



APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO RECURSIVO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS DE POISSON

Vinicius Erler de Sousa Ramos

vinicius.ramos@ifes.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

Rodovia BR-101 Norte, km 58, Bairro Litorâneo, São Mateus, ES, Brasil, CEP 29.932-540

Carlos Friedrich Loeffler

carlosloeffler@bol.com.br

Universidade Federal do Espírito Santo

Avenida Fernando Ferrari, nº 514, Goiabeiras, Vitória, ES, Brasil, CEP 29.075-910

Resumo. *This paper presents the mathematical steps and implementation of the Recursive Boundary Element Procedure for Poisson problems. The purpose is improve the accuracy of the numerical values obtained by standard Boundary Element Method solution, particularly using meshes with low degree of refinement. Usually, with the Boundary Element Method, the values in internal points are determined by reapplying an integral equation, after being calculated unknown boundary nodal values. The same procedure, reusing the integral boundary equation, but taking new source points on the boundary is performed in recursive procedure. Then, in this work it is shown that this idea, already used successfully in problems governed by the Laplace and Navier Equations, can be effectively used to improve the accuracy for scalar problems with sources, through the reusing of the boundary integral equation. The mathematical basis of the recursive procedure comes from the idea of the method of weighted residues, known to be an important numerical tool based on the minimization of waste. To avoid errors relating to domain integrals, these are adequately solved by the Galerkin Tensor. Problems that have analytical solution are solved to certify the accuracy of the proposed numerical procedure.*

Palavras Chave: *Boundary Element Method, Recursive Procedure, Poisson Equation, Galerkin Tensor.*

1 INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos foram desenvolvidos objetivando solucionar problemas não resolvíveis analiticamente ou cujos modelos empíricos seriam extremamente caros. Porém, estes métodos resultam numa aproximação da realidade, de forma que os resultados não são exatos. Desta forma, buscam-se desenvolver técnicas que possam minimizar as diferenças entre os resultados aproximados e a solução exata.

No que concerne ao Método dos Elementos de Contorno (MEC), cuja característica principal é a discretização apenas do contorno do problema, demonstra-se que sua formulação integral apresenta implicitamente a mesma estrutura de minimização de resíduos proposta pelo Método dos Resíduos Ponderados (MRP) (Brebbia e Dominguez, 1992). Então, a aplicação das equações integrais do MEC implica em utilizar também uma técnica de redução do erro.

Ainda, uma vez que a discretização no MEC ocorre apenas no contorno do problema, apenas os valores no contorno são calculados. Se houver interesse em calcular valores no domínio do problema é preciso utilizar novamente a equação integral utilizando novos pontos fonte dentro do domínio do problema. Ao reutilizar a equação integral, reaplica-se a minimização de resíduos do MRP tornando os resultados calculados no domínio mais precisos que os calculados no contorno.

Observando estes resultados, Loeffler e Peixoto (2013) utilizaram o mesmo princípio para obter resultados mais precisos no contorno calculando os valores em pontos diferentes dos utilizados anteriormente, mas aproveitando os resultados deles. Mostrou ainda que em problemas governados pela Equação de Laplace a utilização deste procedimento, denominado recursivo, melhora a precisão dos resultados.

Este trabalho objetiva aplicar o procedimento recursivo em problemas governados pela Equação de Poisson verificando se a reutilização da equação integral do MEC aumenta a precisão dos resultados.

2 FORMULAÇÃO INTEGRAL

A Equação de Poisson pode ser enxergada como a Equação de Laplace não homogênea. Fisicamente pode representar os mesmos problemas governados por Laplace, como condução de calor, escoamento de fluidos, problemas de torção; no entanto, o termo não homogêneo $p(x)$ dado pela Eq. (1) a seguir representa uma ação dentro do domínio do problema, como uma fonte ou um sumidouro de um problema de escoamento.

$$u_{,ii} = p(x) \quad (1)$$

O MEC utiliza de uma função auxiliar u^* que atua como uma função de ponderação (Brebbia e Dominguez, 1992), sendo ela a solução de um problema correlato com domínio infinito e uma fonte concentrada aplicada num ponto específico ξ . Desta forma, integrando-se a Eq. (1) no domínio físico Ω , encontra-se a Eq. (2), dada por:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} p(x) u^* d\Omega \quad (2)$$

No lado esquerdo da Eq. (2) está o operador Laplaciano, aplicado sobre a função u . A integral que está definida sobre o domínio do problema é convertida em uma integral de contorno através da aplicação da técnica de integração por partes seguida do Teorema da Divergência. Após aplicar este procedimento duas vezes, obtém-se a Eq. (3).

$$\int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = \int_{\Omega} p(x) u^* d\Omega \quad (3)$$

A última integral de domínio do lado direito da equação é resolvida a partir da utilização de uma função de ponderação adequada. Para problemas bidimensionais, u^* e sua derivada normal q^* são dadas pelas Eq. (4) e (5) a seguir:

$$u^*(\zeta; x) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\zeta; x) \quad (4)$$

$$u_{,i}^*(\zeta; x) = q^*(\zeta; x) = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

Para maior clareza, o problema fundamental do qual resultam as expressões anteriores é dado por:

$$u_{,ii}^*(\zeta; x) = -\Delta(\zeta; x) \quad (6)$$

E a Eq. (6) representa a função Delta de Dirac. Desta forma, sua integral é escrita como a Eq. (7):

$$c(\zeta) u(\zeta) + \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Gamma = \int_{\Omega} p(x) u^* d\Omega \quad (7)$$

Nesta última equação, $c(\zeta)$ é um coeficiente associado à suavidade do contorno em que se localiza o ponto fonte ζ e seu valor para contorno suaves é igual a meio (Brebbia et al., 1984).

3 APLICAÇÃO DO TENSOR DE GALERKIN

3.1 Procedimento Geral

Deseja-se tratar o lado direito da Eq. (7) conforme foi feito com o lado esquerdo. Para tanto, considera-se a função u^* sendo uma primitiva de uma função G^* , mais precisamente como sendo o Laplaciano desta. Assim, sendo:

$$G^*(\zeta; x) = \frac{1}{8\pi} r^2 (1 - \ln r) \quad (8)$$

$$G_{,i}^*(\zeta; x) n_i = \frac{1}{8\pi} \left[r + 2 \ln \frac{1}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad (9)$$

Ao substituir na Eq. (7), tem-se:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Gamma = \int_{\Omega} p(x) G_{,ii}^* d\Omega \quad (10)$$

Com essa estrutura permite-se seguir os mesmos passos realizados do lado esquerdo da equação, aplicando-se sucessivamente a integração por partes e o Teorema da Divergência, obtendo como resultado a Eq. (11):

$$\int_{\Omega} p(x) G_{,ii}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p(x) G_{,i}^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{,i}(x) n_i G^* d\Gamma + \int_{\Omega} p_{,ii}(x) G^* d\Omega \quad (11)$$

Tal procedimento ainda resulta numa integral de domínio. Neste trabalho serão utilizadas somente ações de domínio cujo Laplaciano seja nulo, anulando naturalmente esta integral, para que se possa efetivamente testar a eficiência do procedimento recursivo sem outras aproximações. Desta forma, a equação básica integral utilizada é mostrada na Eq. (12).

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p(x) G_{,i}^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{,i}(x) n_i G^* d\Gamma \quad (12)$$

3.2 Particularidades numéricas

A discretização é feita utilizando-se o método da colocação, que é simples e fornece resultados satisfatórios para os problemas em estudo, e utilizando-se elementos retilíneos. Explicitando devidamente o núcleo da segunda integral do lado direito da Eq. (12), tem-se:

$$p_{,i}(x) n_i = \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = z_1 n_1 + z_2 n_2 = z \quad (13)$$

Onde n_1 e n_2 representam os cossenos diretores. Uma vez que estas integrais possuem termos relativos à distância do ponto fonte ao elemento de integração, ocorre uma singularidade quando o elemento coincide com o ponto fonte, de forma que elas devem ser analisadas à parte. Explicitando a primeira integral do lado direito da Eq. (12):

$$\int_{\Gamma} p(x) G_{,i}^*(\xi; x) n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} (p_1^e \phi_1 + p_2^e \phi_2) G_{,i}^*(\xi; x) n_i d\Gamma \quad (14)$$

Na Eq. (14) ϕ_1 e ϕ_2 representam as funções de aproximação de Galerkin, lineares neste caso, e p_1 e p_2 são os valores da ação de domínio no início e no fim do elemento e . O produto das funções $G_{,i}^*(\xi; x) n_i$ também merece ser observado cautelosamente:

$$G_{,i}^*(\xi; x) n_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} = r_{,i} n_i = \frac{r_i n_i}{r} \quad (15)$$

Quando a integração se dá sobre o elemento onde está localizado o ponto ξ , este produto escalar se anula, anulando também a integral. Quanto à segunda integral do lado direito da Eq. (12), a integração sobre os elementos anterior ($e-1$) e posterior (e) ao ponto fonte afeta o resultado sobre z_i . A Figura 1 exemplifica esta situação e a Eq. (16) detalha a integração sobre os elementos:

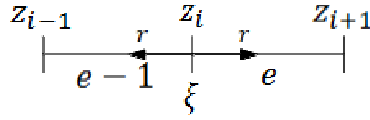


Figura 1. Elementos anterior e posterior ao ponto fonte

$$\int_{\Gamma_{e-1}} (z_{i-1}\phi_1 + z_i\phi_2)G^*(\xi; x_{e-1})d\Gamma_{e-1} + \int_{\Gamma_e} (z_i\phi_1 + z_{i+1}\phi_2)G^*(\xi; x_e)d\Gamma_e. \quad (16)$$

Como já foi dito, as funções de forma de Galerkin utilizadas são lineares, e fazendo:

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{L}. \quad (17)$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L}. \quad (18)$$

Aplicando-se na Eq. (16) e considerando apenas os termos referentes a z_i :

$$\frac{z_i}{8\pi} \int_0^{L_{e-1}} \left(\frac{x}{L_{e-1}} \right) r^2 (1 - \ln r) dr + \frac{z_i}{8\pi} \int_0^{L_e} \left(\frac{1-x}{L_e} \right) r^2 (1 - \ln r) dr. \quad (19)$$

A Figura 2 mostra o gráfico das funções do núcleo das integrais, e mostra que elas convergem.

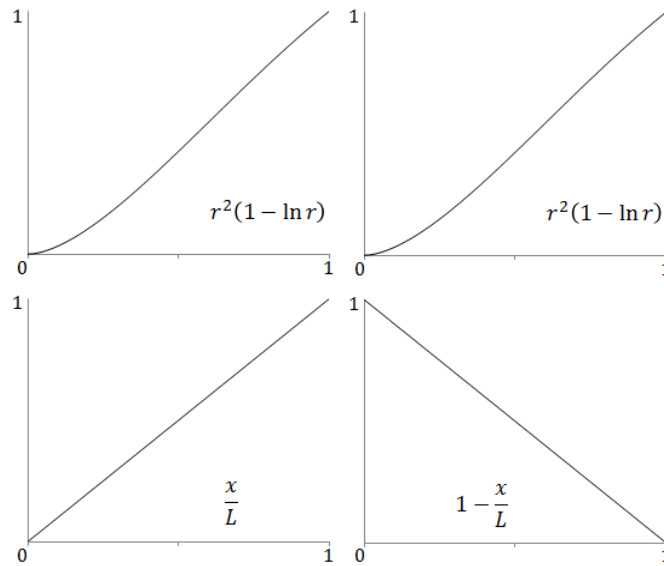


Figura 2. Gráfico das equações dos núcleos das integrais

Ao resolver as integrais da Eq. (19), tem-se a Eq. (20):

$$\frac{z_i}{8\pi} \left[\frac{L_{e-1}^3}{16} (5 - 4 \ln L_{e-1}) + \frac{L_e^3}{144} (19 - 12 \ln L_e) \right]. \quad (20)$$

Neste trabalho utilizam-se elementos de mesmo comprimento em todo o contorno, simplificando a Eq. (20) à Eq. (21).

$$\frac{z_i L^3}{72\pi} (4 - 3 \ln L) \quad (21)$$

Ao fazer isto, substitui-se a integração numérica em pontos de singularidade por soluções analíticas, exatas, melhorando a precisão do método ao reduzir aproximações. Ao se colocar pontos fontes em quantidades iguais às de pontos nodais é possível gerar o sistema matricial mostrado pela Eq. (22):

$$[\tilde{H}] \{ \tilde{U}_k^e \} = [\tilde{G}] \{ \tilde{Q}_k^e \} + \{ \tilde{P} \} \quad (22)$$

$[\tilde{H}]$ e $[\tilde{G}]$ são as matrizes de coeficientes que acompanham os valores de $\{ \tilde{U}_k^e \}$ e $\{ \tilde{Q}_k^e \}$ respectivamente, enquanto que $\{ \tilde{P} \}$ é o vetor de valores relativos à ação de domínio do problema.

4 O PROCEDIMENTO RECURSIVO

O Método dos Elementos de Contorno apresenta-se como uma formulação que calcula diretamente soluções na variável básica e em sua derivada normal apenas no contorno do problema. Se for desejado conhecer os valores da variável básica no interior do domínio do problema é preciso reutilizar a Eq. (12), colocando novos pontos fonte na posição desejada no interior do problema. A partir destes novos pontos fonte geram-se novas matrizes, cuja ordem dependerá de quantos pontos fonte são colocados. Ressalta-se, entretanto, que como numa espécie de pós-processamento computacional, nenhum novo sistema matricial será resolvido, pois as grandezas incógnitas da variável básica estão explícitas e apenas produtos matriciais estão envolvidos, de modo que o custo computacional é bastante baixo. Mas este trabalho objetiva recalcular valores no contorno, e sendo este suave, calcula-se o potencial em novos pontos fonte, denominados pontos recursivos ζ^r , através da Eq. (23). Para calcular o valor do fluxo, deriva-se a Eq.(23) em relação ao ponto ζ , obtendo a Eq. (24)

$$(0.5)u(\zeta^r) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u^*(\zeta^r; X) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q^*(\zeta^r; X) d\Gamma_e \\ + \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G_{,i}^*(\zeta^r; X) n_i d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N z_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G^*(\zeta^r; X) d\Gamma_e \quad (23)$$

$$(0.5)q(\zeta^r) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u_{,n}^*(\zeta^r; X) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q_{,n}^*(\zeta^r; X) d\Gamma_e \\ + \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} (G_{,n}^*(\zeta^r; X) n_i)_{,j} d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N z_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G_{,n}^*(\zeta^r; X) d\Gamma_e \quad (24)$$

Ressalta-se que para contornos suaves do valor associado a $q(\zeta^r)$ também é igual a meio (Loeffler, 2011 e Mansur et al., 1997). O termo z_k^e remete à Eq. (13). A posição dos novos pontos fonte não deve coincidir com a dos pontos nodais, porque estes já foram objeto de minimização de resíduos; nem devem ser posicionados onde os valores já são prescritos. A utilização recursiva da equação integral é mais eficaz quando os novos pontos se situam

aproximadamente meia distância de dois pontos nodais adjacentes, ilustrado na Figura 3. Deste modo, as funções de forma ϕ_k precisam ser reescritas, conforme Eqs. (25) e (26).

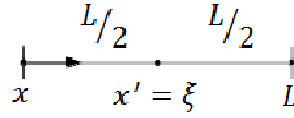


Figura 3. Colocação do ponto fonte recursivo no meio do elemento

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{x'}{L} \quad (25)$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L} = \frac{1}{2} + \frac{x'}{L} \quad (26)$$

Então, as integrais de contorno podem ser distinguidas em dois grupos: uma composta pela integração referente aos elementos que não contém o ponto ξ , e outra referente à integração do elemento que contém o ponto ξ . A integração que contém o termo $G^*_{,i}(\xi^r; X)n_i$ se anula no elemento que contém ponto fonte, como já foi demonstrado. Já a outra integral:

$$\int_{\Gamma_\xi} z_i G^*(\xi^r; x') d\Gamma_e = z_1^\xi \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x'}{L} \right) G^*(\xi^r; x') dx' + z_2^\xi \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{x'}{L} \right) G^*(\xi^r; x') dx' \quad (27)$$

Recorrendo à visualização gráfica dos núcleos destas integrais, a Figura 4 mostra que a integração sobre o produto das funções ímpares pela função par G^* no intervalo dado se anula, de modo que fica apenas a integração sobre o valor constante.

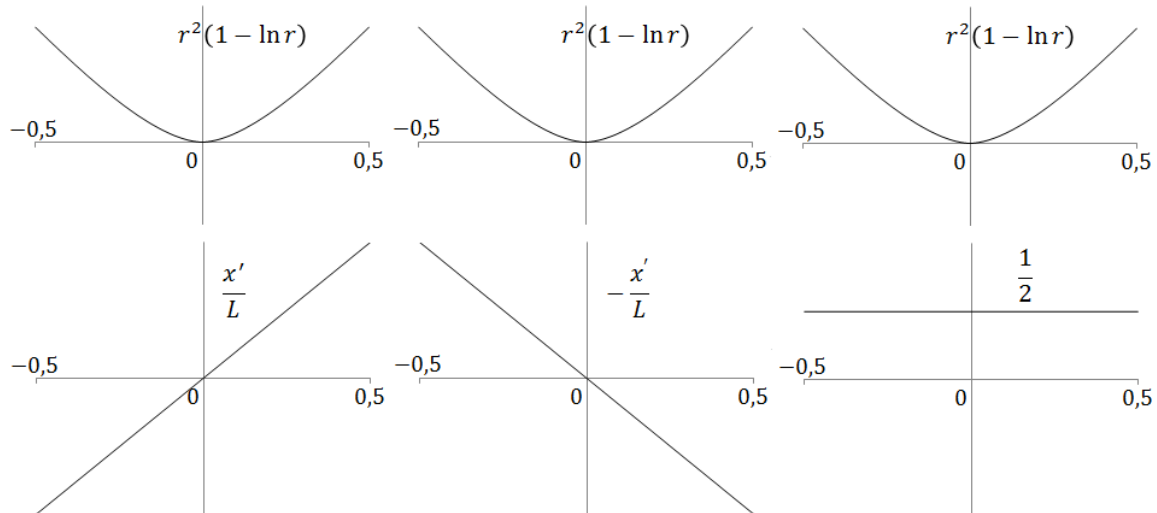


Figura 4. Gráfico das equações dos núcleos das integrais

Logo, resolvendo a Eq. (27) obtém-se a Eq. (28):

$$\int_{\Gamma_\xi} z_i G^*(\xi^r; x') d\Gamma_e = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{L^3}{24} \left(\frac{4}{3} + \ln \frac{2}{r} \right) \right] z \quad (28)$$

5 TESTES REALIZADOS

A metodologia e equações apresentadas na seção anterior foram aplicadas a três problemas de potencial escalar governados pela Equação de Poisson, com características adequadas àquela formulação, ou seja, os termos fonte são funções harmônicas e seu Laplaciano é nulo, anulando a integral de domínio da Eq. (11). Em todos os casos a geometria dos problemas é sempre quadrada com lados de medida unitária e foram realizados testes com quatro malhas diferentes em cada problema, contendo 16, 32, 64 e 80 nós, incluídos os nós duplos nos vértices.

Foram calculados os valores desconhecidos de potencial e de fluxo no contorno do problema. A seguir foi aplicado o procedimento recursivo calculando-se novamente os valores no contorno, em novos pontos. Os resultados obtidos nos procedimentos direto e recursivo foram comparados com a solução analítica, cuja obtenção não pode ser demonstrada neste trabalho.

Foi calculado o erro médio relativo de cada procedimento, tomando-se como parâmetro relativo o maior valor absoluto que a solução exata pode atingir na região delimitada pelo contorno (incluindo o domínio do problema). Foram considerados o maior valor do potencial para cálculo do erro relativo da solução aproximada para o potencial, e o valor máximo da derivada no cálculo do erro relativo para a solução aproximada do fluxo.

A seguir são apresentados os testes realizados e os resultados de cada um.

5.1 Ação de domínio constante

A Figura 5 mostra o problema. A ação de domínio é constante, um lado do contorno possui condição de contorno essencial nula enquanto nos outros três a condição de contorno natural é nula. Fisicamente poderia representar uma barra engastada submetida à ação do peso próprio uniforme em toda a sua extensão.

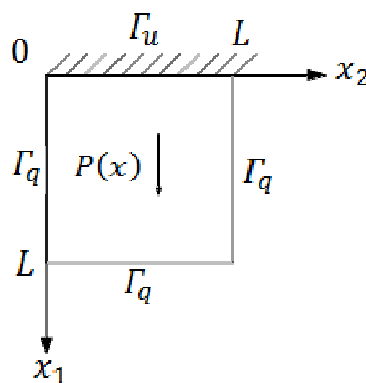


Figura 5. Representação esquemática dos problemas das seções 5.1 e 5.2

Onde:

$$p(x) = \rho_0 g \quad (29)$$

As soluções analíticas deste problema são:

$$u(x) = \rho_0 g \left[\frac{x^2}{2} - Lx \right] \quad (30)$$

$$\frac{du}{dx} = \rho_0 g [x - L] \quad (31)$$

A ação de domínio foi implementada com um valor unitário. Os valores dos erros médios para malhas com diferentes níveis de refinamento são mostrados na Figura 6.

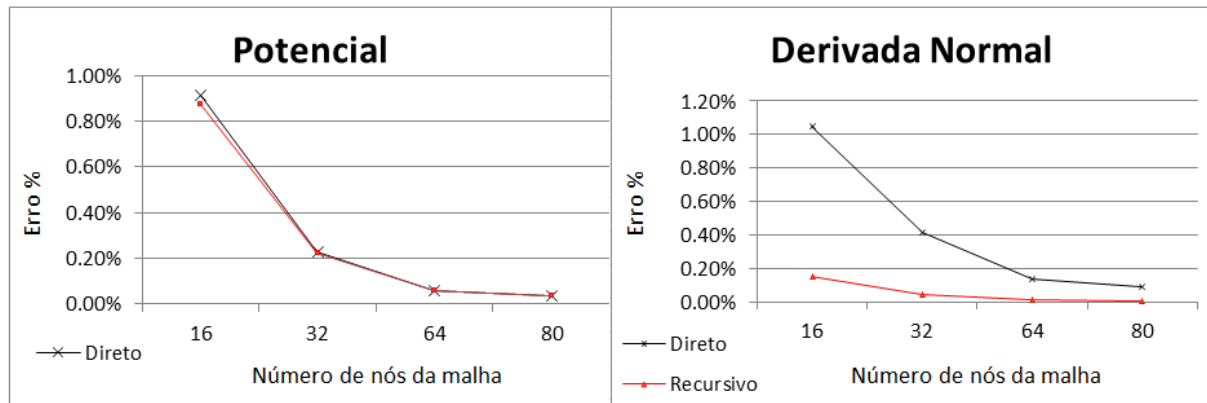


Figura 6. Erro relativo percentual dos procedimentos direto e recursivo

Para este problema percebe-se que o valor de erro no cálculo do potencial foi muito parecido entre o procedimento direto e o recursivo, com uma ligeira vantagem para o procedimento recursivo. No caso do potencial, cuja variação analítica neste caso é quadrática, o uso de elementos lineares com o MEC já fornece boa precisão. Pode-se adiantar que sempre que os valores numéricos ofereçam boa precisão e, naturalmente, nenhuma minimização eficiente de resíduos for cabível, a diferença de resultados entre o procedimento recursivo e a solução direta não será significativa. Isto é ratificado com o comportamento das soluções com o refinamento das malhas.

Porém, no cálculo da derivada do potencial o procedimento recursivo obteve resultados mais precisos. A diferença foi maior quando se utilizou malhas pobres, enquanto que o uso de malhas refinadas aproximaram os resultados mas ainda sendo possível identificar no gráfico uma vantagem para o procedimento recursivo, que com as malhas de 64 e 80 nós chegaram a ter erro da ordem de $10^{-2}\%$, enquanto o procedimento direto chegou a $10^{-1}\%$.

Cabe destacar que embora as derivadas do potencial sejam descritas por funções de mais baixa ordem, o seu cálculo por meio de métodos numéricos é frequentemente menos preciso, mesmo pelo MEC. Isto de certo modo ratifica o melhor desempenho do procedimento recursivo neste caso.

5.2 Ação de domínio linear

Este exemplo difere do problema anterior apenas pela ação de domínio que desta vez é linear, conforme Eq. (32). As Eqs. (33) e (34) são as soluções exatas para potencial e fluxo.

$$p(x) = \frac{\rho_0 g}{E} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (32)$$

$$u(x) = \frac{\rho_0 g}{E} \left[-\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2} \right] \quad (33)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho_0 g}{E} \left[-\frac{x^2}{2L} + x - \frac{L}{2} \right] \quad (34)$$

Considerando que a aresta do problema é unitária, também foram utilizados valores unitários para a razão $\rho_0 g/E$. Os valores calculados de erro são mostrados na Figura 7.

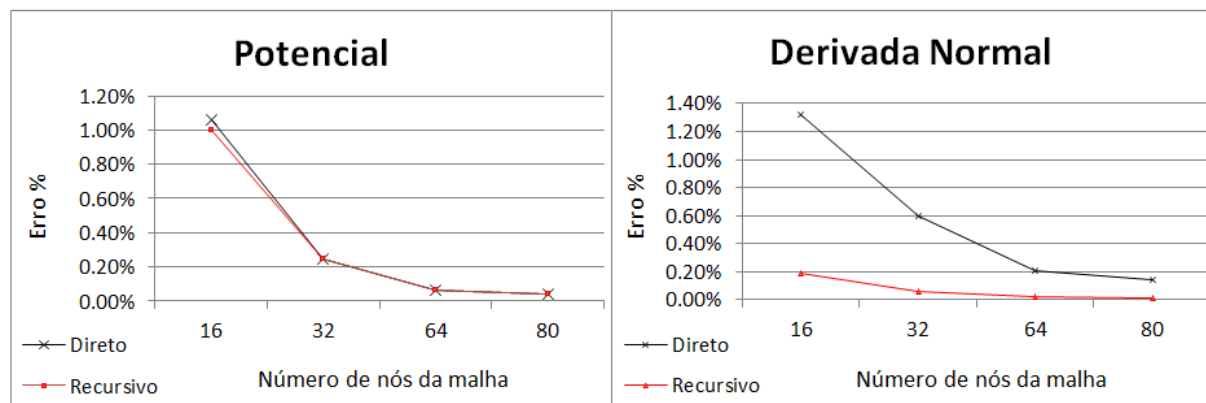


Figura 7. Erro relativo percentual dos procedimentos direto e recursivo

Mais uma vez os resultados para o cálculo do potencial dos procedimentos direto e recursivo estiveram muito próximos, desta vez com uma pequena vantagem para o procedimento direto em malhas pouco refinadas. Com o aumento do refinamento os dois resultados praticamente se equivalem.

Porém, os resultados são bem diferentes quando se calcula o potencial do problema. Novamente o procedimento recursivo apresenta melhores resultados desde malhas pobres em nós até malhas mais refinadas. Por comparação, para obter a mesma precisão do procedimento recursivo com uma malha de 16 nós, o procedimento direto precisou de uma malha de 64 nós, quatro vezes mais nós, exigindo computacionalmente bem mais que o procedimento recursivo. Ainda, o procedimento recursivo nas duas malhas mais refinadas chegou a ter erro de $10^{-2}\%$, enquanto o procedimento direto conseguiu apenas $10^{-1}\%$.

5.3 Membrana com carga constante

Neste problema buscou verificar uma situação onde apenas a derivada do problema é calculada. Ele pode ser visto como uma membrana fixa em todo o seu contorno sujeita a uma ação de domínio constante e unitária. A Figura 8 demonstra o problema.

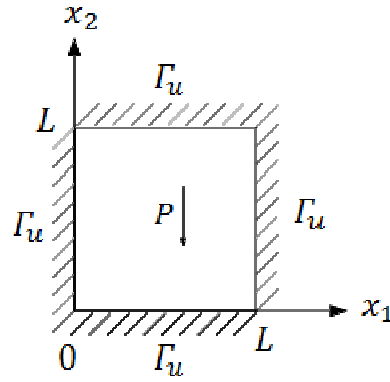


Figura 8. Representação esquemática do contorno com condição de contorno essencial nula

Dado o interesse apenas nas derivadas do problema, apresenta-se a solução exata apenas para as derivadas:

$$\frac{du}{dx_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL}{m\pi^3(n^2 + m^2)} \cos\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \quad (35)$$

$$\frac{du}{dx_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL}{n\pi^3(n^2 + m^2)} \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \quad (36)$$

Os erros calculados estão apresentados na Figura 9:

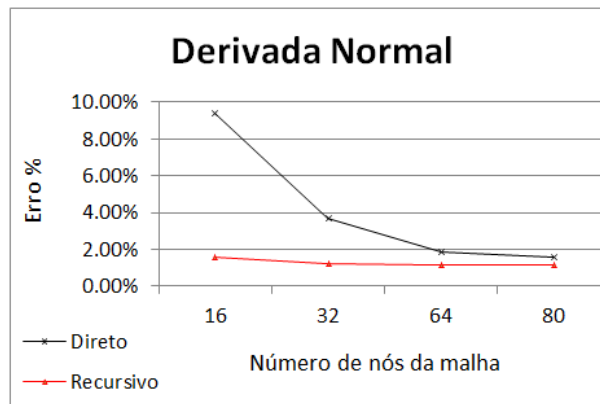


Figura 9. Erro relativo percentual dos procedimentos direto e recursivo

Aqui o procedimento recursivo se demonstrou muito poderoso em relação ao procedimento direto. Nas malhas mais refinadas os dois ficaram próximos, porém nas malhas menos refinadas o procedimento recursivo apresentou erro 5 vezes menor. Interessante notar que o erro do procedimento recursivo se manteve praticamente estável desde as malhas mais pobres, melhorando muito pouco. Ainda, a malha com 80 nós no procedimento direto obteve resultado semelhante à malha de 16 nós do procedimento recursivo.

6 CONCLUSÕES

O procedimento recursivo, baseado na reutilização da formulação integral do Método dos Elementos de Contorno, reaplica um procedimento de expurgo de resíduos, refinando os resultados calculados previamente pela formulação tradicional do método. Os resultados demonstram que de fato há melhoria dos resultados embora essa melhoria precisão dos resultados só foi significativa no cálculo dos valores do fluxo.

Essa diferença também se tornou mais evidente quando foram utilizadas malhas pobres. Com o refinamento delas, a diferença diminuiu embora os valores de erro tenham se mantidos a uma diferença de uma ordem de grandeza, favorável ao procedimento recursivo.

O esforço computacional para calcular novos valores é muito reduzido em comparação ao cálculo direto, visto envolver apenas produtos matriciais. Combina-se a isto o fato de que os valores de erro do procedimento direto só conseguiram igualar-se aos do procedimento recursivo com a utilização de malhas 4 ou 5 vezes mais refinada. Observa-se que o custo computacional de tal precisão é elevado quando comparado ao procedimento recursivo.

REFERENCES

- Brebbia, C.A., Dominguez, J., 1992. *Boundary Elements – An Introductory Course*. WIT Press.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C., Wrobel, L.C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag.
- Loeffler, C.F., 2001. A Recursive Application of the Integral Equation in the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 35, 77-84.
- Loeffler, C.F., Peixoto, R.G., 2013. Hyper-Singular Dual Reciprocity Formulation for Potential Problems. *Computer Modeling in Engineering and Science*, vol. 93, n. 4, pp. 253-276.
- Mansur, W.J., Fleury Jr., P., Azevedo, J.P.S., 1997. A vector approach to the hyper-singular BEM formulation for Laplace's equation in 2D. *International Journal of BEM Communications*, vol.8, pp. 239-250.