/m^3) e Q_r é o aquecimento volumétrico (W/m^3) ou geração de calor a partir da fonte de calor externo.

A Eq. (1) está submetida as seguintes condições de contorno e inicial:

$$T = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_D \times (0, t_f] \quad (2)$$

$$k(T) \nabla T \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_N \times (0, t_f] \quad (3)$$

$$k(T) \nabla T \cdot \mathbf{n} = h (T_\infty - T) \quad \text{em } \Gamma_R \times (0, t_f] \quad (4)$$

$$T = T_0 \quad \text{em } \Omega \text{ em } t = 0 \quad (5)$$

onde as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin com seus respectivos valores são aplicados em Γ_D , Γ_N e Γ_R respectivamente, onde Γ_D , Γ_N e Γ_R são partições de $\Omega = \Gamma$ tais que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \Gamma_D \cap \Gamma_R = \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$.

2.1.1 Perfusão Sanguínea e Condutividade Térmica

A simulação do problema físico direto da biotransferência de calor exige o conhecimento das propriedades térmicas e dos parâmetros físicos do tecido em análise. Neste modelo matemático a perfusão sanguínea é baseada apenas na temperatura, porém existem outros modelos que consideram outros fatores, como fontes externas de calor, metabolismo, dentre outros (Song et al., 1984). A obtenção de todos esses parâmetros revela-se um grande obstáculo devido aos métodos experimentais utilizados. Uma grande variedade de métodos, usando diferentes técnicas de sonda e modelos térmicos, tem sido usada para calcular o valor local da perfusão nos tecidos (Bowman, 1985; e Guimarães, 2003).

A taxa de perfusão sanguínea, ω_b , é específica para cada tipo de tecido, e sua obtenção de forma precisa é relativamente complexa. O valor para pequenos volumes de tecido tem sido estudado por muitos anos, pois este é um parâmetro fundamental para melhorar o conhecimento da fisiologia patológica e normal, assim como de diagnósticos e da conduta de muitos procedimentos médicos (Bowman, 1985; e Guimarães, 2003). Além disso, os efeitos do fluxo sanguíneo e da geração de calor metabólico devem ser considerados separadamente para que as propriedades térmicas do tecido possam ser deduzidas (Guimarães, 2003; e Cooper, et al., 1971).

A perfusão no tecido é um fator primordial no transporte local de calor, sendo o seu controle importante para aplicações clínicas de hipertermia e hipotermia, na ministração de medicamentos, de oxigênio e de nutrientes (Bowman, 1985; e Guimarães, 2003). Alguns dos modelos existentes que descrevem o comportamento da perfusão sanguínea (Rai et al., 1999; e Zhang et al., 2014), estão representados abaixo pelas Eq. (6) e (7). Porém, esses modelos não serão analisados neste trabalho porque eles consideram apenas que o valor da perfusão aumenta, não reduzindo após uma certa temperatura, o que segundo Xu et al., (2011) a perfusão diminui quando uma certa temperatura é atingida, cessando o fluxo sanguíneo.

$$\omega_b(T) = \begin{cases} \omega_{b0} & , T \leq T_{cr} \\ \omega_{b0} \left(1 + \frac{\omega_{max} - \omega_{b0}}{\omega_{b0}} \frac{T - T_{cr}}{T_{max} - T_{cr}} \right) & , T_{cr} < T < T_{max} \\ \omega_{max} & , T \geq T_{max} \end{cases} \quad (6)$$

$$\omega_b(T) = a_1 + a_2 T + a_3 T^2 \quad (7)$$

Desta forma, para considerar o que foi descrito acima, os modelos da perfusão sanguínea não linear para cada camada a serem considerados, estão representados pelas Eq. (8), (9) e (10), sendo que o valor para a perfusão sanguínea da epiderme é igual a zero, pois a epiderme não possui vasos sanguíneos (Burns et al., 2010).

$$\omega_{b_derme}(T) = \begin{cases} 0.0004 + 0.0014e^{-\frac{(T-44)^2}{4}}, & \text{se } T \leq 44^\circ\text{C} \\ 0.0018e^{-\frac{(T-44)^2}{15}}, & \text{se } T \geq 44^\circ\text{C} \end{cases} \quad (8)$$

$$\omega_{b_sub}(T) = \begin{cases} 0.00035 + 0.00035e^{-\frac{(T-44)^2}{3}}, & \text{se } T \leq 44^\circ\text{C} \\ 0.0007e^{-\frac{(T-44)^2}{12}}, & \text{se } T \geq 44^\circ\text{C} \end{cases} \quad (9)$$

$$\omega_{b_mus}(T) = \begin{cases} 0.0005 + 0.0035e^{-\frac{(T-45)^2}{7}}, & \text{se } T \leq 45^\circ\text{C} \\ 0.004e^{-\frac{(T-45)^2}{10.5}}, & \text{se } T \geq 45^\circ\text{C} \end{cases} \quad (10)$$

Estes modelos foram construídos tendo como base o trabalho de Song et al. (1984). Para efeitos de comparação, serão utilizados os modelos para perfusão sanguínea retirados de Xu et al. (2011), apresentados abaixo pelas Eq. (11), (12) e (13):

$$\omega_{b_derme}(T) = \begin{cases} 0.001545 + 0.000031818 (T - 37); & \text{se } 1 \leq T \leq 45^\circ\text{C} \\ 0.0018; & \text{se } 45 < T < 60^\circ\text{C} \\ 0; & \text{se } T \geq 60^\circ\text{C} \end{cases} \quad (11)$$

$$\omega_{b_sub}(T) = \begin{cases} 0.00063636 + 0.0000079545 (T - 37); & \text{se } 1 \leq T \leq 45^\circ\text{C} \\ 0.0007; & \text{se } 45 < T < 60^\circ\text{C} \\ 0; & \text{se } T \geq 60^\circ\text{C} \end{cases} \quad (12)$$

$$\omega_{b_mus}(T) = \begin{cases} 0.003365 + 0.000079545 (T - 37); & \text{se } 1 \leq T \leq 45^\circ\text{C} \\ 0.004; & \text{se } 45 < T < 60^\circ\text{C} \\ 0; & \text{se } T \geq 60^\circ\text{C} \end{cases} \quad (13)$$

A Figura 3 mostra o gráfico comparando estes modelos de perfusão sanguínea que serão utilizados neste trabalho.

Experimentos in vivo e in vitro mostraram que a perfusão sanguínea é fortemente dependente da temperatura. O coeficiente de dependência da temperatura pode ser linear ou não linear. É preferível utilizar uma função não linear, já que ocorre uma diminuição da perfusão sanguínea depois que uma certa temperatura resultante de danos induzidos é atingida, o que torna tal modelo fisicamente mais coerente (Xu et al., 2011).

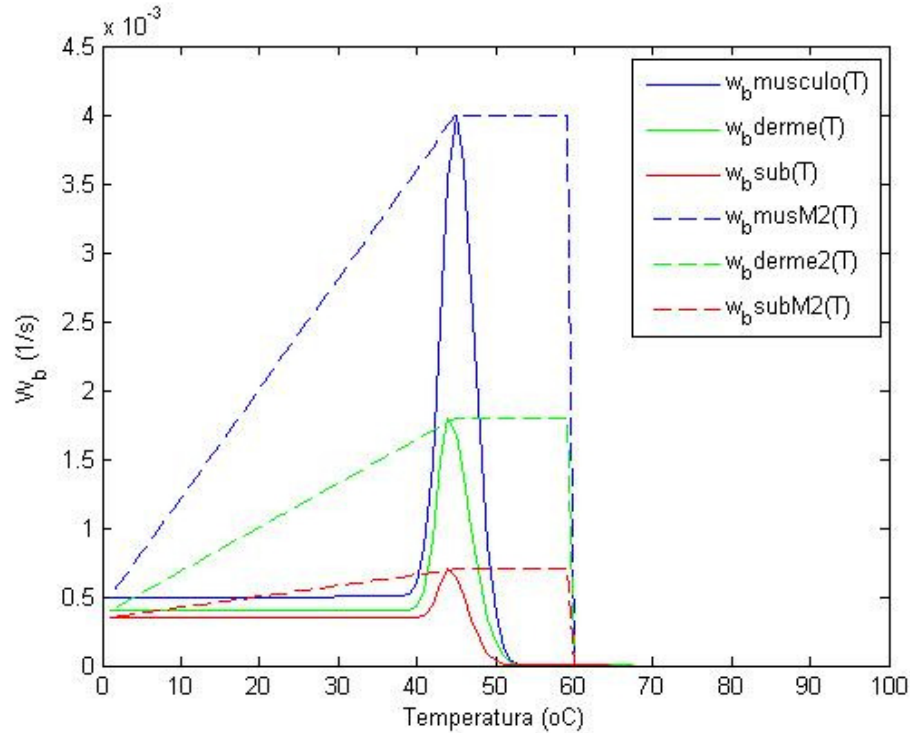


Figura 3: Gráfico comparativo dos modelos de perfusão sanguínea não lineares

Serão considerados também modelos não lineares para a condutividade térmica ($k(T)$) para cada camada do tecido, apresentados nas Eq. (14), (15), (16) e (17) para a epiderme, derme, subcutâneo e tecido muscular respectivamente (Bhattacharya et al., 2003). Esses modelos foram construídos tendo como base o valor linear de cada camada, e que a condutividade térmica cresce com o aumento da temperatura, e supondo ainda que ocorra a mesma variação de temperatura.

$$k(T) = 0.22 + 0.0015 * T ; \quad (14)$$

$$k(T) = 0.40 + 0.0015 * T ; \quad (15)$$

$$k(T) = 0.20 + 0.0015 * T ; \quad (16)$$

$$k(T) = 0.45 + 0.0015 * T ; \quad (17)$$

Serão realizadas cinco simulações, e na primeira delas, será utilizada a condutividade térmica não linear mostrada nas Eqs. (14), (15), (16) e (17) e o modelo da perfusão sanguínea das Eqs. (8), (9) e (10); a segunda utilizará a mesma condutividade térmica não linear da simulação anterior, porém com o modelo da perfusão sanguínea das Eqs. (11), (12) e (13); a terceira utilizará os valores da condutividade térmica e perfusão sanguínea apresentados na Tabela 1; a quarta e quinta simulações utilizarão os valores da condutividade térmica linear apresentados na Tabela 1, mas a diferença é que a quarta simulação utilizou o modelo da perfusão sanguínea das Eqs. (8), (9) e (10), e a quinta simulação utilizou o modelo da perfusão sanguínea das Eqs. (11), (12) e (13). A Tabela 2 mostra a relação dos modelos de perfusão sanguínea e condutividade térmica utilizados nas simulações que foram descritos anteriormente, para um melhor entendimento.

Tabela 2: Relação dos modelos de perfusão sanguínea e condutividade térmica

	Perfusão Sanguínea	Condutividade Térmica
Modelo 1	Equações 8, 9 e 10	Equações 14, 15, 16 e 17
Modelo 2	Equações 11, 12 e 13	Equações 14, 15, 16 e 17
Modelo 3	Valores de ω_b Tabela 1	Valores de k Tabela 1
Modelo 4	Equações 8, 9 e 10	Valores de k Tabela 1
Modelo 5	Equações 11, 12 e 13	Valores de k Tabela 1

3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

O conceito básico da aplicação do MEF consiste na discretização espacial do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do problema. Para isso utiliza-se uma malha de elementos finitos que são interligados através de nós, conforme indicado na Figura 4. Os elementos constitutivos de tal malha podem ser triangulares, quadrangulares ou alguma outra forma mais adequada ao problema. No caso de um domínio bidimensional, o passo inicial consiste na utilização de um sistema de coordenadas cartesianas onde se processa a localização dos nós (Lewis et al., 2004).

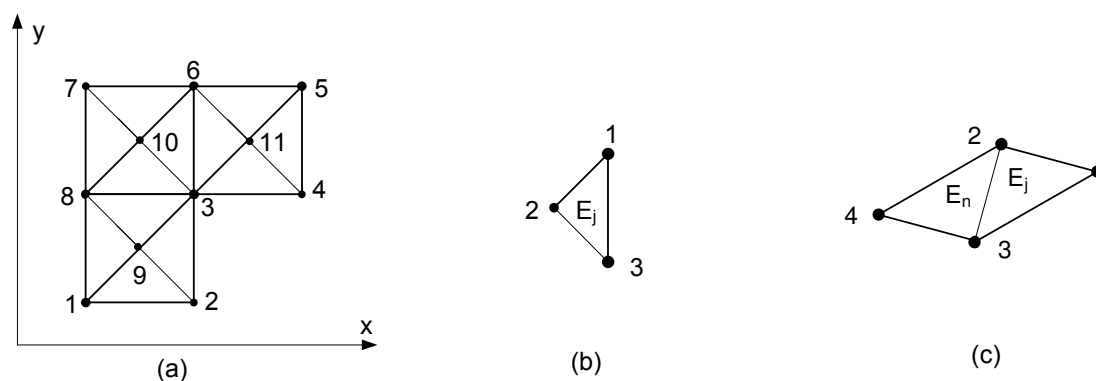


Figura 4: (a) malha de elementos finitos; (b) enumeração local de um elemento finito E_j ; (c) dois elementos triangulares.

Para o problema em análise o campo de temperatura $T(\mathbf{x},t)$ é em função do tempo, assim como a taxa de calor gerada pelo corpo, e obedecem às relações constitutivas do corpo (Azevedo, 2003).

Utilizando o MEF para a solução do problema da condução de calor em tecidos biológicos, as principais incógnitas são as temperaturas nodais avaliadas em cada nó da malha, armazenadas no vetor solução $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ \dots \ T_{n_l}]$ onde n_l é o número de graus de liberdade da malha.

A Equação 1 pode ser escrita de outra forma, de acordo com a Eq. (18).

$$\nabla \cdot (k(T) \nabla T) + \rho_b c_b \omega_b(T) (T_a - T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = g \quad (18)$$

onde $g = -Q_m - Q_r$

A partir da Eq. (18), seguem-se alguns passos para chegar na forma fraca da equação, onde o primeiro consiste em multiplicar a Eq. (18) por uma função teste $v(\mathbf{x}) \in V$. Considere S o conjunto das soluções admissíveis e V o espaço das funções testes. A formulação fraca para este problema consiste em encontrar $T \in S$ tal que $\forall v \in V$ de acordo com as Eq. (19) e (20).

$$S = \{T(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega); T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \Gamma_D \forall t \geq 0\} \quad (19)$$

$$V = \{v(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad (20)$$

onde $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev.

Procedendo a integração da equação obtida no passo anterior sobre o domínio Ω , utilizando o Teorema de Gauss, e observando que $v(\mathbf{x}) = 0$ em Γ_D , obtém-se a Eq. (21):

$$\int_{\Omega} [k(T)(\nabla T \cdot \nabla v) + \rho_b c_b \omega_b(T) T v + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v] d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{q} v d\Gamma_N + \int_{\Omega} g v d\Omega + \int_{\Omega} \rho_b c_b \omega_b(T) T_a v d\Omega \quad (21)$$

caso convecção seja incluída na análise deve-se substituir $\bar{q}$ por $h(T_{\infty} - T)$ na expressão acima.

Com a discretização do domínio, o problema variacional pode ser obtido com a definição de um subespaço de dimensões finitas, ou seja, substitui S e V por $S_h \subset S$ e $V_h \subset V$, e o problema atual consiste em encontrar $T_h \in S_h$, tal que $\forall v_h \in V_h$,

$$\int_{\Omega} [k(T_h)(\nabla T_h \cdot \nabla v_h) + \rho_b c_b \omega_b(T_h) T_h v_h + \rho c \frac{\partial T_h}{\partial t} v_h] d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{q} v_h d\Gamma_N + \int_{\Omega} g v_h d\Omega + \int_{\Omega} \rho_b c_b \omega_b(T_h) T_a v_h d\Omega \quad (22)$$

A solução aproximada T_h da solução T é dada por:

$$T_h = \sum_{i=1}^n T_i(t) N_i(x) \quad (23)$$

onde n é finito e N_i são as funções de interpolação globais, e T_i passam a ser as incógnitas (valores nodais) a serem determinadas. O mesmo pode ser feito para as funções teste v , isto é:

$$v_h = \sum_{i=1}^n v_i N_i(x) \quad (24)$$

Substituindo as Eq. (23) e (24) na Eq. (22), e procedendo às devidas substituições, obtém-se a Eq. (25) em notação matricial:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}(\mathbf{T}) \mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{T}) + \mathbf{Q} \quad (25)$$

onde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{F}(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, as matrizes capacitância, condutividade térmica e perfusão, e os vetores perfusão e geração de calor:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho c N_i N_j d\Omega \quad (26)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} [\nabla N_i \cdot (k(T_h) \nabla N_j) + \rho_b c_b \omega_b(T_h) N_j N_i] d\Omega \quad (27)$$

$$F_i = \int_{\Omega} \rho_b c_b \omega_b(T_h) T_a N_i d\Omega \quad (28)$$

$$Q_i = \int_{\Gamma_N} \bar{q} N_i d\Gamma_N + \int_{\Omega} g N_i d\Omega \quad (29)$$

Feito a discretização pelo método dos elementos finitos, utilizou-se o método de Euler Implícito e o método de Picard para resolver a Eq. (25). O método de Euler Implícito consiste na aproximação dada pela Eq. (30) (Lewis et al., 2004):

$$(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}(\mathbf{T}^{n+1}))\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{T}^n + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{T}^{n+1}) + \Delta t \mathbf{Q}^{n+1} \quad (30)$$

onde Δt é o passo de tempo da discretização temporal.

Vale observar que na Eq. (30), o vetor perfusão ($\mathbf{F}$) e a matriz condutividade térmica e perfusão ($\mathbf{K}$) são não lineares, calculadas no passo de tempo $n+1$. Desta forma é necessário utilizar um método numérico para obter a solução do sistema não linear. Neste trabalho será utilizado o método de Picard, que será representado pela Eq. (31):

$$(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}(\mathbf{T}^{n+1,k}))\mathbf{T}^{n+1,k+1} = \mathbf{M} \mathbf{T}^n + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{T}^{n+1,k}) + \Delta t \mathbf{Q}^{n+1} \quad (31)$$

onde $\mathbf{T}^{n+1,k}$ representa o vetor temperatura no passo de tempo $n+1$ na iteração k . O processo iterativo é iniciado adotando $\mathbf{T}^{n+1,0} = \mathbf{T}^n$, e é finalizado até que uma convergência seja alcançada.

4 SIMULAÇÕES E DISCUSSÕES

Para analisar os resultados obtidos e poder classificar os danos quanto ao seu grau, será utilizado o modelo de Arrhenius apresentado abaixo pela Eq. (32) (Xu et al., 2011):

$$\Psi = \int_0^t \xi e^{-\frac{\Delta E}{R(T+273)}} dt \quad (32)$$

onde R representa a constante universal dos gases, T é a temperatura local, ΔE representa a barreira de energia livre para a desnaturação molecular e vale 6.28×10^8 J/kmol enquanto ξ é uma constante determinada pelas propriedades do tecido que vale 3.1×10^{98} 1/s.

A classificação da lesão será feita de acordo com os valores de Ψ obtidos pela Eq. (32): $0.53 \leq \Psi < 1$, $1 \leq \Psi < 10^4$ e $\Psi \geq 10^4$, que são, respectivamente, queimaduras de primeiro, segundo e terceiro grau (Xu et al., 2011).

Foram realizadas cinco simulações referentes a queimadura, ou seja, quando a pele entrou em contato com uma placa a $\bar{T} = 60^\circ\text{C}$ por 300s. Substituindo as condições de contorno, $\bar{T} = 37^\circ\text{C}$, em $x = 0.04208\text{m}$ e $y \in [0.0, 0.04]$ e considerando $T_0 = 37^\circ\text{C}$ no interior do tecido. Já em $x = 0\text{m}$ e $y \in (0.02, 0.04]$, o coeficiente de transferência de calor por convecção $h = 10 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ e $T_\infty = 26^\circ\text{C}$, e em $y = 0\text{m}$ e $y = 0.04\text{m}$, com $x \in [0.0, 0.04208]$ o fluxo ($\bar{q}$) é nulo.

Os gráficos representados pelas Figuras 5, 6, 7 e 8, mostram a influência de cada modelo no campo solução de temperatura no interior do tecido e no dano térmico do tecido durante a exposição a placa.

A Figura 5 mostra as variações de temperatura no interior do tecido, da direção da camada mais externa (derme) para a camada mais interna do tecido (o músculo), com a coordenada $y = 0.01\text{m}$. As temperaturas são mais elevadas na parte mais externa da pele, diminuindo a medida que vai se afastando em direção a parte mais interna da pele. Os resultados obtidos ficaram bem próximos na epiderme, ocorrendo diferenças na derme e na subcutânea, e tenderam aos mesmos valores na camada muscular.

A Figura 6 mostra as variações no tempo da temperatura em dois pontos, um ponto no meio da camada da derme na coordenada $x = 0.00108\text{m}$ e um ponto no meio da camada subcutânea na coordenada $x = 0.00708\text{m}$, e ambas com $y = 0.01\text{m}$. As temperaturas são maiores na derme do que na subcutânea, como esperado, já que a derme está mais próxima da superfície da pele do que a subcutânea.

De acordo com a Figura 6, as cinco simulações ficaram bem próximas para o ponto na camada da derme. Já para um ponto na camada subcutânea, houve uma pequena diferença, pois, o menor valor para a temperatura máxima atingida neste ponto da subcutânea foi de pouco menos de 44°C , e o maior foi de aproximadamente 46°C .

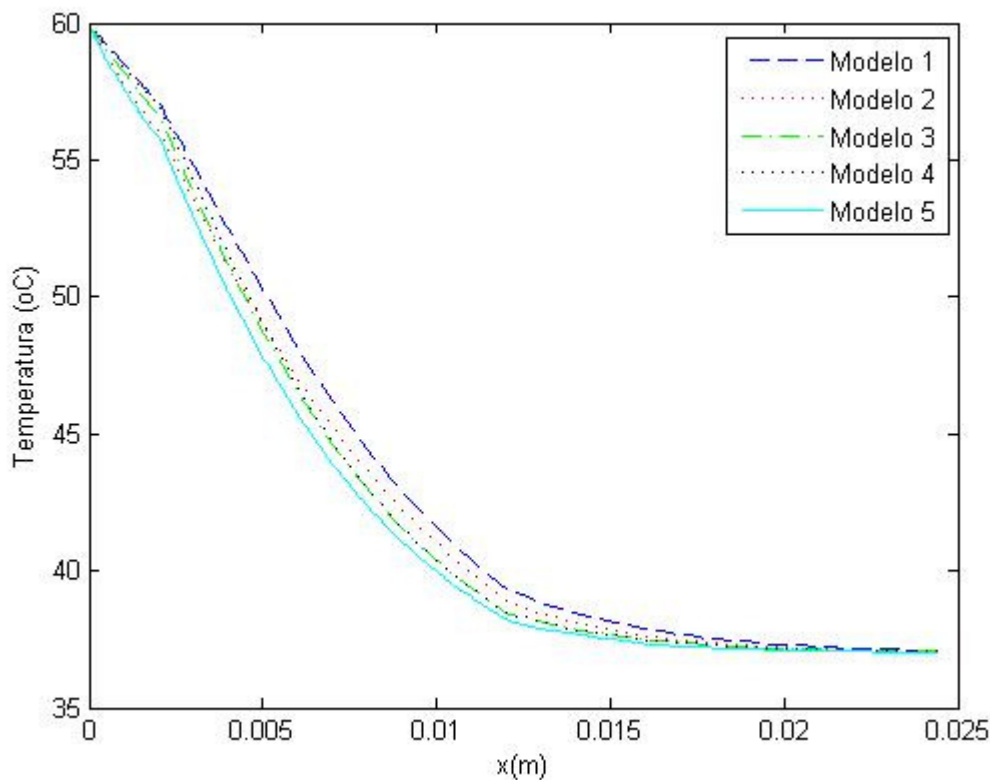


Figura 5: Gráfico Temperatura ($^\circ\text{C}$) vs distância (m)

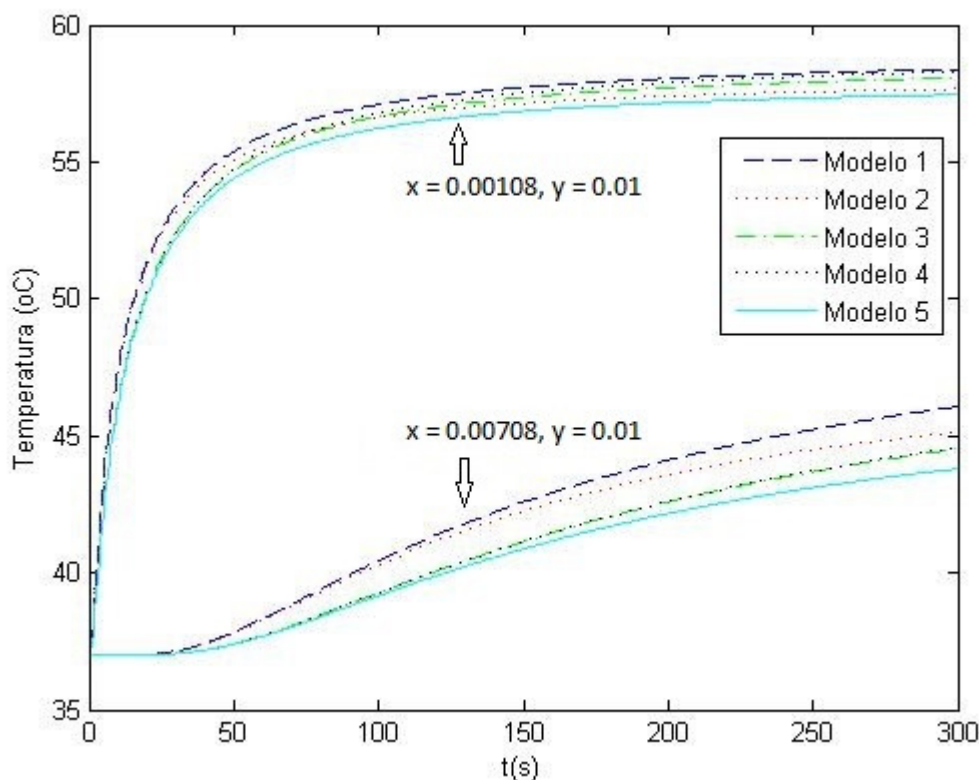


Figura 6: Gráfico relativo a temperatura para um ponto na camada derme ($x=0.00108\text{m}$, $y=0.01\text{m}$) e um ponto na camada subcutânea ($x=0.00708\text{m}$, $y=0.01\text{m}$)

A Figura 7 mostra as variações do dano causado no interior do tecido, também em direção a camada mais interna do tecido (o músculo). Assim como as temperaturas, os danos são mais elevados na parte mais externa da pele, diminuindo à medida que vai se afastando em direção a parte mais interna da pele. De acordo com a Figura 7, ocorre uma queimadura de segundo grau na epiderme e no início da derme, segundo o modelo de Arrhenius, já que o valor de Ψ atingiu aproximadamente 320. A Figura 8 mostra o dano causado nos mesmos dois pontos do tecido dito anteriormente.

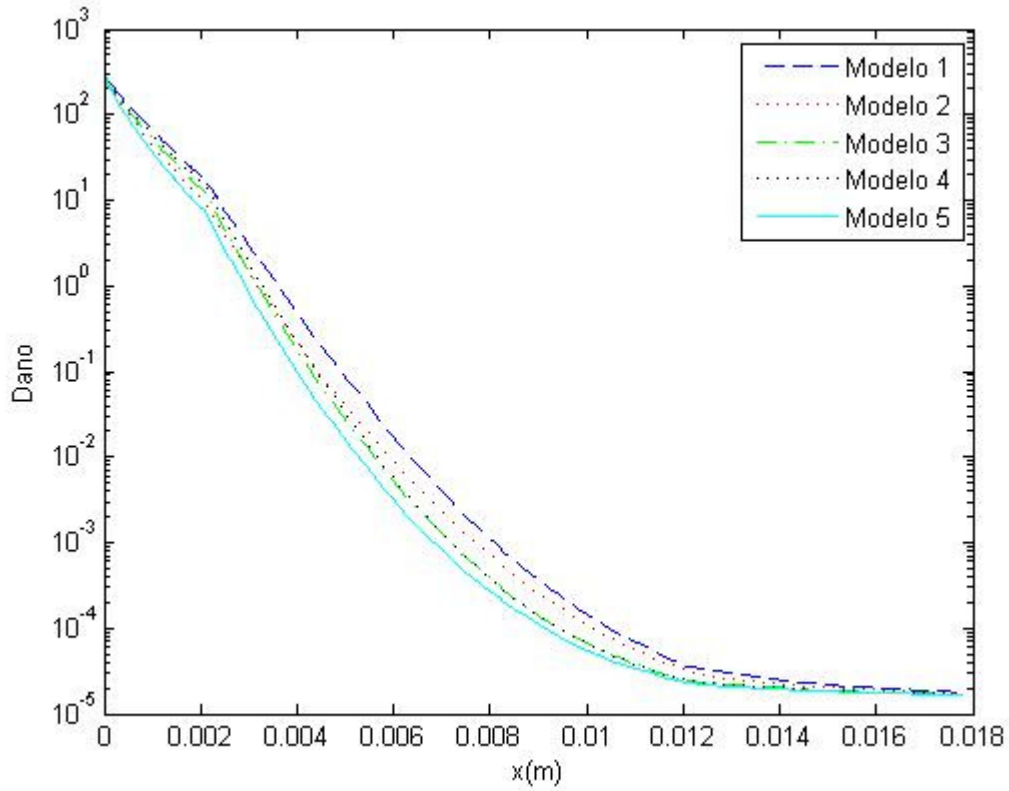


Figura 7: Gráfico Dano vs Distância (m)

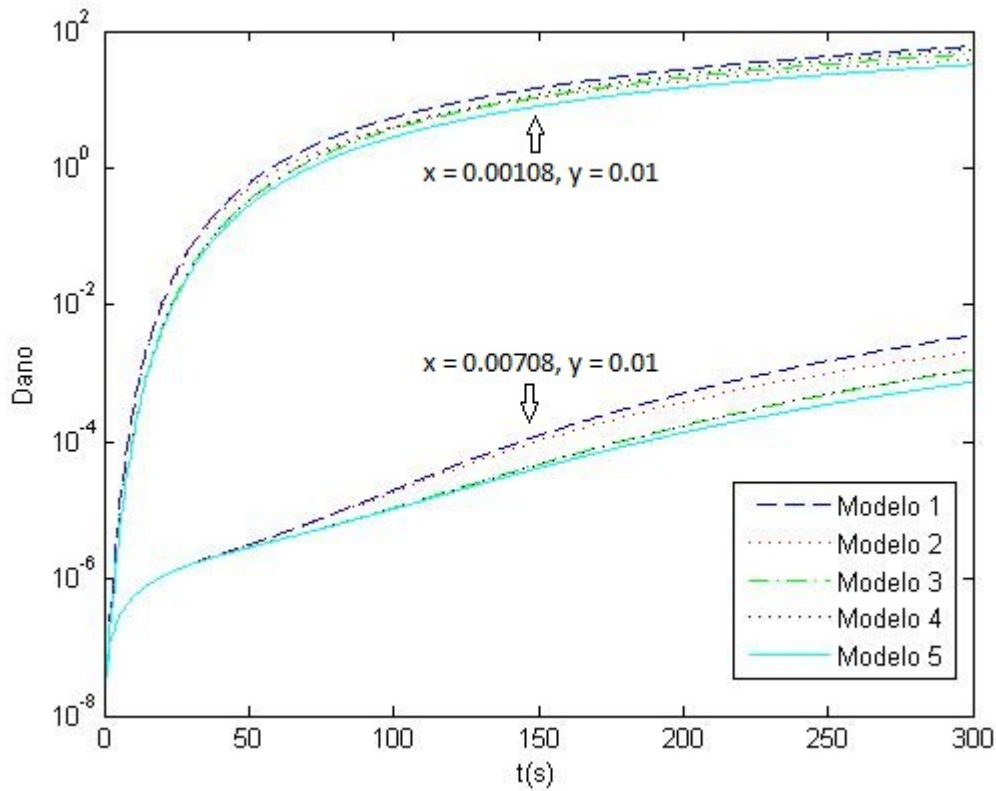


Figura 8: Gráfico relativo ao dano para um ponto na camada derme ($x=0.00108$ m, $y=0.01$ m) e um ponto na camada subcutânea ($x=0.00708$ m, $y=0.01$ m)

Foram apresentados apenas os gráficos referentes a um ponto na camada derme e um ponto na camada subcutânea (Figuras 6 e 8), já que de acordo com a Figura 9, a variação da temperatura ao longo do interior do tecido em direção a camada mais interna da pele, tendem aos mesmos valores no tecido muscular.

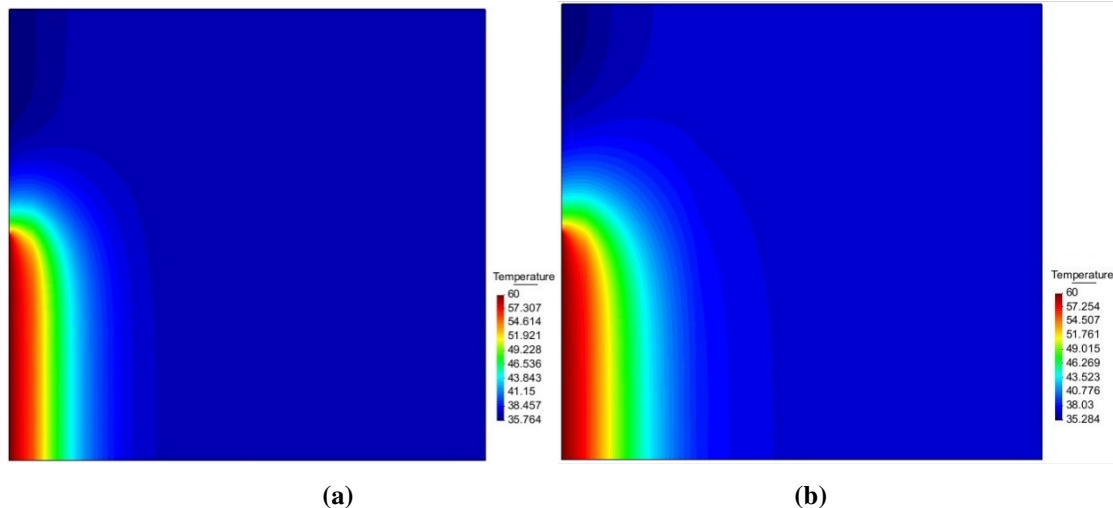


Figura 9: Resultado da simulação referente a temperatura no tecido da pele, na simulação do Modelo 4, em dois tempos diferentes. (a) $t = 150s$ e (b) $t = 300s$.

5 CONCLUSÕES

Observou-se que a perfusão sanguínea não linear, dependendo do modelo a ser utilizado, poderá influenciar o resultado final, e que a condutividade térmica é um fator importante e por isto deve ser levado em consideração. Percebeu-se também que as simulações utilizando os Modelos 3 e 4 obtiveram resultados muito próximos, com uma diferença maior na camada da derme, e todas as simulações convergem para os mesmos valores na camada muscular.

Verificou-se também, que a perfusão sanguínea não linear sempre fornece o menor valor tanto para a temperatura máxima obtida quanto para o valor do dano causado no tecido, o que conflita com a condutividade térmica, cujos modelos lineares fornecem o menor valor para a temperatura e danos máximos infligidos ao tecido. Desta forma, observou-se a importância da condutividade térmica nas simulações efetivadas. Esse trabalho constitui um passo inicial, e futuramente nos próximos trabalhos pretende-se considerar a influência da radiação e transpiração.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos a CAPES, ao CNPq, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora e a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Azevedo, Álvaro F. M., 2003. Método dos Elementos Finitos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 1ª Ed.
- Bhattacharya, A., Mahajan, R. L., 2003. *Temperature dependence of thermal conductivity of biological tissues*, Physiological Measurement, Physiol. Meas. 24, pp. 769–783.
- Bowman, H. F., 1985. *Estimation of tissue blood flow*, In: Shitzer, A. & Eberhart, R. C., *Heat Transfer in Medicine and Biology – Analysis and Applications*. Nova York, Plenum Press, vol. 1.
- Burns, Tony, Breathnach, Stephen, Cox, Neil, Griffiths, Christopher, 2010. *Rook's Textbook of Dermatology*, Wiley-Blackwell, 8ª Ed.
- Cooper, T. E. & Trezek, G. J., 1971. *Correlation of thermal properties of some human tissue with water content*, *Aerospace Medicine*, vol. 42.
- Grabb and Smith's, 2014. *Plastic Surgery*, Wolters Kluwer, 7ª ed.
- Guimarães, Carla S. Cardoso, 2003. Modelagem Computacional da Biotransferência de Calor no Tratamento por Hipertermia em Tumores de Duodeno através do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas, Recife, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco.
- Khanafer, K., Vafai, K., 2009. *Synthesis of mathematical models representing bioheat transport*, In: W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow (Eds.), *Advances in Numerical Heat Transfer*, vol. 3, Taylor & Francis, New York, pp. 1–28.
- Lewis, Roland W., Nithiarasu, Perumal, Seetharamu, Kankanhally N., 2004. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, Wiley.
- Loureiro, F.S., Mansur, W.J., Wrobel L.C., Silva, J.E.A., 2014. *The Explicit Green's Approach with stability enhancement for solving the bioheat transfer equation*, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 76.
- Pennes, H.H., 1948. *Analysis of tissue and arterial temperatures in the resting human forearm*, *J. Appl. Physiol.* 1 pp. 93–122.
- Rai, K. N., Rai, S. K., 1999. *Heat transfer inside the tissues with a supplying vessel for the case when metabolic heat generation and blood perfusion are temperature dependent*, *Heat and Mass Transfer* 35.
- Rubinsky B., 2006. *Numerical bioheat transfer*, in: W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, J.Y. Murthy (Eds.), *Handbook of Numerical Heat Transfer*, 2ª ed., John Wiley and Sons, New Jersey, pp. 851–893.
- Song, Chang W., Lokshina, Anna, Rhee, Juong G., Patten, Marsha, Levitt, Seymour H., 1984. *Implication of Blood Flow in Hyperthermic Treatment of Tumors*, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. BME-31, No.1.

Souza, Remo M. de, 2003. O Método dos Elemento Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor, Universidade Federal do Pará, Belém.

Xu, Feng, Lu, Tianjian, 2011. *Introduction to Skin Biothermomechanics and Thermal Pain*, Springer, Science Press Beijing.

Zhang, Ze-Wei, Wang, Hui, Qin, Qing-Hua, 2014. *Method of Fundamental Solutions for Nonlinear Skin Bioheat Model*, *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, vol. 14.