



ANÁLISE BIDIMENSIONAL DE FRATURAS EM VIGAS DE CONCRETO SUBMETIDAS À FLEXÃO COM ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDOS

Patrick A. B. V. Silva

Deane Roehl

pa_bvieira@hotmail.com

droehl@puc-rio.br

Instituto Tecgraf e Departamento de Engenharia Civil Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Resumo. O Método Estendido dos Elementos Finitos (XFEM), o qual carrega toda a estrutura dos elementos finitos e baseia-se no Método da Partição da Unidade, consiste em uma técnica numérica para modelagem de fraturas. O método tem como essência a adição de funções de enriquecimento ao campo dos deslocamentos, sendo essas capazes de representar descontinuidades no modelo. O método permite a inserção da fratura no modelo de forma independente da malha e apresenta a grande vantagem de não requerer a atualização da mesma à medida que a fratura se propaga. Neste trabalho, foi desenvolvida uma implementação do XFEM para análises bidimensionais de propagação de fraturas com base na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Essa implementação foi feita para o programa comercial ABAQUS® através de uma sub-rotina UEL. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão é efetuado com uso da integral de interação na forma de domínio equivalente e utiliza-se a máxima tensão tangencial como critério de propagação de fratura. O modelo foi aplicado a análises de vigas de concreto submetidas à flexão. Os resultados foram comparados com testes experimentais, atestando-se uma excelente predição numérica da trajetória de propagação das fraturas.

Palavras-chave: XFEM, Propagação de fraturas, Mecânica da Fratura Linear Elástica, Vigas de concreto

1 INTRODUÇÃO

No âmbito da engenharia estrutural, o principal objetivo do projeto é a concepção de uma estrutura que permaneça íntegra diante das diversas ações às quais ela possa estar submetida. O uso da mecânica dos sólidos permite estimar a resistência de uma estrutura, porém a presença de trincas, entalhes e/ou inclusões na mesma altera sua capacidade de carga. Muitos acidentes de engenharia ocorreram e ainda ocorrem pela falta de um rigoroso estudo do comportamento da estrutura diante de imperfeições, fato que dá importância ao conhecimento do comportamento de estruturas diante de fraturas.

A Mecânica da Fratura (MF) surgiu para prever o comportamento de estruturas na presença de trincas. Buscava-se entender o motivo pelo qual materiais sofriam ruptura antes mesmo de atingirem suas resistências. Desde a sua formulação, a MF está presente na maioria dos projetos complexos de engenharia, o que leva à produção de diversos estudos e trabalhos. Hoje, aplicam-se os conhecimentos da MF não apenas visando a integridade da estrutura, mas também tendo outros objetivos específicos, como é o caso do processo de fraturamento hidráulico. A Figura 1 mostra uma representação do fraturamento hidráulico em rochas, na indústria do petróleo.

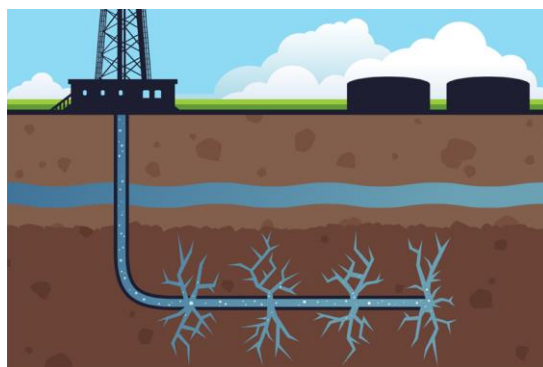


Figura 1. Fraturamento hidráulico na indústria do petróleo

Historicamente, a MF teve seu início quando Griffith (1920) fez uma conexão quantitativa entre tensão de fratura e tamanho do defeito. Contudo, o campo denominado de Mecânica da Fratura ganhou corpo com Irwin (1956), que formalizou a teoria de Griffith, facilitando sua aplicação à solução de problemas de engenharia, surgindo, então, o conceito da Taxa de Liberação de Energia.

Os primeiros estudos, desde o trabalho de Griffith, eram aplicados a materiais com comportamento frágil, atendendo às limitações do ramo da MF, hoje, chamado de Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Posteriormente, houve o surgimento dos demais ramos da MF, que visam superar as limitações das hipóteses lineares elásticas, denominados de Mecânica da Fratura Elastoplástica e Mecânica da Fratura Coesiva.

Apesar de ter sido alvo dos estudos iniciais, a MFLE recebe ainda hoje muita atenção por parte dos pesquisadores, em função de ter sido dela que se derivaram as outras formulações. É essencial ter o seu entendimento consolidado, para que se possa entender conceitos mais avançados.

Os principais conceitos da MFLE são pautados em formulações analíticas. No entanto, as soluções da MF foram desenvolvidas para algumas condições de geometria e carregamento específicas. Sua aplicação a problemas mais gerais de engenharia leva a resultados por vezes

discrepantes. Como alternativa faz-se uso de ferramentas numéricas para a resolução de problemas complexos. Um método que mostra bons resultados nas previsões do comportamento de uma estrutura com trincas é o Método Estendido dos Elementos Finitos (XFEM) (Moes et al, 1999). Esse método é uma extensão do Método dos Elementos Finitos e traz consigo a vantagem de apresentar bons resultados aliados com um baixo custo computacional, em comparação à utilização dos elementos finitos convencionais com malhas adaptativas.

Este trabalho apresenta uma implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos, para análises bidimensionais de abertura e propagação de fratura via Mecânica da Fratura Linear Elástica para o programa ABAQUS®. A implementação realizada apresenta um elemento do tipo XFEM com algumas características distintas daquelas encontradas no elemento XFEM do pacote de elementos padrão do programa ABAQUS®.

2 MÉTODO ESTENDIDO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método Estendido dos Elementos Finitos foi apresentado por Belytschko & Black (1999) e aprimorado por Moes et al. (1999), para lidar com modelagens de descontinuidades. Este método é uma extensão do Método dos Elementos Finitos (MEF) e tem como base o Método da Partição da Unidade (Melenk & Babuska, 1996). O XFEM consiste em uma técnica de modelagem contínua de descontinuidades fortes, onde a trinca não é geometricamente modelada. A essência do método é a adição de funções de enriquecimento para a representação de um campo de deslocamentos descontínuos. Essas funções são os campos assintóticos perto da ponta da fratura e uma função descontínua, definida ao longo da fratura, que representa os saltos no campo de deslocamentos em posições distantes da ponta.

No XFEM, a geometria de uma fratura e sua inserção no modelo são feitas de forma independente da malha. A fratura pode atravessar pelo interior dos elementos e não há a necessidade de atualização da malha à medida que a fratura se propaga. Pode-se destacar ainda que o método tem outra grande vantagem que é a de preservar a base dos elementos finitos e suas propriedades, tais como esparcidade e simetria, além de ser uma ferramenta computacional robusta e precisa para modelar descontinuidades (Sukumar & Prévost, 2003).

A Figura 2 ilustra uma malha de XFEM, onde nota-se a modelagem da fratura sem a representação geométrica da mesma, sendo sua localização no domínio representada pela linha vermelha. Os nós destacados na Fig. 2 são os nós enriquecidos, a fim de representar a descontinuidade imposta pela fratura.

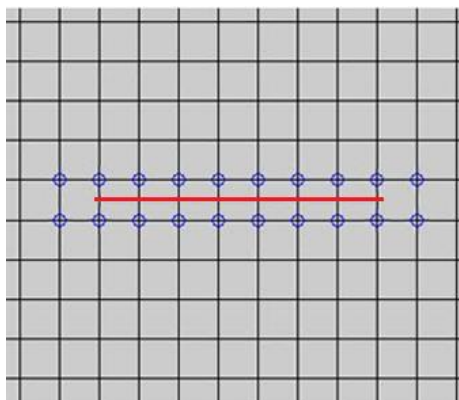


Figura 2. Malha com elementos XFEM

2.1 Formulação do XFEM para modelagem de fraturas

A formulação da aproximação dos deslocamentos através do XFEM consiste no modelo padrão de elementos finitos acrescido da representação da fratura.

A aproximação padrão do campo de deslocamentos em elementos finitos é expressa como:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_n} u_i N_i(\mathbf{x}), \quad (1)$$

onde u_i são graus de liberdade de deslocamentos no nó i , N_i é a função de forma associada ao nó i e I_n é o conjunto de todos os nós do modelo.

A aproximação dos deslocamentos através do XFEM tem a expressão da aproximação padrão dos elementos finitos com a contribuição de funções de enriquecimento. Elas são a função de “salto” (*Heaviside*), $H(\mathbf{x})$, capaz de representar a descontinuidade dos deslocamentos ao longo da fratura, e as funções assintóticas de ponta de fratura, que enriquecem os nós em torno da ponta da fratura. Assim, a aproximação do XFEM toma a forma:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_n} u_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in J_n} b_j N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in K_n} N_k(\mathbf{x}) \left(\sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(\mathbf{x}) \right), \quad (2)$$

onde b_j são graus de liberdade de deslocamentos adicionais associados ao nó j , J_n é o conjunto dos nós dos elementos cujo suporte é totalmente cortado pela superfície da fratura, c_k^l são graus de liberdade de deslocamentos adicionais ao nó k , K_n é conjunto dos nós do elemento que contém a ponta da fratura e $F_l(\mathbf{x})$ são as funções assintóticas de ponta de fratura. A função de salto $H(\mathbf{x})$ é definida como:

$$H(\mathbf{x}) = H(d(\mathbf{x})) = \text{senal}(d(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & d(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -1, & d(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

As funções assintóticas de ponta de fratura representam os campos assintóticos analíticos de deslocamentos no entorno da ponta da trinca, como rege a MFLE, e são expressas por:

$$\{F_l(r, \theta)\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\}, \quad (4)$$

onde (r, θ) são coordenadas polares locais na ponta da fratura. É importante ressaltar que a primeira função, $\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, é descontínua entre as faces da fratura, o que permite

representar a descontinuidade introduzida pela fratura, quando a ponta da mesma está localizada no interior do elemento. Uma outra observação importante é que um mesmo nó não pode receber os dois tipos de enriquecimento concomitantemente, prevalecendo o enriquecimento de ponta de fratura. A Figura 3 ilustra a escolha das funções para os enriquecimentos dos nós. Os nós envoltos com um círculo são os nós enriquecidos com as funções de “salto”, enquanto que os nós envoltos por um quadrado são os nós enriquecidos com as funções assintóticas de ponta de fratura.

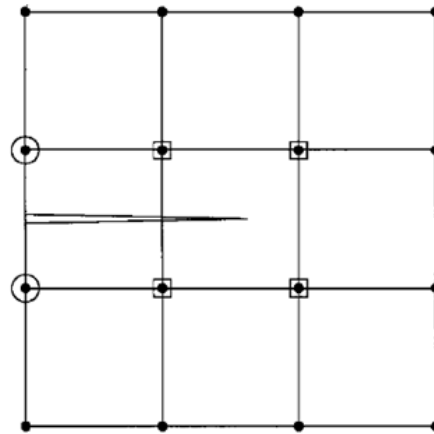


Figura 3. Trinca em uma malha do XFEM (Moes et al., 1999)

3 IMPLEMENTAÇÃO DO ELEMENTO

Neste trabalho, o método XFEM foi implementado computacionalmente para análises bidimensionais de fratura com uso do programa comercial ABAQUS® através da sub-rotina UEL. A implementação realizada permite análises 2D de propagação de fratura com base nas relações da MFLE. As principais características da implementação são o uso dos enriquecimentos de ponta no campo de deslocamentos e o uso do critério de propagação com base nos fatores de intensidade de tensão.

Na sequência do capítulo, são apresentados aspectos da implementação e considerações específicas do elemento XFEM desenvolvido neste trabalho.

3.1 Pré-processamento

Como pré-processamento, foi criado um código em linguagem Fortran (linguagem também utilizada na sub-rotina UEL) para gerar o arquivo *input* com as informações do modelo em questão e gerar também os arquivos com as informações necessárias para o processamento do elemento XFEM da sub-rotina, em especial a lista de nós que serão enriquecidos.

Como dados de entrada, são fornecidas as características da malha, as propriedades do material, a posição inicial arbitrária da trinca e outras informações complementares. Na implementação feita, o modelo gerado tem limitações, tais como a restrição da sua aplicação a problemas com geometria retangular perfeita, sem furos, entalhes e/ou cortes, e a trinca inicial é um único segmento de reta. Outras geometrias terão que ser geradas por ajustes manuais nos arquivos. Não há tratamento para múltiplas trincas.

As informações do XFEM, nós enriquecidos e sinal da função *Heaviside*, tanto na posição inicial, quanto na propagação da fratura, são obtidas através de relações da geometria computacional, entre os segmentos de reta da fratura e os elementos do modelo.

3.2 Incorporação do XFEM através da sub-rotina UEL

Neste item, são apresentadas importantes características presentes na implementação do XFEM realizada nesse trabalho. Tais considerações estão inseridas no código da sub-rotina UEL.

Formulação *shifted-basis*. A aproximação padrão dos elementos finitos obedece a propriedade de Kronecker, que estabelece que os valores dos graus de liberdade u_i são diretamente os valores dos deslocamentos do nó i . A aproximação padrão do XFEM, onde o campo de deslocamentos é composto pelos graus de liberdade tradicionais do MEF mais a contribuição dos enriquecimentos, não mantém esta propriedade. A fim de que na visualização dos resultados dos deslocamentos nodais, sejam apresentados os valores reais da solução dos deslocamentos, faz-se uso da formulação de enriquecimento *shifted-basis* (Zi & Belytschko, 2003; Stapór, 2011). Na Equação 5, é apresentada a formulação modificada, onde x_i é a coordenada nodal do nó enriquecido.

$$u(x) = \sum_{i \in I} u_i N_i(x) + \sum_{i \in J} b_i N_i(x) [H(x) - H(x_i)] + \sum_{i \in K} N_i(x) \left(\sum_{l \in L} c_l^i [F_l(x) - F_l(x_i)] \right) \quad (5)$$

Esta modificação retira a contribuição dos enriquecimentos presente no nó enriquecido, mas a mantém nos pontos de integração.

Integração numérica. O cálculo da matriz de rigidez é feito através de integração numérica sobre o elemento. Em um modelo com XFEM, os elementos que contêm a fratura necessitam de um rearranjo na quadratura de integração, para uma melhor resposta da integração das funções que representam as descontinuidades. Adotou-se na implementação o procedimento de subdivisão dos elementos cortados pela fratura em subpolígonos, sobre os quais serão feitas as integrações. É importante informar que a fratura define uma das arestas dos subpolígonos. Esta subdivisão tem como propósito apenas a integração, sendo a topologia e conectividade da malha mantidas durante todo o processo de propagação (Giner et al., 2009). A Figura 4 ilustra a divisão dos subpolígonos.

Define-se o domínio de integração do problema como o somatório de todos os elementos, sendo estes os subdomínios. No XFEM, define-se o subdomínio como sendo o somatório do conjunto de todos os subpolígonos que compõem o elemento.

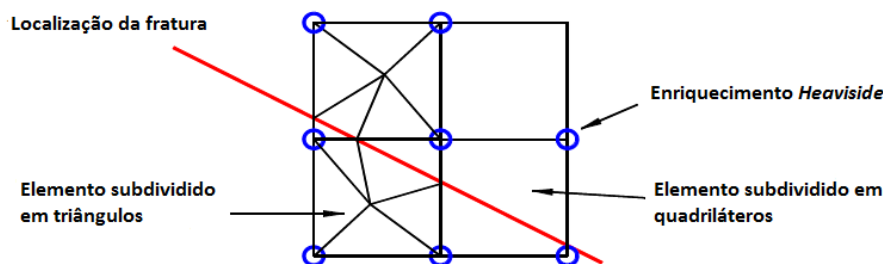


Figura 4. Subdivisão dos elementos para integração (Giner et al., 2009)

Propagação da fratura. No elemento implementado, adotou-se o critério da máxima tensão circunferencial ou da máxima tensão principal proposto por Erdogan & Sih (1963) como critério de propagação de fratura. O critério define que a fratura irá propagar-se na direção de um ângulo crítico θ_{cr} , que corresponde à direção da tensão circunferencial máxima.

$$\theta_{cr} = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right), \quad (6)$$

onde K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão em Modo I e Modo II de carregamento, respectivamente.

Os fatores de intensidade de tensão são obtidos através do uso da integral de interação (Yau et al., 1980) na forma de domínio equivalente (Shih & Asaro, 1988):

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1, \text{Modo I})} \quad \text{e} \quad (7)$$

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1, \text{Modo II})}, \quad (8)$$

onde $E' = E$ para estado plano de tensões e $E' = E / (1 - \nu^2)$ para estado plano de deformações. $M^{(1, \text{Modo I})}$ e $M^{(1, \text{Modo II})}$ são as integrais de interação para os Modos I e II, respectivamente, tendo sua expressão geral na forma de domínio equivalente igual a:

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[-W^{(1,2)} \delta_{1j} + \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA, \quad (9)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, u_i é o vetor de deslocamentos, q é uma função peso arbitrária suave variando de zero a um, tendo o valor unitário para todos os nós dentro do círculo formado por r_d e zero fora deste limite, A é a área do domínio composto por elementos entorno da trinca e $W^{(1,2)}$ é a energia de deformação de interação definida por:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad (10)$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformações. O conjunto de elementos do domínio é composto por todos os elementos que contêm nós dentro de um círculo de raio r_d centrado na ponta da trinca. As variáveis contendo o sobrescrito (1) obtêm respostas do estado de equilíbrio presente da estrutura, sendo essas extraídas da análise convencional em elementos finitos. Já as variáveis que contêm o sobrescrito (2) obtêm respostas de um estado de equilíbrio auxiliar, sendo essas respostas extraídas dos campos assintóticos dos modos de fratura I e II. No cálculo de K_I , utilizam-se as respostas referentes ao Modo I de fratura, enquanto que no cálculo de K_{II} utilizam-se as respostas referentes ao Modo II de fratura.

Crescimento da trinca. A Mecânica da Fratura estabelece que a fratura ocorrerá quando $K = K_c$, ou seja, quando o fator de intensidade de tensão atingir um valor crítico, sendo esse o fator de intensidade de tensão crítico. Uma vez satisfeito o critério de fratura, calcula-se o ângulo crítico de propagação. Com a direção de propagação da fratura estabelecida, acrescenta-se um tamanho Δa de comprimento à fratura, sendo a o tamanho da trinca inicial. Com o novo tamanho de fratura, a análise prossegue e os passos são repetidos, calculando-se o novo ângulo de propagação e fazendo o acréscimo de Δa à fratura até o fim da análise incremental. O valor de Δa é definido pelo usuário de acordo com o problema analisado. O esquema abaixo mostra o fluxo de análise descrito:

- i) Cálculo de K_I e K_{II} [Eqs. (7) e (8)];
- ii) Determinação do ângulo crítico de propagação [Eq. (6)];
- iii) Acréscimo de Δa de comprimento à fratura;
- iv) Atualização da geometria da fratura e determinação dos nós a serem enriquecidos;

- v) Obtenção das soluções do problema (campos de tensão e deformação);
- vi) Novo incremento → retorno ao item i).

A implementação realizada permite a propagação automática da fratura em um único processamento.

Características dos elementos. Os elementos implementados são quadriláterais com quatro nós. Os elementos XFEM possuem um esquema de integração que depende da configuração e subdivisão para integração que eles possuem. A subdivisão dos elementos segue o mesmo raciocínio utilizado por Giner et al. (2009).

4 EXEMPLOS E RESULTADOS

Neste item, são apresentados exemplos numéricos com uso da implementação do XFEM feita nesse trabalho. Primeiramente, é apresentado um exemplo de validação da implementação realizada. Em seguida, foram utilizados modelos físicos de estruturas de concreto para análise de propagação de fratura. Os elementos utilizados nos modelos foram elementos quadriláterais do tipo Q4, formando malhas estruturadas. As malhas apresentadas possuem elementos finitos convencionais e elementos do tipo XFEM.

4.1 Cálculo do ângulo crítico em trinca centralizada

Com a intenção de mostrar a capacidade do método XFEM e também testar a implementação realizada, foi utilizado um exemplo clássico da literatura de modo misto de fratura. Avaliaram-se os fatores de intensidade de tensão para uma trinca centralizada com diferentes inclinações no interior de uma placa submetida a um carregamento uniaxial de tração com valor de $\sigma = 6895 \text{ Pa}$ (1 psi). Foram feitas avaliações com a trinca posicionada em uma inclinação β variando de 0 a 90°. As geometrias da peça e da trinca, as condições de contorno e as propriedades do material utilizadas no modelo estão apresentadas na Fig. 5. Todos os modelos possuem a mesma malha uniforme de 41 x 41 elementos.

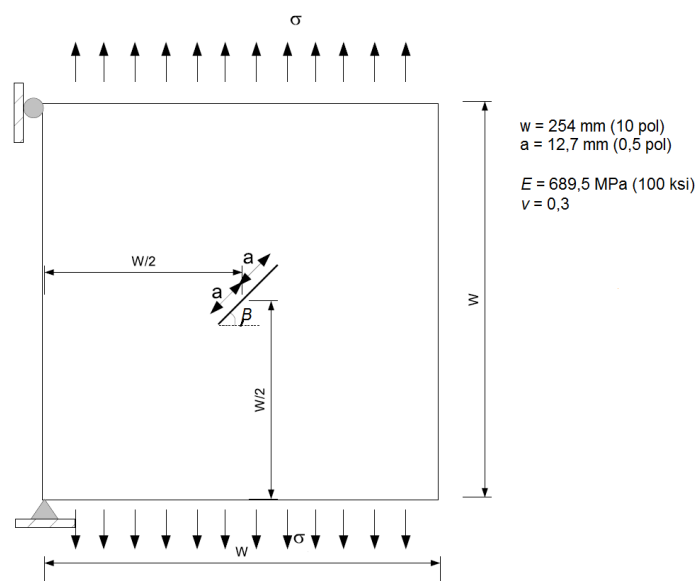


Figura 5. Trinca em uma malha do XFEM (Moes et al., 1999)

Os valores esperados para os fatores de intensidade de tensão são (Yau et al, 1980):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta \quad (11)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (12)$$

Estes resultados analíticos são para uma placa infinita. Considerando que a dimensão da trinca é bem pequena em comparação ao tamanho do modelo, essa aproximação é considerada válida para uma comparação com os valores numéricos obtidos. A comparação dos resultados analíticos com resultados numéricos é vista na Fig 6.

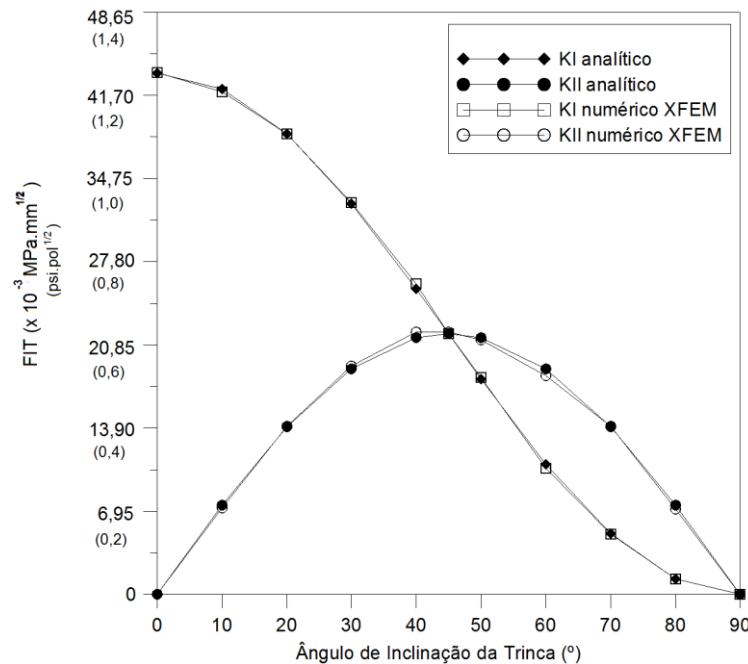


Figura 6. Gráfico comparativo dos fatores de intensidade de tensão

As respostas deste exemplo, um típico caso de modo misto de carregamento, mostram uma boa concordância com as respostas analíticas.

4.2 Ensaio monotônico de flexão de corpo de prova de concreto

O ensaio monotônico de flexão de um corpo de prova de concreto foi utilizado para análise da propagação de fratura submetida a Modo I de carregamento. Como referência, foram usados os resultados experimentais do trabalho de Marangon (Marangon, 2011) sobre concretos autoadensáveis reforçados com fibras de aço. Em seu trabalho, o autor realizou ensaios de flexão em corpos de prova de concreto reforçado com fibras e em corpos de prova de concreto sem fibras, denominados de matrizes. Estes apresentam comportamento quase-frágil e serão o alvo do exemplo.

O ensaio monotônico de flexão foi aplicado a corpos de prova prismáticos com dimensões 100x100x400 mm. O esquema do ensaio segue a Fig. 7, onde se tem o prisma biapoado com vão livre de 300 mm submetido a duas cargas concentradas posicionadas cada uma, em relação ao apoio mais próximo, a uma distância no valor de um terço do vão livre. O ensaio foi realizado com controle do deslocamento do travessão da máquina de aplicação de força.

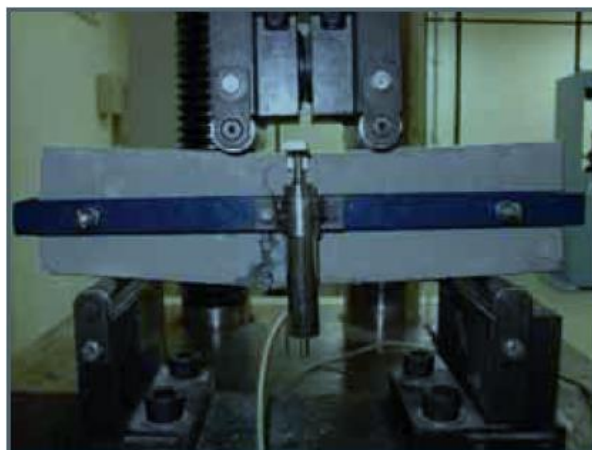


Figura 7. Aparato para ensaio de flexão (Marangon, 2011)

Dentre os materiais utilizados por Marangon, para análise do exemplo utilizou-se as características do material com mistura C1. Suas características seguem na Tabela 1, onde têm-se os valores da média e do coeficiente de variação do módulo de elasticidade aparente e o valor da tenacidade do material.

Tabela 1. Valores de modulo de elasticidade (média e coeficiente de variação) e tenacidade

Mistura	E (MPa)	CV (%)	Tenacidade (kJ/m ²)
C1	35,64	2,21	0,08

A Tabela 2 apresenta os valores de tensão de primeira fissura e tensão de ruptura juntamente com seus respectivos coeficientes de variação.

Tabela 2. Valores (media e coeficiente de variação) das tensões de primeira fissura e de ruptura

Mistura	Primeira Fissura		Pico (Ruptura)	
	σ_{cr} (MPa)	CV (%)	σ_u (MPa)	CV (%)
C1	9,15	3,14	9,15	3,14

O modelo numérico contou com uma malha de 80 x 40 elementos. As propriedades adotadas para o material foram módulo de Young $E = 35,64$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, este último sendo um valor comumente adotado para concreto. Adotou-se estado plano de tensões na análise. A implementação realizada não avalia iniciação de fratura, portanto utilizou-se uma trinca inicial com tamanho de 9 mm. Foi feito um estudo prévio que mostrou que o uso de uma pequena trinca inicial não altera consideravelmente o comportamento do problema. A análise numérica foi realizada com controle dos deslocamentos. A Figura 8 ilustra uma representação do modelo.

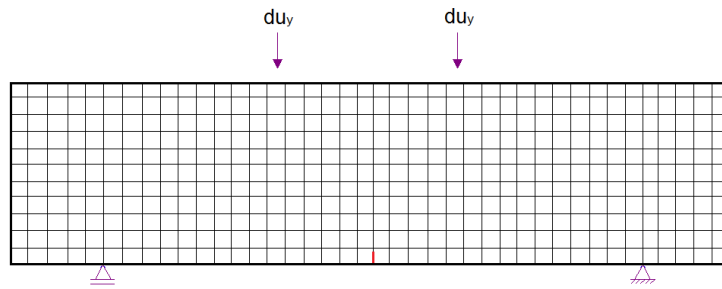


Figura 8. Modelo numérico do corpo de prova submetido a ensaio de flexão monotônica

Como resposta do problema, tem-se o gráfico carga x deslocamento, Fig. 9, contendo o resultado experimental e o resultado do modelo numérico. O deslocamento apresentado é o valor da deflexão vertical do ponto central no topo da amostra. A flecha, deflexão vertical, foi medida através de um dispositivo acoplado à peça posicionado na altura média da peça, conforme ilustrado na Fig. 7.

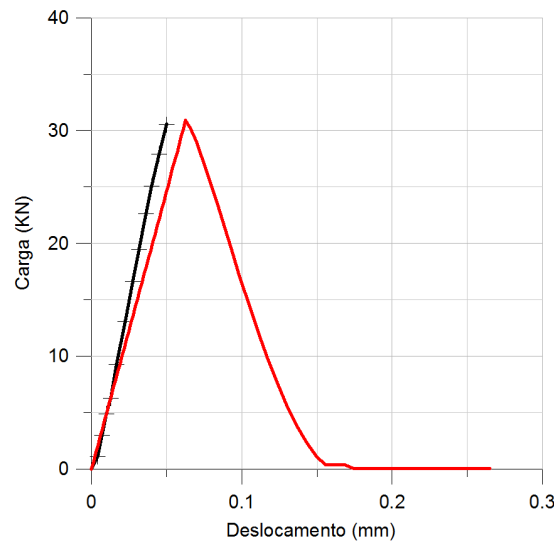


Figura 9. Gráfico carga x deslocamento para os modelos experimental e numérico

Observando-se os resultados obtidos e mesmo sabendo que o concreto é um material com comportamento não-linear, pode-se dizer que o modelo numérico com uso do XFEM, com comportamento puramente linear, representa bem esse caso. O valor experimental do deslocamento máximo da viga de material tipo C1 foi de 0,05 mm e o erro no cálculo do deslocamento máximo obtido numericamente foi em torno de 20%, enquanto que o erro no valor da carga de pico foi menor que 1%. Os erros foram calculados através da Eq. 13. Acrescenta-se que não há uma resposta pós-pico da curva de laboratório, assim, não é possível uma comparação completa da resposta do gráfico.

$$Erro = \frac{\text{Resultado}_{\text{numérico}} - \text{Resultado}_{\text{analítico}}}{\text{Resultado}_{\text{analítico}}} \quad (13)$$

A trajetória de propagação obtida com o modelo numérico (XFEM) seguiu um caminho no plano da trinca, confirmando o padrão de fratura em Modo I obtido experimentalmente, conforme a Fig. 10.

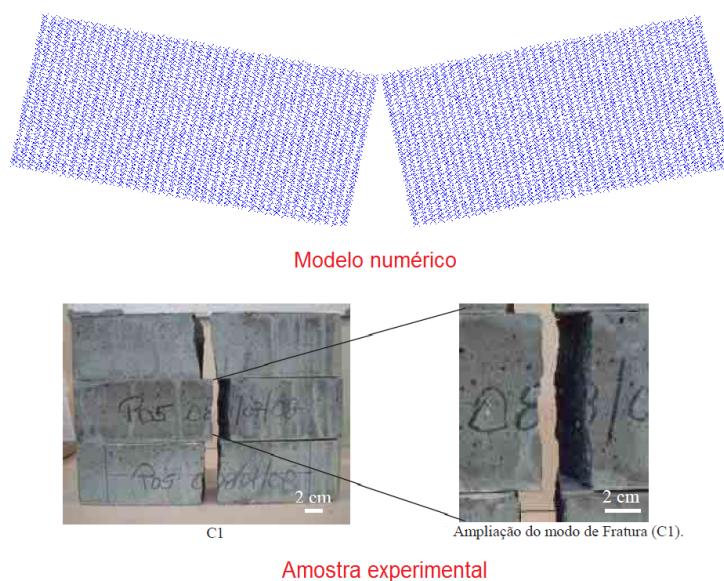


Figura 10. Padrão da fratura em Modo I

O modelo numérico apresentado na Fig. 10 mostra a peça antes da separação total das partes. A visualização do modelo numérico é obtida pela plataforma de visualização do programa ABAQUS®, onde são visualizados somente nós do modelo, para o caso de uso da sub-rotina UEL. É possível ter uma ideia da posição e abertura da fratura em uma escala aumentada.

4.3 Teste de flexão em quatro pontos para fratura em modo misto

Para a análise numérica de um caso físico de propagação de fratura em modo misto, utilizou-se a publicação de Gálvez et al. (1998) como referência. Os referidos autores obtiveram resultados experimentais, assim como também apresentaram respostas numéricas para um teste de flexão em quatro pontos, tratando-se de fratura no modo misto em concreto.

O esquema do teste, ou seja, a geometria da peça, as forças aplicadas e as condições de contorno adotadas, segue a do modelo apresentado na Fig. 11.

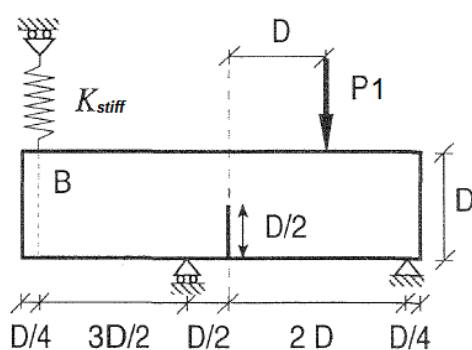


Figura 11. Modelo de teste de flexão em quatro pontos (Gálvez et al., 1998)

Foram realizados testes com a aplicação da força $P1$ através de uma máquina de teste servocontrolada e com a consideração de valores extremos de rigidez da mola (K_{stiff}), sendo denominado teste tipo 1 para $K_{stiff} = 0$ e teste tipo 2 para $K_{stiff} = \infty$. Para os testes tipo 2, os deslocamentos verticais do ponto B foram impedidos. Os testes foram realizados com o

controle da abertura da fratura CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*). Os esquemas dos testes tipo 1 e 2 seguiram conforme apresentados na Fig. 12.

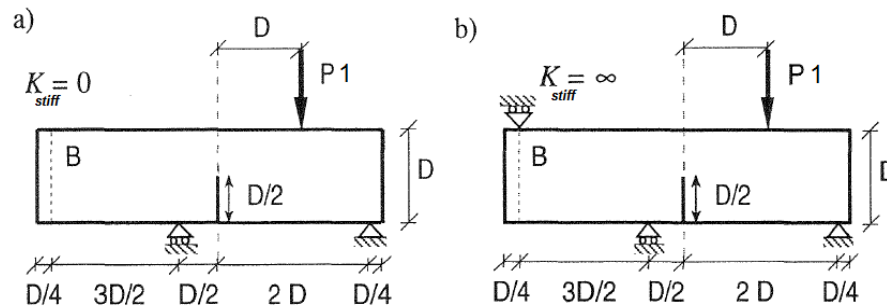


Figura 12. Geometria, forças aplicadas e condições de contorno dos modelos avaliados. (a) Modelo de teste tipo 1 ($K_{stiff} = 0$). (b) Modelo de teste tipo 2 ($K_{stiff} = \infty$) (Gálvez et al., 1998)

Como respostas dos testes, foram avaliadas as trajetórias de propagação da fratura e os gráficos força x CMOD e força x deslocamento, sendo este medido no ponto de aplicação da força P_1 . As trajetórias numéricas de Gálvez et al. foram obtidas com uso do código FRANC2D, um simulador de propagação de fraturas bidimensionais em elementos finitos, sob o critério da máxima tensão circunferencial, mesmo critério adotado na implementação realizada neste trabalho. Os resultados dos gráficos força x CMOD e força x deslocamento foram obtidos com uso do programa ABAQUS® através da incorporação do modelo de fratura coesiva com uso de molas não-lineares. Os autores incorporaram o modelo de fratura coesiva no caminho de propagação já estabelecido com o uso do FRANC2D.

A geometria do problema é definida pelos valores: $D = 150$ mm e espessura da peça = 50 mm. As propriedades do material utilizadas foram energia de fratura $G_f = 69$ N/m e módulo de Young $E = 38$ GPa. O valor da energia de fratura utilizado por Gálvez foi determinado seguindo o procedimento estabelecido pela RILEM TC 50-FMC (RILEM TCS, 1985), sendo esse valor de energia de fratura equivalente ao valor da energia necessária para abertura da fratura, fratura em Modo I. Gálvez não apresentou valor para o coeficiente de Poisson. Para o modelo numérico XFEM, considerou-se $\nu = 0,2$. O modelo XFEM foi analisado através do controle dos deslocamentos.

As trajetórias obtidas com uso da implementação do XFEM apresentaram excelentes resultados. As mesmas encontram-se dentro da envoltória experimental, conforme ilustrado na Fig. 13. Acrescenta-se que as respostas obtidas com os modelos XFEM apresentam comportamentos muito similares às respostas numéricas obtidas com o FRANC2D, como também visto na Fig. 13. Desta maneira, como já exposto por Gálvez et al., conclui-se que a previsão da trajetória da fratura a partir das hipóteses da MFLE é uma boa aproximação para esses tipos de ensaio em estruturas de concreto, mesmo sabendo-se que o fraturamento é um processo não-linear.

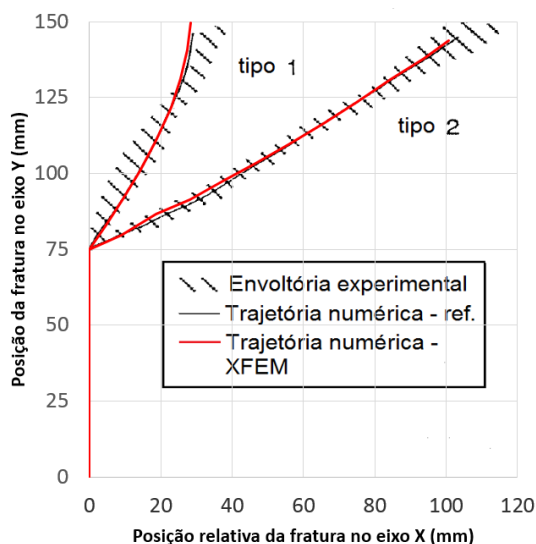


Figura 13. Trajetórias de propagação da fratura para os modelos numéricos e experimental

A Figura 14 mostra a malha dos modelos numéricos das análises dos modelos tipo 1 e 2 em suas configurações indeformadas. A linha vermelha representa a posição inicial da fratura. Já a Fig. 15 mostra o modelo do tipo 1 e o modelo do tipo 2 em suas configurações deformadas.

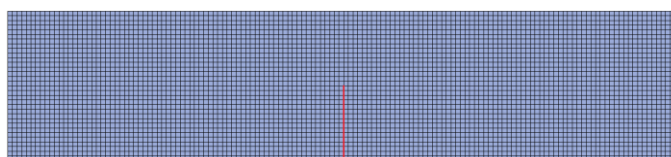


Figura 14. Malha do modelo numérico para as análises tipos 1 e 2

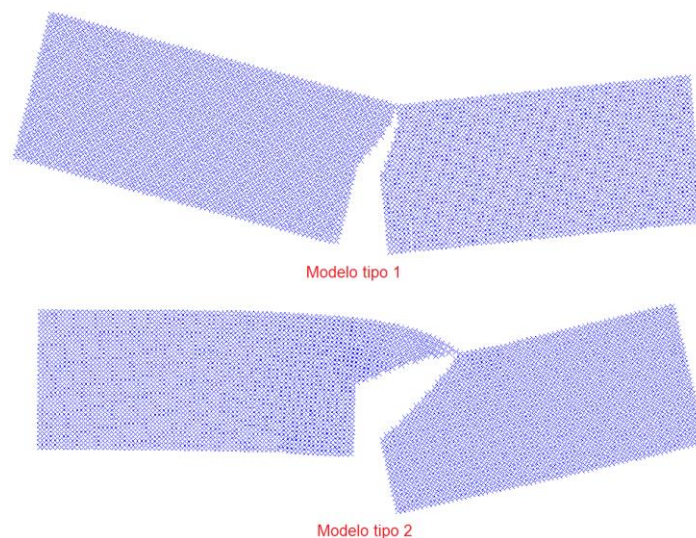


Figura 15. Configuração deformada dos modelos tipos 1 e 2

O critério de fratura adotado neste trabalho tem como base os fatores de intensidade de tensão. Sendo uma análise de fratura em modo misto, utilizou-se o modelo da envoltória de fratura apresentado por Di Leonardo (1979) como critério de fratura. Este é um modelo para

fratura em modo misto dependente apenas do valor da energia de fratura em Modo I e do coeficiente de Poisson. As respostas dos gráficos força x CMOD e força x deslocamento para os testes tipo 1 e 2 encontram-se nas Figs. 16 e 17, respectivamente.

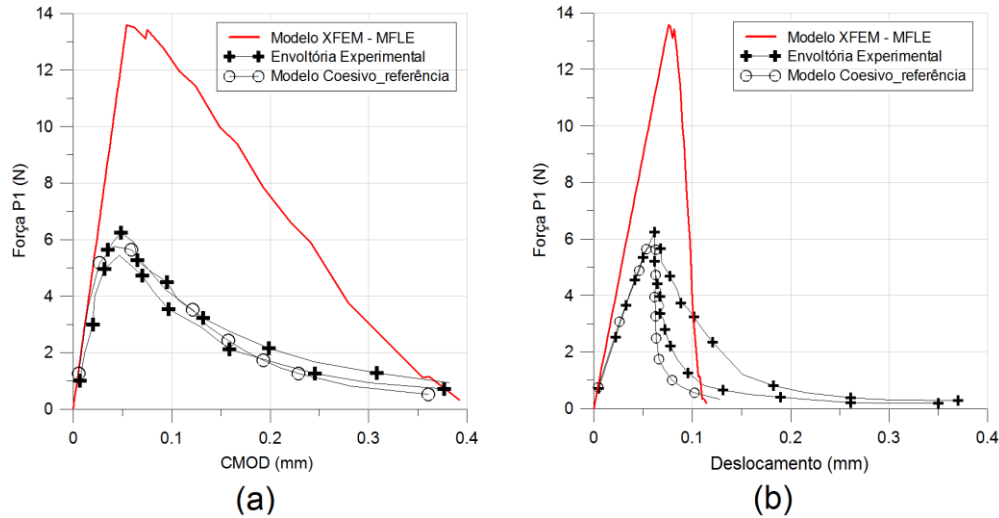


Figura 16. Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento do modelo XFEM em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 1

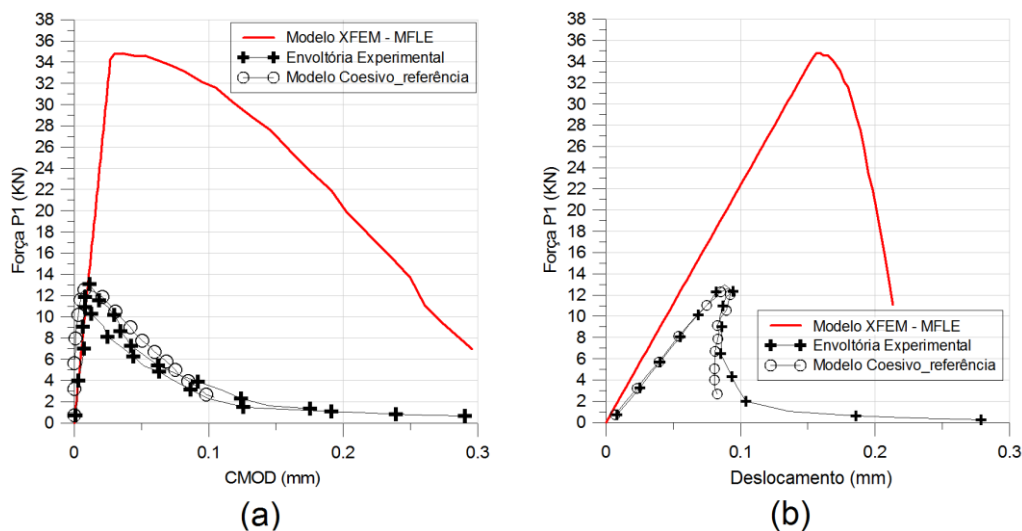


Figura 17. Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento do modelo XFEM em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 2

Ao se analisar os resultados obtidos, constata-se que uma formulação linear elástica não se adequa bem ao caso. Os valores das forças críticas obtidos com a formulação do XFEM, seguindo a MFLE, são muito maiores que os obtidos experimentalmente e numericamente com uso do modelo de zona coesiva por Gálvez et al, tanto no teste tipo 1, quanto no teste tipo 2. Nas zonas pré-pico, observa-se a diferença das tangentes das curvas logo no início da análise, nas curvas carga x deslocamento de ambos os tipos de teste. A forma da curva na região pós-pico também apresenta diferença, onde o modelo linear elástico não consegue representar corretamente a curva de amolecimento do concreto.

5 CONCLUSÃO

A implementação realizada traz algumas contribuições para análises de fratura no ABAQUS®. Além de possibilitar o entendimento do processamento de uma análise de estrutura com fratura, ela possibilita o uso de um critério de fratura diferente daquele empregado pelo programa em análises lineares elásticas. Esta implementação faz uso de um critério de fratura com base nos fatores de intensidade de tensão, enquanto o programa faz uso de um critério com base em energia em seu pacote padrão de análise com XFEM. Uma outra importante característica desta implementação é a consideração dos enriquecimentos de ponta de trinca em seu campo de deslocamentos. O ABAQUS não considera os enriquecimentos de ponta em sua formulação, impondo que a fratura sempre termine em um bordo do elemento. Em comparação com outras implementações do XFEM através de uma sub-rotina UEL, a implementação feita neste trabalho possibilita a propagação da fratura de forma automática seguindo os passos de incremento da análise. Outras implementações fazem a avaliação da propagação externamente à rotina e depois repetem o processo de análise com a nova configuração do problema.

Como conclusão das análises dos exemplos abordados neste trabalho, constata-se que o método XFEM aliado com os conceitos da MFLE mostra ser uma poderosa ferramenta para a predição da trajetória de propagação de fraturas bidimensionais. Foi possível verificar que mesmo para estruturas de concreto, um material com comportamento não linear, é possível prever com excelente aproximação o caminho de propagação de fraturas com uso da teoria linear elástica da mecânica da fratura. Quanto ao comportamento da estrutura, conclui-se que o uso de um modelo linear elástico não consegue representar de forma satisfatória o comportamento de uma estrutura de concreto diante da presença de fraturas. Em respeito disso, Mier (1997) aborda a dificuldade em se representar a propagação de fratura em concreto, uma vez que uma única fratura não se propaga no concreto, mas, sim, ela vai sendo acompanhada de micro fissuramentos, e do surgimento de ramificações e de pontes entre micro fraturas. O mesmo autor relata que para a aplicação da MFLE a estruturas de concreto é necessária uma descrição da estrutura do material e de eventos de micro fissuramentos devem ser considerados no modelo. Os resultados foram obtidos com malhas estruturadas sem refinamento no entorno das trincas. Tal fato mostra a capacidade do método XFEM de obter bons resultados diante de malhas relativamente grosseiras.

REFERÊNCIAS

- Belytschko, T., & Black, T., 1999. Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601-620.
- Di Leonardo, G., 1979. Fracture Toughness Characterization of Materials Under Multiaxial Loading. *International Journal of Fracture*, vol. 15, pp. 537-552.
- Erdogan, F., & Sih, G. C., 1963. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, pp. 519-527.
- Gálvez, J. C., Cendón, D. A., & Planas, J., 2002. Influence of Shear Parameters on Mixed-Mode Fracture of Concrete. *International Journal of Fracture*, vol. 118, pp. 163-189.
- Giner, E., Sukumar, N., Tarancón, J. E., & Fuenmayor, F. J., 2009. An Abaqus Implementation of the Extended Finite Element Method. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, pp. 347-368.

- Griffith, A. A., 1920. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, vol. 221, pp. 163-198.
- Irwin, G. R., 1956. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys. *Sagamore Research Conference Proceedings*, vol. 2, pp. 289-305.
- Marangon, E., 2011. Caracterização Material e Estrutural de Concretos Autoadensáveis Reforçados com Fibras de Aço. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro/Rio de Janeiro.
- Melenk, J. M., & Babuska, I., 1996. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 289-314.
- Mier, J., G., 1997. *Fracture Process of Concrete: Assesmente of Material Parameters for Fracture Models*. CRC Press.
- Moes, N., Dolbow, J., & Belytschko, T., 1999. A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing. *Internatinal Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131-150.
- RILEM TCS, 1985. Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Tests on Notched Beams. *Materials and Structures*, vol. 18, pp. 285-290.
- Shih, C. F., & Asaro, R. J., 1988. Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I - Small Scale Yielding. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, pp. 299-316.
- Stapór, P., 2011. Application of XFEM with Shifted-Basis Approximation to Computation of Stress Intensity Factors. *The Archive of Mechanical Engineering*, vol. 58, pp. 447-483.
- Sukumar, N., & Prévost, J. H., 2003. Modeling Quasi-Static Crack Growth with the Extended Finite Element Method. Part I: Computer Implementation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 7513-7537.
- Yau, J. F., Wang, S. S., & Corten, H. T., 1980. A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, pp. 335-341.
- Zi, G., & Belytschko, T., 2003. New Crack-Tip Elements for XFEM and Applications to Cohesive Cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, pp. 2221-2240.