



## Problema de Controle Ótimo por Fontes Concentradas

**Welerson Fernandes Kneipp**

**Thiago José Machado**

**Antonio André Novotny**

welerson.kneipp@cefet-rj.br

thiagojm@lncc.br

novotny@lncc.br

CEFET/RJ, Campus Petrópolis, Coordenação de Licenciatura em Física  
Rua do Imperador 971, 25620-003, Petrópolis, RJ, Brasil  
LNCC/MCTI, Laboratório Nacional de Computação Científica  
Avenida Getúlio Vargas 333, 25651-075, Petrópolis, RJ, Brasil  
LNCC/MCTI, Laboratório Nacional de Computação Científica  
Avenida Getúlio Vargas 333, 25651-075, Petrópolis, RJ, Brasil

**Abstract.** *Nesse trabalho o problema de controle ótimo por fontes concentradas é estudado. Em particular, o controle é dado por massas de Dirac e o estado é solução da equação de Poisson. Objetiva-se, portanto, minimizar um funcional que mede a distância entre o estado e uma função alvo em relação à quantidade, intensidades e localizações das massas de Dirac. A ideia básica consiste em calcular a variação do referido funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis. O resultado obtido é então utilizado para construir um novo método não iterativo de resolução do problema proposto, sem a necessidade de introduzir técnicas de regularização. Finalmente, alguns resultados numéricos são apresentados a fim de ilustrar a aplicabilidade do método aqui desenvolvido no contexto de problemas de controle ótimo, bem como na resolução de certas classes de problemas inversos.*

**Keywords:** *Problemas de controle, Massas de Dirac, Problemas inversos.*

# 1 INTRODUÇÃO

Seja um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  com fronteira Lipschitz contínua  $\partial\Omega$ . Sejam ainda dois subconjuntos  $\Omega_o \subseteq \Omega$  e  $\Omega_c \subseteq \Omega$ , denotados como domínios de observação e de controle, respectivamente. Neste trabalho considera-se o seguinte problema de controle ótimo

$$\underset{b \in C_\delta(\Omega_c)}{\text{Minimize}} \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u - z\|_{L^2(\Omega_o)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u - z)^2 dx. \quad (1)$$

O conjunto de soluções admissíveis  $C_\delta(\Omega_c)$  é dado por

$$C_\delta(\Omega_c) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta(x - x_i), \quad x_i \in \Omega_c \right\}, \quad (2)$$

onde  $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma distribuição também conhecida como função impulso ou função  $\delta$ -Dirac. Esta distribuição é definida como

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x - y) \phi(y) dy = \phi(x) \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (3)$$

Além do mais, a função  $u$  é solução do seguinte problema de valor de contorno: Encontre  $u$ , tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = b & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

Em Pieper and Vexler (2013) demonstra-se que o problema (1) possui solução quando o alvo  $z \in L^2(\Omega)$ . Resultado similar para problema de controle com equações parabólicas é obtido em Casas, Clason and Kunisch (2013).

Para resolver o problema proposto, desenvolve-se um método variacional que baseia-se em calcular a sensibilidade do funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis do problema  $C_\delta(\Omega_c)$ . O resultado obtido é então utilizado para construir um novo método não iterativo de resolução do problema proposto em (1), sem a necessidade de introduzir técnicas de regularização. Para o caso do controle ser uma fonte distribuída, a análise assintótica topológica fornece excelentes resultados, Laurain, Canelas and Novotny (2014). Como a derivada topológica não existe para o caso de fontes concentradas, esse método não pode ser utilizado no problema proposto.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 apresenta-se a formulação matemática do problema do controle ótimo bem como o problema perturbado. Na Seção 3 realiza-se a análise de sensibilidade do funcional em relação ao conjunto de soluções admissíveis e propõe-se a utilização de uma expansão de modo a não produzir resíduo. Na Seção 4 apresenta-se um algoritmo para resolução do problema proposto utilizando os resultados dos cálculos da Seção 3. Na Seção 5 realizam-se experimentos utilizando-se o método de otimização proposto e apresentam-se os resultados numéricos, tanto para problemas inversos como para problemas de controle. As conclusões do trabalho são apresentas na seção 6.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Conforme afirmado na seção anterior, objetiva-se nesse trabalho determinar o termo fonte  $b$ , cujo suporte está contido em  $\Omega_c \subseteq \Omega$ , de modo a minimizar o funcional dado por (1). Assim, a incógnita do problema, representada por  $b^*(x)$ , é uma combinação linear finita de massas de Dirac, isto é,

$$b^*(x) = \sum_{i=1}^{M^*} \alpha_i^* \delta(x - x_i^*). \quad (5)$$

A obtenção de  $b^*(x)$  equivale a determinar os parâmetros  $M^* \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i^* \in \mathbb{R}_+$  e  $x_i^* \in \Omega_c$ , que representam, respectivamente, a quantidade, as intensidades e as localizações ótimas da fonte  $b^*(x)$ . Convém lembrar que  $\Omega_o$  é o subdomínio no qual o funcional (1) é observado e  $\Omega_c$  é o subdomínio no qual se busca a solução do problema.

### 2.1 Perturbação do funcional

Para realizar a análise de sensibilidade, utiliza-se um método baseado na variação do funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis. Sendo assim, necessita-se perturbar o termo fonte  $b$  do problema (4), adicionando a ele  $m$  cargas pontuais em  $\Omega_c$ . O novo termo fonte, denotado por  $b_\delta$ , pertencente ao conjunto  $C_\delta(\Omega_c)$ , é dado por

$$b_\delta(x) = b(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta(x - x_i). \quad (6)$$

O problema perturbado é então caracterizado por

$$\mathcal{J}(u_\delta) = \frac{1}{2} \|u_\delta - z\|_{L^2(\Omega_o)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u_\delta - z)^2 dx, \quad (7)$$

sendo  $u_\delta$  solução problema de valor de contorno: Encontre  $u_\delta$ , tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_\delta = b_\delta & \text{em } \Omega \\ u_\delta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

Na próxima seção será feita a análise de sensibilidade do funcional em relação ao conjunto de soluções admissíveis.

## 3 Análise de Sensibilidade

Para obter a variação do funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis (2), calcula-se a diferença entre o funcional perturbado (7) e o funcional não perturbado (1), isto é

$$\mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u_\delta - z)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u - z)^2 dx. \quad (9)$$

Analisando a equação acima, não é possível tirar nenhuma conclusão a respeito da relação entre o funcional e o termo fonte. Nesse caso, associa-se a solução do problema não perturbado com a solução do problema perturbado. Subtraindo as equações de Poisson (8) e (4) e considerando  $\delta(x - x_i) = \delta_i(x)$ , tem-se que

$$-\Delta(u_\delta - u) = b_\delta - b = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_i. \quad (10)$$

Como o interesse é analisar a sensibilidade do funcional em relação a perturbações no termo fonte e, considerando a expressão (10), define-se a diferença  $u_\delta - u$  como um somatório, isto é,

$$u_\delta(x) - u(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i(x). \quad (11)$$

Com isso, obtém-se abaixo a expansão a ser utilizada para a análise de sensibilidade do funcional.

$$u_\delta(x) = u(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i(x). \quad (12)$$

Essa expansão fornece um conjunto de funções  $v_i$ , que são soluções de problemas cujo termo fonte depende dos pontos  $x_i$ . Ao analisar as equações (10) e (11), conclui-se que  $v_i$  é solução do problema de valor de contorno: Determine  $v_i$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta v_i = \delta_i & \text{em } \Omega \\ v_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

Utilizando a expansão (12) na variação do funcional (9), tem-se

$$\mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \left( u + \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i - z \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u - z)^2 dx. \quad (14)$$

Desenvolvendo convenientemente a expressão acima, obtém-se a seguinte variação do funcional com relação a perturbação no termo fonte

$$\mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \left[ \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right)^2 + 2(u - z) \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right] dx. \quad (15)$$

O funcional (15) depende explicitamente das intensidades  $\alpha_i$  e implicitamente dos pontos  $x_i$ , tornando clara a relação entre a variação do funcional e os parâmetros que definem  $b$ . A fim de tornar a notação mais concisa, define-se a função  $\Psi : \mathbb{R}_+^m \times \Omega_c^m \rightarrow \mathbb{R}$  como a variação do funcional, ou seja,

$$\Psi(\alpha, \xi) = \mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad \xi = (x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (16)$$

Desse modo, conclui-se que a variação do funcional é dada por

$$\Psi(\alpha, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right)^2 dx + \int_{\Omega_o} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i (u - z) dx. \quad (17)$$

Analisando o funcional acima, verifica-se que o mesmo é estritamente convexo em relação a  $\alpha_i$ , pois assume uma forma quadrática em relação a essas variáveis. Como consequência desse fato, a derivada da função  $\Psi(\alpha, \xi)$  em relação  $\alpha_i$  se anula sobre um ponto de mínimo. Importante destacar que a utilização da expansão (12) não produz resíduo.

### 3.1 Cálculo da derivada

Como o objetivo é otimizar o funcional  $\Psi(\alpha, \xi)$  em relação aos parâmetros  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , deriva-se (17) em relação a  $\alpha_k$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k}(\alpha, \xi) = \int_{\Omega_o} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right) v_k dx + \int_{\Omega_o} (u - z) v_k dx. \quad (18)$$

Para obter as intensidades ótimas devemos resolver o sistema

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k}(\alpha, \xi) = 0, \quad (19)$$

que pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$H\alpha = d \quad H \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad d \in \mathbb{R}^m. \quad (20)$$

As entradas da matriz  $H$  e do vetor  $d$  são dados por

$$H_{ki} = \int_{\Omega_o} v_i v_k \quad \text{e} \quad d_k = - \int_{\Omega_o} (u - z) v_k. \quad (21)$$

Resolvendo o sistema (20) obtêm-se as intensidades ótimas representadas por  $\alpha_i^*$ . Substituindo os valores obtidos no funcional (17) tem-se

$$\Psi(\alpha^*, \xi) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^* d_i. \quad (22)$$

Com base na expressão (22), as localizações ótimas  $x_i^*$  são obtidas a partir de uma busca combinatória sobre o domínio  $\Omega_c$ . A equação (22) também é tomada como base para descrever um método não iterativo para resolução do problema de controle. Trabalho esse realizado na próxima seção.

## 4 ALGORITMO

O algoritmo apresentado abaixo descreve a resolução do sistema (20) e a busca por  $\xi^*$ ,  $\alpha^*$  e  $S^*$  num domínio discretizado. Os dados de entrada do algoritmo são:

- A quantidade de cargas puntuais que se deseja encontrar, denotada por  $m$ ;
- O tamanho da malha sobre o qual os sistemas são resolvidos, dado por  $n$ ;
- O vetor  $d$  e a matriz  $H$ , cujas entradas, dadas por (21), são previamente calculadas.

O valor de  $m$  define a ordem do sistema (20), que é resolvido sobre uma malha com  $n$  pontos e fornece os valores das intensidades  $\alpha_i$ . Tomando-se conjuntos com  $m$  pontos, realiza-se uma busca combinatória sobre todo o grid de modo a determinar a  $m$ -upla de pontos que geram o menor valor  $S^*$  para (22), portanto, os dados retornados pelo algoritmo são:

- As localizações ótimas dadas por  $\xi^*$ ;
- Um vetor  $\alpha^* \in \mathbb{R}^m$  contendo as intensidades ótimas;
- O valor  $S^*$  que representa o valor mínimo assumido por  $\mathcal{J}$ .

Para finalizar, deve-se destacar que o algoritmo proposto não fornece solução única para o problema, pois a quantidade de cargas procuradas  $m$  é uma das entradas do algoritmo, ou seja, para cada valor atribuído a  $m$  obtêm-se soluções distintas para o problema de otimização.

## Pseudocódigo

---

### Algoritmo 1: PSEUDOCÓDIGO

---

**Entrada:**  $m, n, d_i(ig), H_{ij}(ig)$

**Saída:**  $S^*, \alpha^*, \xi^*$

```

1 início
2    $S^* \leftarrow \infty; \alpha^* \leftarrow 0; \xi^* \leftarrow 0;$ 
3   para  $i_1 \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4     para  $i_2 \leftarrow i_1 + 1$  até  $n$  faça
5        $\vdots$ 
6       para  $i_m \leftarrow i_{m-1} + 1$  até  $n$  faça
7          $d \leftarrow [d_1(i_1) \quad d_2(i_2) \quad \cdots \quad d_m(i_m)]^T;$ 
8          $H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{11}(i_1) & H_{12}(i_2) & \cdots & H_{1m}(i_m) \\ H_{21}(i_1) & H_{21}(i_2) & \cdots & H_{2m}(i_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(i_1) & H_{m1}(i_2) & \cdots & H_{mm}(i_m) \end{bmatrix};$ 
9          $\alpha \leftarrow H^{-1}d;$ 
10        se  $\alpha_k > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$  então
11           $S \leftarrow -\frac{1}{2}d \cdot \alpha$ 
12          se  $S < S^*$  então
13             $S^* \leftarrow S;$ 
14             $\alpha^* \leftarrow \alpha;$ 
15             $\xi^* \leftarrow [i_1, i_2, \dots, i_m];$ 
16          fim
17        fim
18      fim
19    fim
20  fim
21 fim
22 retorna  $S^*, \alpha^*, \xi^*$ 

```

---

## 5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nessa seção são realizados alguns experimentos que correspondem à resolução numérica do problema de otimização proposto. Os experimentos são divididos em duas subseções.

Na primeira, utiliza-se o método proposto na resolução de problemas inversos. Na segunda subseção, o método é empregado para solucionar problemas de controle. Em todos os exemplos toma-se  $\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^2$ . O subdomínio  $\Omega_o$ , no qual se calcula o funcional, varia de acordo com o experimento. Para a realização da busca combinatória da solução ótima do problema,  $\Omega$  é discretizado em uma malha de elementos finitos, malha essa que não pode ser muito refinada por conta do custo computacional da busca. Para o cálculo dos problemas (4) e (13), realiza-se um refinamento da malha.

## 5.1 Problema inverso

O problema de controle proposto passa a ser um problema inverso de reconstrução de fontes quando o alvo, representado por  $z$ , é solução de um problema de Poisson homogêneo cuja fonte é um conjunto finito de massas de Dirac, ou seja,  $z$  é solução do problema de valor de contorno: Determine  $z$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta z = b^* & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (23)$$

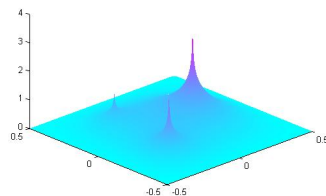
A fim de analisar o problema proposto, essa subseção apresenta dois exemplos de reconstrução do termo fonte  $b^*$ , uma com leitura completa e outro com leitura parcial do domínio. No primeiro exemplo, é feita uma leitura completa do domínio, ou seja, considera-se  $\Omega_o = \Omega$ , apresentado ao final um procedimento para obtenção do número de cargas puntuais, informação essa que é um dado de entrada do algoritmo proposto. No segundo exemplo, o problema inverso é resolvido com uma leitura parcial do domínio, isto é, considera-se  $\Omega_o \subsetneq \Omega$ .

### Exemplo 1: Problema inverso com leitura completa

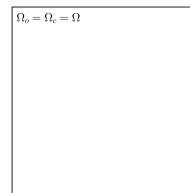
Esse primeiro exemplo consiste na reconstrução do termo fonte dado por

$$b^*(x) = \alpha_1^* \delta(x - x_1^*) + \alpha_2^* \delta(x - x_2^*) + \alpha_3^* \delta(x - x_3^*). \quad (24)$$

As intensidades e as localizações são representadas, respectivamente, pelos vetores  $\alpha^* = (2, 3, 1)$  e  $\xi^* = ((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2))$ , com  $M^* = 3$ . Nesse experimento é realizada uma leitura completa do domínio  $\Omega$ , ou seja, o funcional (1) é calculado em  $\Omega_o = \Omega$ . A figura 1 ilustra o gráfico de  $z$  produzido sinteticamente, bem como a relação entre os domínios.



(a) Gráfico de  $z$



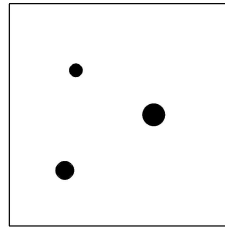
(b) Relação entre domínios

**Figura 1: Dados do exemplo do problema inverso com leitura completa**

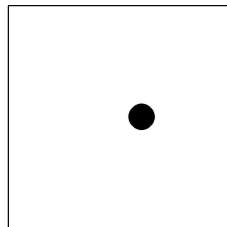
Como o número de cargas puntuais é um dado de entrada do algoritmo de otimização, para cada valor de  $m$  fornecido obtém-se solução distinta para o problema. Nesse caso espera-se que, para  $m = 3$ , a solução obtida coincida com a expressão (24). Realizando-se os experimentos considerando  $m = 1, 2, 3, 4$ , o algoritmo fornece os resultados dados, numericamente, pela tabela 1 e graficamente pela figura 2.

**Tabela 1: Resultados obtidos: problema inverso com leitura completa**

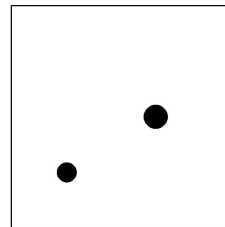
| Nº de massas $m$ | Intensidade $\alpha^*$ | localização $\xi^*$                                       |
|------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1                | 4.0569                 | (0.1, 0)                                                  |
| 2                | (2.274, 3.3812)        | $((-0.25, -0.25), (0.15, 0))$                             |
| 3                | (2, 3, 1)              | $((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2))$                |
| 4                | $(2, 3, 1, 10^{-14})$  | $((-0.2, -0.2), (0.15, 0), (-0.25, 0.25), (-0.45, 0.45))$ |



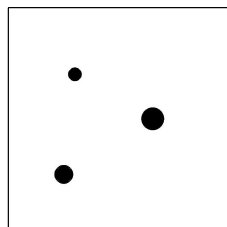
(a) target



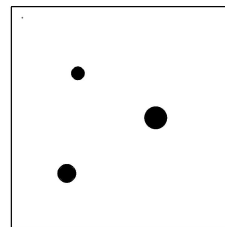
(b) Solução para  $m = 1$



(c) solução para  $m = 2$



(d) solução para  $m = 3$



(e) solução para  $m = 4$

**Figura 2: Solução para o problema inverso com leitura completa**

Ao analisar a solução encontrada, observa-se que a solução do problema de otimização

coincide com o problema inverso, o que garante a eficácia do método. Caso não se conheça, a priori, a quantidade de massas da solução, pode-se adotar um procedimento para reconstrução do termo fonte. Tal procedimento consiste em considerar  $m = 1$  e incrementar a quantidade de massas até se obter um vetor intensidade  $\alpha^*$  com uma de suas componentes de valor desprezível. Assim, toma-se  $m = M^* + 1$  e, ao desconsiderar carga de massa desprezível, obtém-se o valor  $M^*$  procurado.

### Exemplo 2: Problema inverso com leitura parcial

Nesta seção repete-se o experimento de reconstrução do termo fonte dado por (24) considerando a leitura parcial do domínio, isto é,  $\Omega_o \subsetneq \Omega = \Omega_c$ . Vide figura 3

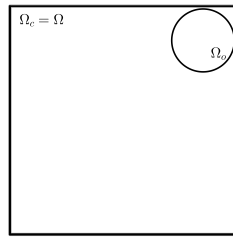
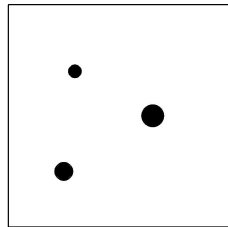
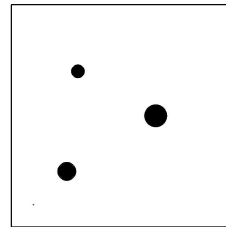


Figura 3: Relação entre domínios - leitura parcial

Nesse experimento tem-se o interesse em analisar a eficiência do método proposto para uma leitura parcial do domínio. Para isso considera-se os resultados fornecidos pelo algoritmo para  $m = 3$  e  $m = 4$ . A figura 4 ilustra esses resultados.



(a) solução para  $m = 3$



(b) solução para  $m = 4$

Figura 4: Solução para o problema inverso com leitura parcial

Considerando o procedimento para obtenção de  $M^*$  descrito ao final da subseção anterior, observa-se, novamente, que a solução do problema de otimização coincide com a solução do problema inverso, o que indica que os dois problemas são equivalentes ao se considerar o alvo  $z$  solução do problema (23).

## 5.2 Problema de controle

Nessa subseção realizam-se três experimentos numéricos de problema de controle. Os três exemplos descritos consistem em resolver o problema de otimização dado por (1) considerando

o alvo  $z$  uma função contínua por partes definida por

$$\begin{cases} z = 0.25 & \text{em } \Omega_o \\ z = 0 & \text{em } \Omega \setminus \Omega_o \end{cases} \quad (25)$$

onde  $\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^2$  e  $\Omega_o$  varia de acordo com exemplo dado. A seguir os três exemplos são apresentados e, em cada qual, ilustra-se a relação entre os conjuntos  $\Omega$ ,  $\Omega_o$  e  $\Omega_c$ , o gráfico de  $z$ , bem como a solução encontrada.

### Problema de controle: exemplo 1

Nesse primeiro experimento relativo ao problema de controle, considera-se o domínio  $\Omega_o$  um quadrado com centro na origem e lado 0.32. A figura 5 ilustra o domínio de definição e o gráfico da função  $z$ .

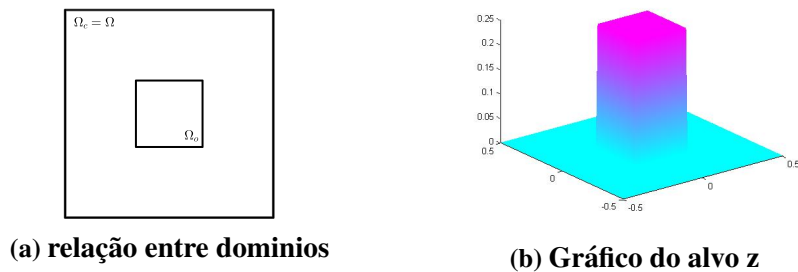


Figura 5: Dados do problema de controle 1

Para resolver o problema de controle, aplica-se o algoritmo proposto considerando  $m = 1, 2, 3, 4$ . Os dados de retorno vetor localização  $\xi^*$  e vetor intensidade  $\alpha^*$  são utilizados para representar a solução para cada valor de  $m$  bem como os gráficos de  $u$  e  $u|_{\Omega_o}$ . De modo a facilitar a comparação com a função alvo  $z$ , os gráficos de  $u|_{\Omega_o}$  possuem, em geral, escalas distintas dos gráficos de  $u$ . As figuras 6, 7, 8 e 9 correspondem, respectivamente, às soluções encontradas para  $m = 1, m = 2, m = 3$  e  $m = 4$ .

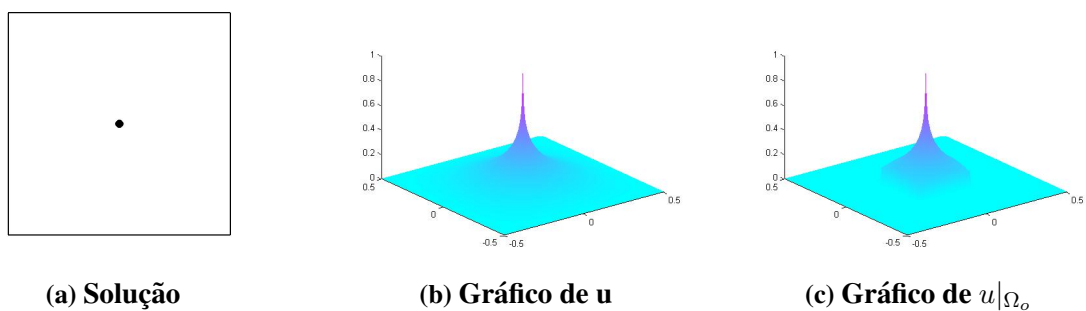
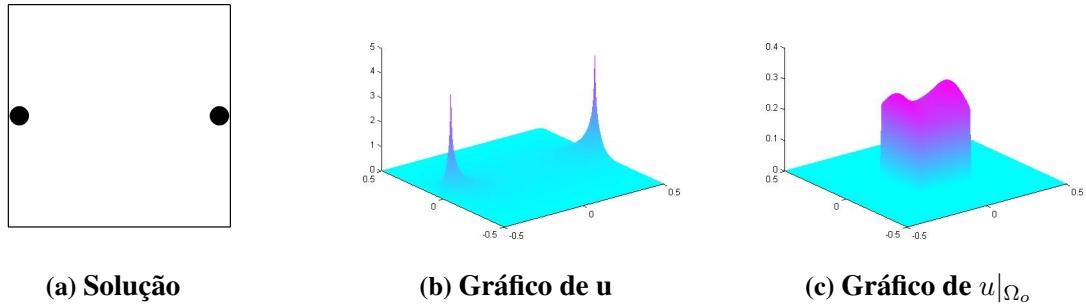
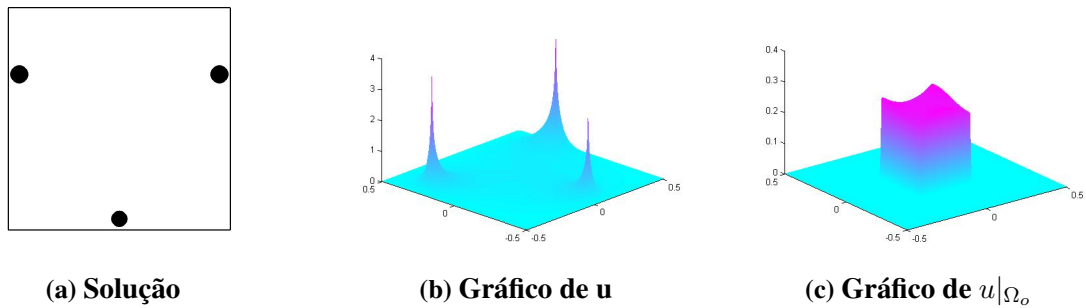
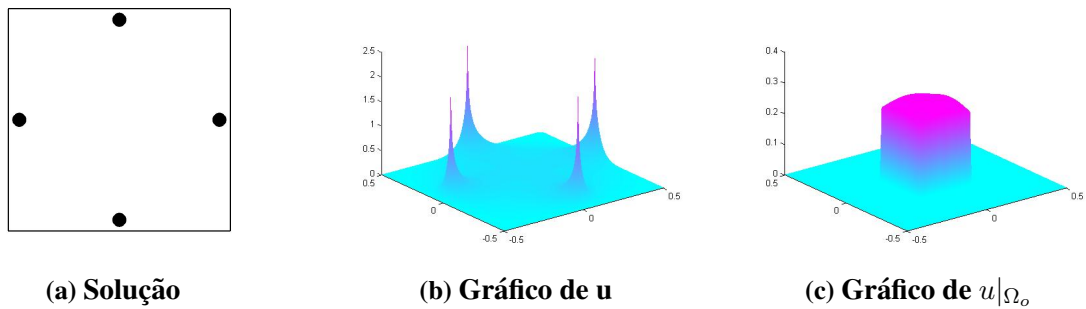


Figura 6: Problema de controle 1:  $m = 1$

Figura 7: Problema de controle 1:  $m = 2$ Figura 8: Problema de controle 1:  $m = 3$ Figura 9: Problema de controle 1:  $m = 4$ 

Obtido o resultado do problema de controle, descreve-se, na tabela 2, a relação entre o número de massas  $m$  e o valor ótimo  $S^*$  do funcional (1) fornecido pelo algoritmo.

Tabela 2: Problema de controle 1 - relação entre  $m$  e  $S^*$ 

| Nº de massas $m$ | Valor ótimo do funcional ( $S^*$ ) |
|------------------|------------------------------------|
| 0                | $3.20 \times 10^{-3}$              |
| 1                | $2.90 \times 10^{-4}$              |
| 2                | $3.47 \times 10^{-5}$              |
| 3                | $1.95 \times 10^{-5}$              |
| 4                | $1.67 \times 10^{-5}$              |

Esses dados são ilustrados graficamente pela figura (10)

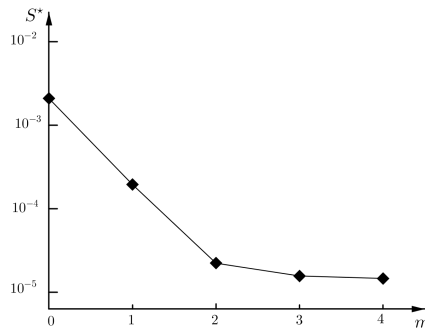


Figura 10: Problema de controle 1 - gráfico de  $m \times S^*$

### Problema de controle: exemplo 2

Nesse segundo experimento de problema de controle, considera-se  $\Omega_o$  um círculo com centro na origem. A figura 17 ilustra a relação entre os domínios  $\Omega$ ,  $\Omega_o$  e  $\Omega_c$  bem como o gráfico da função alvo  $z$ .

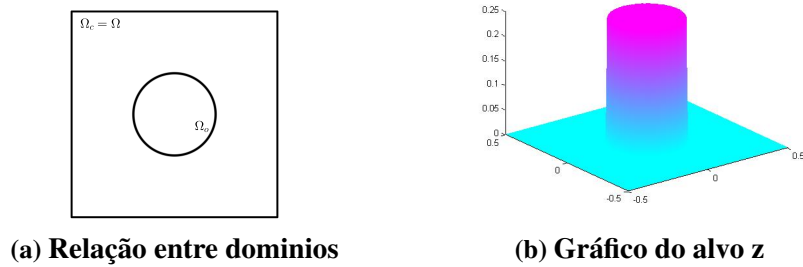


Figura 11: Dados do problema de controle 2

Aplicando-se o algoritmo para esse caso e considerando como dado de entrada  $m = 1, 2, 3, 4$ , tem-se as soluções ilustradas, respectivamente, pelas figuras 12, 13, 14 e 15.

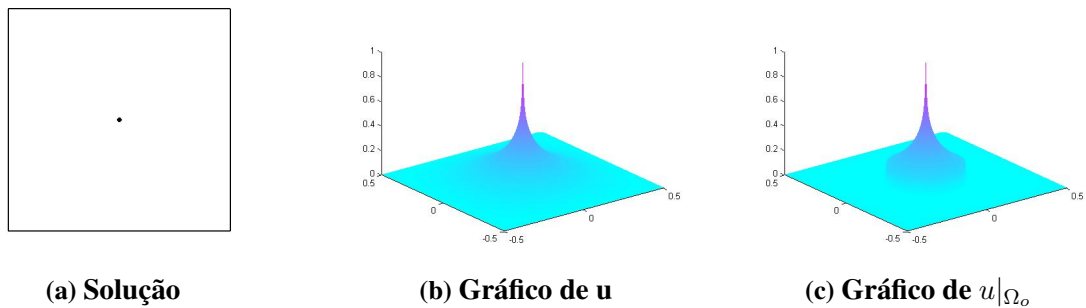
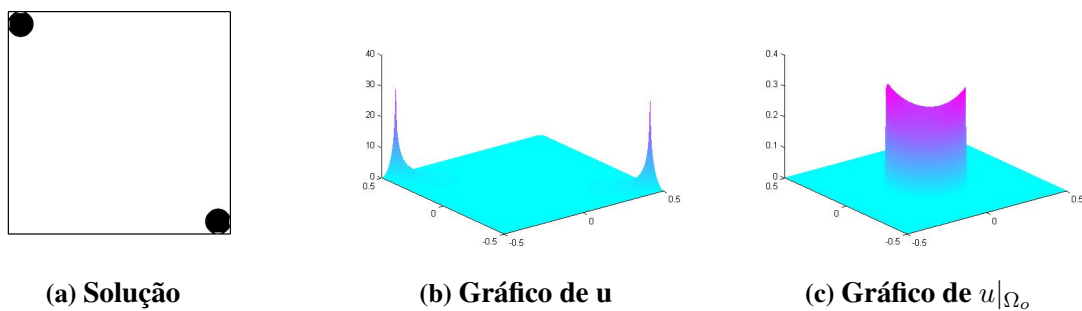
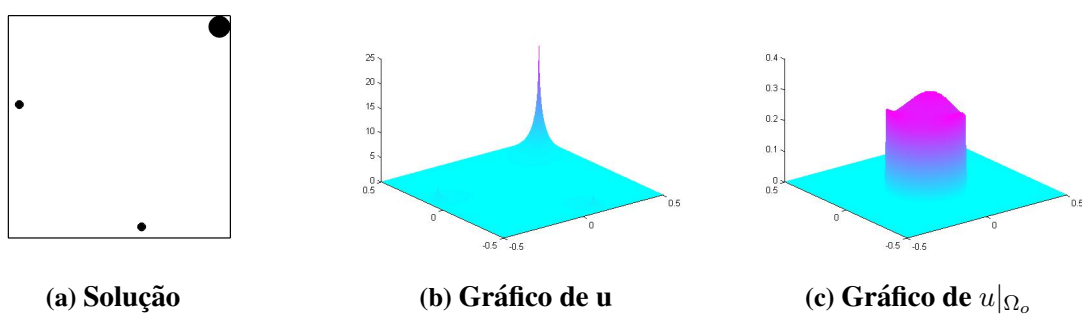
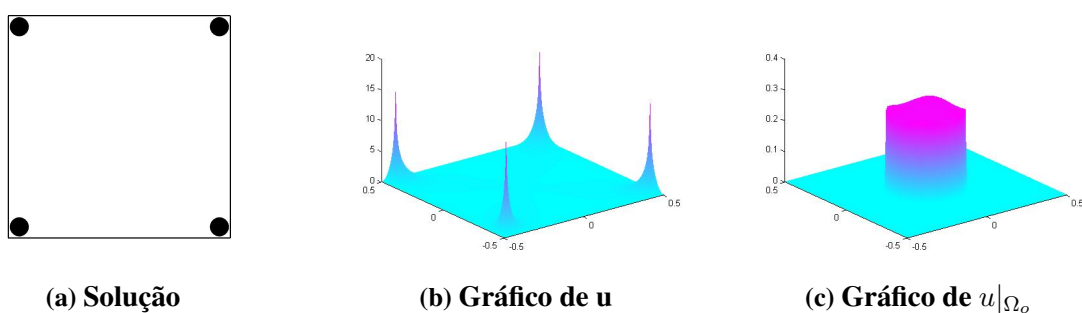


Figura 12: Problema de controle 2:  $m = 1$

Figura 13: Problema de controle 2:  $m = 2$ Figura 14: Problema controle 2:  $m = 3$ Figura 15: Problema de controle 2:  $m = 4$ 

A relação entre o número de cargas pontuais  $m$  e o valor ótimo do funcional  $S^*$  é descrita na tabela 3 e ilustrado na figura 16.

Tabela 3: Problema de controle 2 - relação entre  $m$  e  $S^*$ 

| Nº de massas $m$ | Valor ótimo do Funcional ( $S^*$ ) |
|------------------|------------------------------------|
| 0                | $3.93 \times 10^{-3}$              |
| 1                | $3.76 \times 10^{-4}$              |
| 2                | $6.26 \times 10^{-5}$              |
| 3                | $1.95 \times 10^{-5}$              |
| 4                | $1.66 \times 10^{-5}$              |

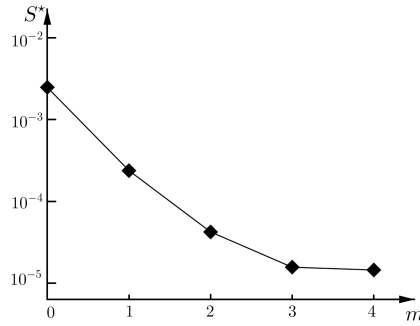


Figura 16: Problema de controle 2 - gráfico de  $m \times S^*$

### Problema de controle: exemplo 3

Nesse último exemplo do experimentos numéricos para o problema de controle, considera-se novamente o alvo  $z$  dado pela equação (25). O subdomínio  $\Omega_o$ , nesse caso, é um triângulo equilátero cujo centro de massa coincide com a origem. A figura 17 ilustra a relação entre os domínios  $\Omega$ ,  $\Omega_o$  e  $\Omega_c$  bem como o gráfico de  $z$ .

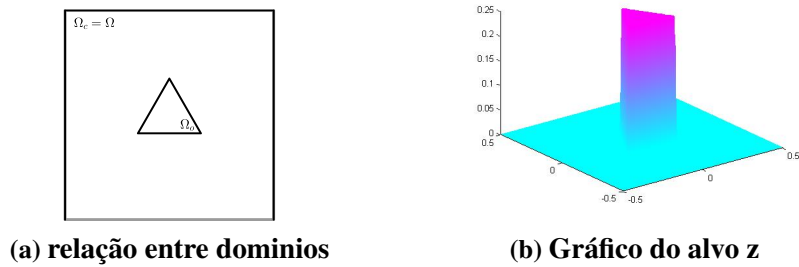


Figura 17: Dados do problema de controle 3

Aplicando-se novamente o algoritmo, considerando como dado de entrada  $m = 1, 2, 3, 4$ , obtêm-se as soluções correspondentes. Nesse caso apresenta-se apenas o resultado obtido para  $m = 3$ , que pode ser visto na figura 18.

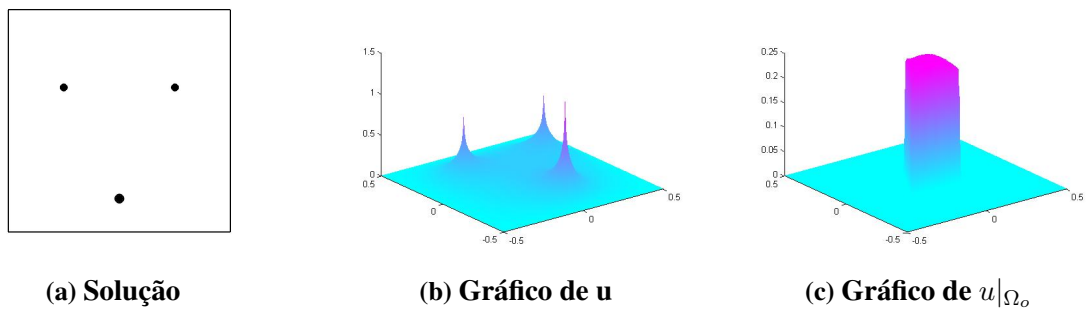


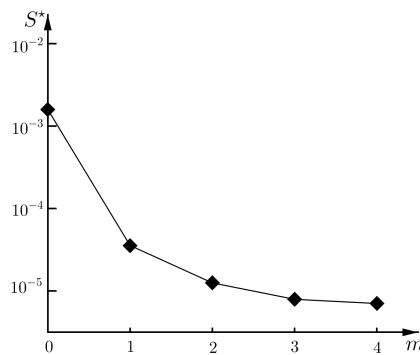
Figura 18: Problema de controle 3:  $m = 3$

Finalizando a solução do problema, a relação entre o número de cargas pontuais  $m$  e o valor

ótimo do funcional  $S^*$  é descrita na tabela 4 e ilustrado na figura 19.

**Tabela 4: Problema de controle 3 - relação entre  $m$  e  $S^*$**

| Nº de massas $m$ | Valor ótimo do funcional ( $S^*$ ) |
|------------------|------------------------------------|
| 0                | $1.17 \times 10^{-3}$              |
| 1                | $5.44 \times 10^{-5}$              |
| 2                | $1.07 \times 10^{-5}$              |
| 3                | $9.14 \times 10^{-6}$              |
| 4                | $8.74 \times 10^{-6}$              |



**Figura 19: Problema de controle 3 - gráfico de  $m \times S^*$**

A partir dos resultados obtidos nos três exemplos dessa subseção pode-se afirmar que o método proposto para a resolução do problema de controle nos fornece excelentes resultados. É fácil perceber também que, quanto maior o número de cargas, melhor o resultado para o problema de otimização.

## 6 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi estudado um problema de controle ótimo cujo estado é solução de uma equação de Poisson e o controle é dado por massas de Dirac. Para resolver o problema proposto, foi desenvolvido um método variacional que consiste em calcular a sensibilidade do funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis. O resultado obtido foi utilizado para construir um novo método não iterativo para resolução do problema e nenhuma técnica de regularização foi introduzida. A eficácia do método de resolução proposto ficou comprovada pelos resultados numéricos obtidos. No contexto de problemas inversos, verificou-se, tanto no caso de leitura completa do domínio quanto no caso de leitura parcial, que a solução do problema de otimização coincidiu com a solução do problema inverso, fato esse que indica que os dois problemas são equivalentes. Em relação a aplicabilidade do método na resolução de problemas de controle ótimo, os resultados obtidos foram bastantes satisfatórios apontando um comportamento assintótico da solução ótima com o aumento da quantidade de massas de Dirac.

## REFERÊNCIAS

- Pieper, K., Vexler, B., 2013. A Priori error analysis for discretization of sparse elliptic optimal control problems in Measure Space. *SIAM Journal on Optimization and Control*, vol. 51, n. 4, pp. 2788-2808.
- Casas, P., Clason, C., & Kunisch, K., 2013. Parabolic control problems in measure spaces with sparse solutions. *SIAM Journal on Optimization and Control*, vol. 51, n. 1, pp. 28-63.
- Laurain, A., Canelas, A., & Novotny, A., 2014. A new reconstruction method for the inverse potential problem. *Journal of Computational Physics*, vol. 268, pp. 417-431.