



ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA NO PROCESSO DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO

Marcel Duarte da Silva Xavier

Antônio André Novotny

marcel@lncc.br

novotny@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica

Avenida Getúlio Vargas, 333, 25651-075, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

Resumo. A derivada topológica mede a sensibilidade de um dado funcional de forma em relação a uma perturbação singular infinitesimal no domínio, tal como a inserção de furos, inclusões, termos fonte ou até mesmo trincas. Este conceito relativamente novo tem sido utilizado com êxito no tratamento de uma ampla gama de problemas da física e da engenharia. O objetivo deste trabalho é aplicar o conceito de derivada topológica no contexto de fraturamento hidráulico. Inicialmente, objetiva-se introduzir um modelo de evolução de dano submetido à pressão hidrostática, que consiste basicamente em incorporar o conceito de dano pressurizado ao modelo de Francfort-Marigo. Em seguida será realizada a análise assintótica topológica do referido modelo. Mais precisamente, objetiva-se obter de forma rigorosa a expansão assintótica topológica da energia potencial total associada ao problema de elasticidade linear considerando como perturbação topológica a nucleação de uma inclusão circular com condição de transmissão não homogênea que representa o dano pressurizado. O resultado obtido será então utilizado na construção de um algoritmo de nucleação e propagação de dano submetido à pressão hidrostática que representa o processo de fraturamento hidráulico.

Palavras-chave: Fraturamento hidráulico, Otimização Topológica, Derivada Topológica

1 INTRODUÇÃO

Em um trabalho recente, Allaire et al.(2011), foi utilizado o método clássico level set em conjunto com o modelo de dano de Francfort-Marigo, Francfort & Marigo (1993), para estudar a propagação de regiões danificadas. O referido modelo converge (no sentido da gama-convergência) para o modelo de fratura de Griffith, amplamente utilizado na modelagem de fratura frágil. Posteriormente, baseado no fato de que o modelo de Francfort-Marigo é puramente energético, Farias (2013) propôs uma metodologia para estudar tanto o fenômeno de nucleação quanto de propagação de regiões danificadas utilizando a análise de sensibilidade topológica. No ano seguinte, Xavier (2014) analisou o comportamento de estruturas submetidas à pressão hidrostática também via análise de sensibilidade topológica. Em particular, a expansão assintótica topológica da energia potencial total associada ao problema de elasticidade linear em estado plano de tensão ou deformação, considerando como perturbação topológica a nucleação de uma inclusão circular com condição de transmissão não homogênea, foi rigorosamente desenvolvida. Fisicamente, a condição de transmissão não homogênea representa a ação de pressão hidrostática sobre a interface da perturbação topológica. Sendo assim, a proposta deste trabalho é introduzir um modelo de evolução de dano submetido à pressão hidrostática. O novo modelo consiste, basicamente, em incorporar o conceito de dano pressurizado ao modelo de Francfort-Marigo. Em seguida, será obtida a derivada topológica associada ao novo modelo. Cabe destacar que a derivada topológica para o modelo de dano de Francfort-Marigo é conhecida na literatura apenas para o caso em que a condição de transmissão na interface da inclusão é homogênea. A derivada topológica para o caso em que a condição de transmissão é não homogênea, o que de fato caracteriza o conceito de dano pressurizado, representa então a primeira contribuição importante deste trabalho. O resultado obtido será então utilizado na construção de um algoritmo de nucleação e propagação de dano submetido à pressão hidrostática, simulando assim, o processo de fraturamento hidráulico.

2 Fraturamento Hidráulico

Fraturamento hidráulico estuda a evolução de regiões previamente danificadas em corpos elásticos quando estas são submetidas a injeção de fluido sob alta pressão. Uma das principais aplicações do processo de fraturamento hidráulico consiste na extração de recursos energéticos tais como óleo e gás natural.

2.1 Modelo de dano de Francfort-Marigo

O modelo de dano proposto por Francfort-Marigo em 1993 é utilizado para descrever a evolução quase-estática de corpos linearmente elásticos com uma trinca em propagação. De acordo com o modelo, tal comportamento é obtido minimizando um funcional que é a soma da energia potencial total com uma medida de dissipação da energia. O modelo apresenta algumas limitações devido a sua natureza puramente energética, todavia, converge, no sentido da gama convergência, para o modelo de fratura de Griffith, amplamente utilizado na modelagem de fratura frágil.

Considere um domínio elástico aberto e limitado, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com fronteira $\partial\Omega$ suave e que contém em seu interior uma região ω previamente danificada. O modelo de Francfort-Marigo propõe que puntualmente deve existir uma mudança abrupta de comportamento caso alguma

condição associada ao material ocorra. Assim, a proposta deste modelo de dano consiste em, inicialmente, introduzir um par de materiais: um representando a região sadia, isto é, $\Omega \setminus \bar{\omega}$, e o outro a região danificada ω . Com esta finalidade propõe-se um parâmetro ρ definido da seguinte forma:

$$\rho = \rho(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \rho_0 & \text{se } x \in \omega, \end{cases} \quad (1)$$

com $0 < \rho_0 \ll 1$.

A partir daí, a mudança do material sadio para o material danificado ocorre somente se a liberação da energia associada a esta transição superar um determinado valor característico associado ao material. Em outras palavras, o dano ocorre se:

$$\epsilon > \epsilon_b, \quad (2)$$

onde ϵ é a energia específica de deformação e ϵ_b é uma constante positiva que representa a densidade de liberação de energia associada a perda de rigidez (início do dano).

Finalmente, o modelo propõe um funcional $\mathcal{J}_\omega(u)$ a ser minimizado, denominado funcional de dissipação de energia de Francfort-Marigo, definido da seguinte forma:

$$\mathcal{J}_\omega(u) = \mathcal{E}(u) + \epsilon_b |\omega|, \quad (3)$$

onde a primeira parcela representa a energia potencial total do sistema e a segunda uma medida de dissipação energética.

2.2 Dano Pressurizado

No contexto de fraturamento hidráulico, a região danificada ω encontra-se pressurizada, ou seja, sujeita a ação de pressão hidrostática. Neste caso, é levado em conta um aumento gradativo da pressão interna no interior da região danificada. O incremento da pressão será representado da seguinte forma:

$$p = p_0 + \delta p, \quad (4)$$

onde p_0 representa a pressão inicial e δp o incremento. Cabe destacar que tal incremento implica em uma pequena variação no campo de deslocamentos. Sendo assim, o presente modelo propõe, neste contexto, o seguinte funcional, denotado por $\psi(\chi) := \mathcal{J}_\omega(u)$, a ser minimizado a cada incremento da pressão:

$$\mathcal{J}_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s u - \int_{\omega} p \operatorname{div} u + \epsilon_b \int_{\omega} 1, \quad (5)$$

onde ϵ_b é o parâmetro mencionado em (2). Como o processo é quase-estático, segue que a função vetorial u é solução do seguinte problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathcal{U}, \text{ tal que :} \\ \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s \eta = \int_{\omega} p \operatorname{div} \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (6)$$

com $\sigma(u) = \rho \mathbb{C} \nabla^s u$, onde ρ é dado por (1), $\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ é o tensor constitutivo de Hooke, onde $\mathbb{I}$ e $\mathbb{I}$ são tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente, μ e λ são as constantes de Lamé e, finalmente, $\nabla^s u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$ é o tensor de Green linearizado.

O conjunto $\mathcal{U}$ e o espaço $\mathcal{V}$ são definidos por:

$$\mathcal{U} := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \llbracket \varphi \rrbracket|_{\partial\omega} = 0, \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{u} \right\}, \quad (7)$$

$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \llbracket \varphi \rrbracket|_{\partial\omega} = 0, \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (8)$$

O operador $\llbracket \varphi \rrbracket$ é usado para denotar o salto da função φ sobre o contorno da região ω , isto é, $\llbracket \varphi \rrbracket = \varphi|_{\Omega \setminus \bar{\omega}} - \varphi|_{\omega}$ sobre $\partial\omega$. Além disso, $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ com $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$, onde Γ_D e Γ_N são contornos de Dirichlet e Neumann respectivamente, ver Figura 1.

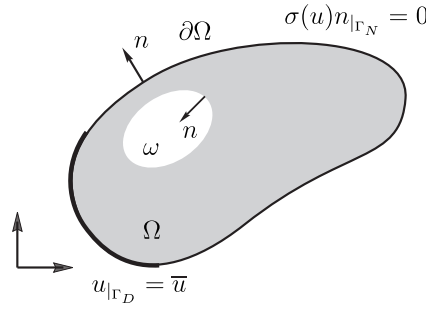


Figure 1: Dano pressurizado imerso em um corpo elástico deformável.

A formulação forte associada ao problema variacional (6) é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Encontrar } u, \text{ tal que:} & \\ \text{div } \sigma(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \sigma(u) = \rho \mathbb{C} \nabla^s u, & \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(u)n = 0, & \text{sobre } \Gamma_N, \\ \left. \begin{array}{l} \llbracket u \rrbracket = 0 \\ \llbracket \sigma(u) \rrbracket n = -pn \end{array} \right\} & \text{sobre } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (9)$$

A condição de transmissão sobre $\partial\omega$ surge naturalmente da formulação variacional (6).

Em (5), as duas primeiras parcelas representam a energia potencial total do sistema e a última trata-se da medida de dissipação de energia, como mencionado. Note que, no contexto de fraturamento hidráulico, a energia específica de deformação é dada por:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s u. \quad (10)$$

Consequentemente, a condição associada ao material para que a região danificada pressurizada se propague é dada por:

$$\frac{1}{2} \sigma(u) \cdot \nabla^s u > \epsilon_b. \quad (11)$$

A vantagem na utilização deste modelo está no fato de o mesmo ser linear, e dessa forma, torna possível a utilização de todo um ferramental matemático já consolidado na literatura. A principal desvantagem está no fato de, justamente, tratar-se de um modelo puramente en-

ergético, como consequência deste fato o mesmo é incapaz de distinguir entre tração e compressão, sendo portanto falho na descrição de alguns fenômenos.

2.3 Pressão Crítica

No contexto de fraturamento hidráulico, pressão crítica é o valor da pressão necessário para que ocorra o ativamento da falha.

O modelo de Francfort-Marigo permite tratar, essencialmente, os casos de nucleação de dano, isto é, problemas com ausência de singularidades (dano inicial), nos quais a carga crítica é dada pelo valor da carga que eleva a densidade de energia até um valor limite, sendo este falho na caracterização de um carregamento crítico nos problemas com singularidades. No contexto de fraturamento hidráulico, o modelo apresentado acima também é falho na caracterização de uma pressão crítica em problemas com dano inicial, uma vez que, neste caso, qualquer valor da pressão eleva a densidade de energia a valores infinitamente altos na ponta da trinca. Entretanto, o modelo de Francfort-Marigo converge, no sentido da gama-convergência, para o modelo de fratura de Griffith, amplamente utilizado na modelagem de fratura frágil e que prevê a existência de uma carga de inicialização mesmo em problemas que apresentam dano inicial. A expectativa é que no modelo de Francfort-Marigo com dano pressurizado, isto é, no contexto de fraturamento hidráulico, seja possível, também, o estabelecimento de uma pressão crítica.

Para contornar esta limitação do modelo, no contexto de fraturamento hidráulico, utilizou-se a mesma estratégia abordada por Farias (2013). A estratégia desenvolvida consiste em introduzir uma nova propriedade material, ϵ_s , associada à energia específica superficial, utilizada juntamente com um fator de escala associado a geometria do problema. Tal fator é dado pela espessura inicial δ da região danificada. Assim, um novo parâmetro de liberação de energia, ϵ_δ , definido como

$$\epsilon_\delta = \frac{\epsilon_s}{\delta}, \quad (12)$$

é introduzido. Dessa forma, os parâmetros δ e ϵ_s serão calibrados durante os experimentos de tal forma que o valor da pressão crítica assuma um valor finito não nulo mesmo nos problemas com singularidades. Esta abordagem permitiu a caracterização de duas propriedades constitutivas, à saber, ϵ_b associada ao fenômeno da nucleação e ϵ_s associado a propagação.

A gama convergência mencionada é representada, matematicamente, da seguinte forma:

$$\epsilon_b \int_\omega 1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \epsilon_s \int_{\partial\omega} 1. \quad (13)$$

onde $\epsilon_b > 0$ é o parâmetro material mencionado em (2) associado à energia específica volumétrica.

2.4 Problema de Otimização Topológica

De posse do modelo de dano de Francfort-Marigo no contexto de fraturamento hidráulico, objetiva-se minimizar o funcional de dissipação de energia com relação ao conjunto $\omega \subset \Omega$. Sendo assim, o seguinte problema de otimização topológica é proposto:

$$\text{Minimize } \mathcal{J}_\omega(u) \quad (14)$$

onde $\mathcal{J}_\omega(u)$ é dado por (5) e u é solução de (6).

Uma forma bastante natural de atacar esta classe de problemas é utilizando a análise de sensibilidade topológica. Esta abordagem fornece a expansão assintótica topológica do referido funcional. O termo principal desta expansão é uma função escalar chamada derivada topológica que mede a sensibilidade do funcional quando o domínio de análise se encontra submetido à uma perturbação. Neste sentido, a derivada topológica é utilizada para indicar a direção de minimização do funcional proposto e, consequentemente, fornece a trajetória a ser descrita pela trinca. O processo de obtenção da derivada topológica será apresentado na próxima seção.

3 Análise de Sensibilidade Topológica

Para introduzir o conceito de derivada topológica considere um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o qual contém uma perturbação em uma pequena região $B_\varepsilon(\hat{x})$ de tamanho ε centrada em um ponto arbitrário $\hat{x} \in \Omega$, conforme pode ser observado na Figura 2. É introduzida então, uma função característica $x \mapsto \chi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, associada ao domínio original, denotado por $\chi = \mathbb{1}_\Omega$, tal que:

$$|\Omega| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi, \quad (15)$$

onde $|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de Ω . Então, é definida uma função característica da forma $x \mapsto \chi_\varepsilon(\hat{x}; x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, associada ao domínio topologicamente perturbado. No caso de uma perfuração, por exemplo, $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_{B_\varepsilon(\hat{x})}$ e o domínio perturbado é obtido como $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Então, é assumido que um dado funcional $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$, associado ao domínio topologicamente perturbado, admite a seguinte expansão assintótica topológica:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)), \quad (16)$$

onde $\psi(\chi)$ é o funcional associado ao domínio original, isto é, sem perturbação, e $f(\varepsilon)$ é uma função positiva tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A função $\hat{x} \mapsto \mathcal{T}(\hat{x})$ é chamada Derivada Topológica de ψ em $\hat{x}$. Portanto, esta derivada pode ser vista, inicialmente, como um fator de correção de primeira ordem de $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$. De fato, reorganizando (16) tem-se que:

$$\frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)} = \mathcal{T}(\hat{x}) + \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)}. \quad (17)$$

Tomando o limite com $\varepsilon \rightarrow 0$ na expressão acima obtém-se:

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi(x))}{f(\varepsilon)}. \quad (18)$$

Desde que se esteja lidando com perturbações singulares dadas pela nucleação de furos, os funcionais $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ e $\psi(\chi)$ são associados a domínios topologicamente diferentes. Portanto, o limite acima não é calculado trivialmente. Em particular, é preciso realizar uma análise assintótica do funcional $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$, com respeito ao parâmetro pequeno ε .

3.1 Existência da Derivada Topológica

Para demonstrar a existência da derivada topológica, bem como efetuar o cálculo de sua expressão é necessário, inicialmente, introduzir o problema perturbado.

No contexto deste trabalho, a perturbação topológica trata-se de uma inclusão com condição de transmissão não homogênea, o que de fato caracteriza a pressão hidrostática. Este conceito

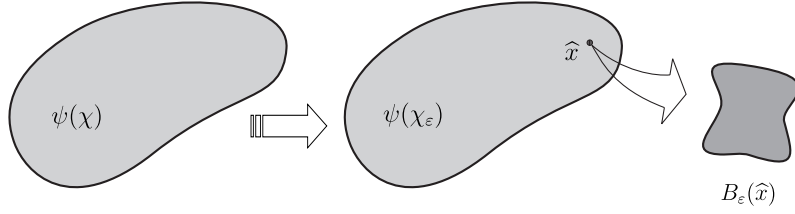


Figure 2: O conceito de Derivada Topológica.

foi introduzido no trabalho Xavier (2014), onde tal perturbação foi denominada inclusão pressurizada. Portanto, no contexto de fraturamento hidráulico, o domínio perturbado será obtido pela nucleação de uma pequena inclusão circular pressurizada, denotada por $B_\varepsilon(\hat{x})$, introduzida no interior de $\Omega \setminus \bar{\omega} \subset \mathbb{R}^2$. Aqui, $B_\varepsilon(\hat{x})$, com $\bar{B}_\varepsilon \subset \Omega \setminus \bar{\omega}$, é usado para denotar uma bola de raio ε centrada em $\hat{x} \in \Omega \setminus \bar{\omega}$. Esta região é, então, preenchida por uma inclusão com propriedade material diferente do meio. Neste caso, a função $\chi_\varepsilon(\hat{x})$, que caracteriza a perturbação topológica, é definida da seguinte forma:

$$\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_\Omega - (1 - \gamma)\mathbb{1}_{B_\varepsilon(\hat{x})}. \quad (19)$$

Note que, no caso de uma inclusão, as topologias dos domínios original e perturbado são preservadas. Contudo, será introduzida uma perturbação não suave nos coeficientes do operador diferencial através de um contraste γ_ε . Aqui, γ_ε representa uma função constante por partes definida da seguinte forma:

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon, \\ \gamma & \text{se } x \in B_\varepsilon, \end{cases} \quad (20)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$ representa o contraste na propriedade material. Uma vez que se está lidando com uma perturbação não suave sobre a propriedade material, a sensibilidade do funcional de forma, com respeito a nucleação de uma inclusão, pode ser estudada no contexto de análise assintótica topológica, a qual é, de fato, a abordagem mais apropriada para este problema.

Note que o domínio não perturbado é composto por uma região elástica sadia e outra danificada pressurizada. Então, introduzindo a perturbação, dada pela inclusão pressurizada $B_\varepsilon(\hat{x})$ e que não intercepta a antiga região danificada, obtém-se a configuração perturbada do domínio conforme ilustra a Figura 3.

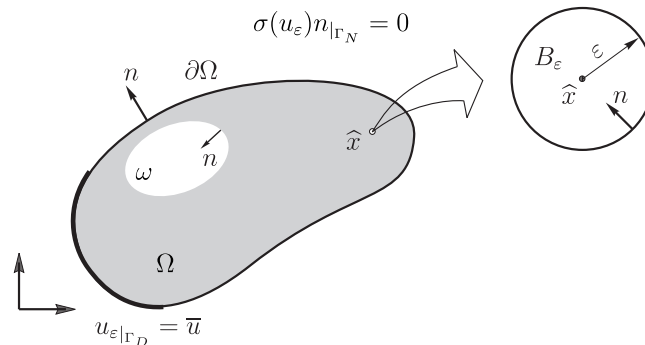


Figure 3: Problema Perturbado.

Observa-se que após a introdução da perturbação topológica a região danificada pressur-

izada é dada por $\omega \cup B_\varepsilon(\hat{x})$ com $\omega \cap B_\varepsilon(\hat{x}) = \emptyset$. Portanto, o funcional de forma associado ao problema topologicamente perturbado, denotado por $\psi(\chi_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$, é dado por:

$$\mathcal{J}_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u_\varepsilon + \epsilon_b \int_{\omega} 1 + \epsilon_b \int_{B_\varepsilon} 1 - \int_{\omega} p \operatorname{div} u_\varepsilon - \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} u_\varepsilon, \quad (21)$$

onde a função vetorial u_ε é solução do seguinte problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon, \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta = \int_{\omega} p \operatorname{div} \eta + \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (22)$$

com $\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \sigma(u_\varepsilon)$. O conjunto $\mathcal{U}_\varepsilon$ e o espaço $\mathcal{V}_\varepsilon$ são definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{\varphi \in \mathcal{U} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon\}, \quad \mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in \mathcal{V} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial B_\varepsilon\}. \quad (23)$$

A formulação forte associada ao problema variacional (22) é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_\varepsilon, \text{ tal que:} \\ \operatorname{div} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \sigma(u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(u_\varepsilon) n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N, \\ \left. \begin{array}{l} \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket n = -pn \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial \omega. \\ \left. \begin{array}{l} \llbracket u_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \rrbracket n = -pn \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (24)$$

As condições de transmissão sobre ∂B_ε e sobre $\partial \omega$ surgem a partir da formulação variacional (22). A existência da derivada topológica é assegurada pelo seguinte lema:

Lema: Seja u_ε solução de (24) e u solução de (9). Então, tem-se seguinte estimativa:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon. \quad (25)$$

Proof. De fato, restando (6) de (22), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} \eta &= \int_{\Omega} (\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) - \sigma(u)) \cdot \nabla^s \eta \\ &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (\sigma(u_\varepsilon) - \sigma(u)) \cdot \nabla^s \eta + \int_{B_\varepsilon} (\gamma \sigma(u_\varepsilon) - \sigma(u)) \cdot \nabla^s \eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Somando e restando o termo $\int_{B_\varepsilon} \gamma \sigma(u) \cdot \nabla^s \eta$, obtém-se:

$$\int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} \eta = \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla^s \eta + (\gamma - 1) \int_{B_\varepsilon} \sigma(u) \cdot \nabla^s \eta. \quad (27)$$

Fazendo $\eta = u_\varepsilon - u$ em (27) tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u) &= (1 - \gamma) \int_{B_\varepsilon} \sigma(u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u) + \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u) \\ &= \int_{B_\varepsilon} ((1 - \gamma)\sigma(u) + pI) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u). \end{aligned} \quad (28)$$

Escrevendo $T(u) = ((1 - \gamma)\sigma(u) + pI)$ tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u) = \int_{B_\varepsilon} T(u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u). \quad (29)$$

Assim, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u) &\leq \|T(u)\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|\nabla^s(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq c_0 \varepsilon \|\nabla^s(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq c_1 \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Utilizando a coercividade da forma bilinear do lado esquerdo de (30) obtém-se:

$$C \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)}^2 \leq \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u). \quad (31)$$

Portanto,

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon, \quad (32)$$

onde $c = c_1/C$ é uma constante independente de ε . $\square$

3.2 Fórmula fechada da Derivada Topológica

De acordo com o Apêndice A, a expansão assintótica topológica do Funcional de Francfort-Marigo com dano pressurizado toma a forma:

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) &= \psi(\chi) - \pi\varepsilon^2 \left(\mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x}) + \left(1 + \alpha \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha\gamma} \right) p \operatorname{div} u(\hat{x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\rho\mu} \frac{p^2}{(1 + \alpha\gamma)} - \epsilon_b \right) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (33)$$

onde $\mathbb{P}_\gamma$, denominado tensor de polarização, é dado por:

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{1 - \gamma}{1 + \beta\gamma} \left((1 + \beta)I + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha\gamma} I \otimes I \right), \quad (34)$$

com

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \quad e \quad \beta = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (35)$$

Note que, facilmente, identifica-se $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ e a partir daí pode-se computar o termo principal da expansão. De fato, aplicando a definição de derivada topológica em (33) tem-se que:

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x}) - \left(1 + \alpha \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha\gamma}\right) p \operatorname{div} u(\hat{x}) - \frac{1}{2\rho\mu} \frac{p^2}{(1 + \alpha\gamma)} + \epsilon_b. \quad (36)$$

Observa-se que o tensor de polarização obtido é isotrópico, pois foi escolhida uma inclusão circular. Formalmente, pode-se tomar os casos limites $\gamma \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow \infty$. Para $\gamma \rightarrow 0$, a inclusão é equivalente a um furo e a condição de transmissão na fronteira da inclusão degenera para uma condição de contorno de Neumann não homogênea. De fato, neste caso o tensor de polarização é dado por:

$$\mathbb{P}_0 = \frac{1}{2}(1 + \beta)\mathbb{I} + \frac{1}{4}(\alpha - \beta)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (37)$$

Já para $\gamma \rightarrow \infty$ a inclusão elástica passa a representar uma inclusão rígida e o tensor de polarização é dado por:

$$\mathbb{P}_\infty = -\frac{1}{2\beta}(1 + \beta)\mathbb{I} + \frac{1}{4\alpha\beta}(\alpha - \beta)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (38)$$

4 Algoritmo de Otimização Topológica

Nesta seção será apresentado um algoritmo de otimização topológica que utiliza, exclusivamente, as informações da análise de sensibilidade topológica para a evolução do dano no modelo de Franfort-Marigo com dano pressurizado. O algoritmo está fundamentado em uma condição de otimalidade local estabelecido a partir do campo derivada topológica.

Para estabelecer uma condição de otimalidade local, nota-se que, um valor negativo (positivo) da derivada topológica $\mathcal{T}(x)$ em um ponto arbitrário $x \in \Omega$ indica que a introdução de uma inclusão circular infinitesimal, centrada neste ponto, produz uma perturbação no domínio cujo valor da função custo é menor (maior) do que o do domínio original. A partir desta observação, tem-se uma condição suficiente de otimalidade local para o problema de minimização (14), assim como para a classe de problemas com tais perturbações topológicas. A condição é estabelecida da seguinte forma:

$$\mathcal{T}(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \overline{\omega}^*. \quad (39)$$

Isto é, (39) implica, no presente contexto, que a introdução de uma inclusão circular infinitesimal, em qualquer ponto do domínio, pode causar um aumento no valor da função custo e, portanto, ω^* é, de fato, o domínio ótimo local.

É proposta então, uma análise incremental do problema. Em outras palavras, a pressão total está dividida em incrementos que ocorrem de forma progressiva. Dessa forma, a cada incremento da pressão é necessário verificar a existência de indicação para propagação e/ou nucleação de dano. Para representar a evolução do dano, o algoritmo propõe a introdução de uma inclusão circular de tamanho finito (uma geometria), pequena o suficiente para que o valor do funcional em questão decresça, centrada na posição em que o campo derivada topológica é mais negativo. De forma esquemática, o algoritmo para evolução do dano é definido da seguinte forma: (i) aplica-se um incremento na pressão, calcula-se a solução do problema de elasticidade linear associado e o campo derivada topológica, (ii) se todo o campo for positivo, a introdução

de uma inclusão em qualquer ponto do domínio causaria um aumento no valor do funcional, e por isso não existe indicação para que o dano se propague. Então, se ainda houver incrementos de pressão a serem realizados volta-se em (i), caso contrário, encerra-se o programa, (iii) se a derivada topológica em alguma região não danificada for negativa, uma inclusão é criada na posição em que o seu valor é mínimo, (iv) em seguida, a malha é atualizada para acomodar a nova inclusão, uma nova solução do problema de elasticidade linear é obtida e feita uma nova análise do sinal da derivada topológica.

5 Experimentos Numéricos

Com o objetivo de aplicar os resultados obtidos até aqui, será considerado, em particular, um caso bastante utilizado nos dias de hoje, o fraturamento hidráulico em poços horizontais. Neste caso, a perfuração ocorre, inicialmente, na vertical, uma vez alcançada a profundidade desejada a broca é girada em 90° e a perfuração continua na direção horizontal. Os blocos por onde são injetados os fluidos estão distribuídos ao longo do eixo horizontal como ilustra a Figura 4. Os blocos distam entre si, em média, $5m$, portanto, pode-se supor um comportamento semelhante em cada bloco. Desta forma, o domínio de análise considerado aqui representará cada um desses blocos que compõe o reservatório.

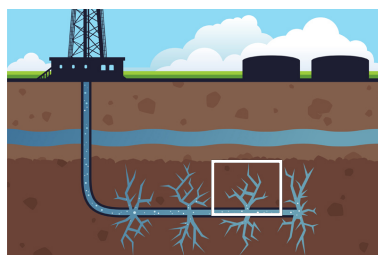


Figure 4: Domínio de análise no reservatório.

Em todos os exemplos o domínio foi discretizado com elementos finitos triangulares lineares e considera-se os seguintes dados: módulo de Young $E = 30 \times 10^9 Pa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, contraste da propriedade material $\gamma = 10^{-6}$ e a pressão total $p_t = 4 \times 10^6 Pa$. O módulo de Young e a pressão crítica são dados observados em poços reais, ver Pereira et al.(2014). Todos os exemplos são abordados em estado plano de deformações e a pressão total foi dividida em 100 passos de incrementos.

5.1 Exemplos 1

Neste exemplo, o domínio Ω trata-se de um quadrado com dimensão $5m$ e com condições de simetria na base e nas laterais. Na parte superior, a condição é de não deslocamento na direção y . O dano inicial, que representa uma falha geológica presente na formação, possui comprimento $h = 1m$, espessura $\delta = 0.05m$ e está localizado no centro da base imediatamente acima do poço cuja largura é $0.02m$, ver Figura 5(a).

Um primeiro aspecto importante na realização do experimento consiste em caracterizar o tamanho da inclusão. A questão é que, conceitualmente, uma inclusão tem proporção infinitesimal, sendo assim, é preciso escolher o diâmetro da inclusão pequeno o suficiente para que

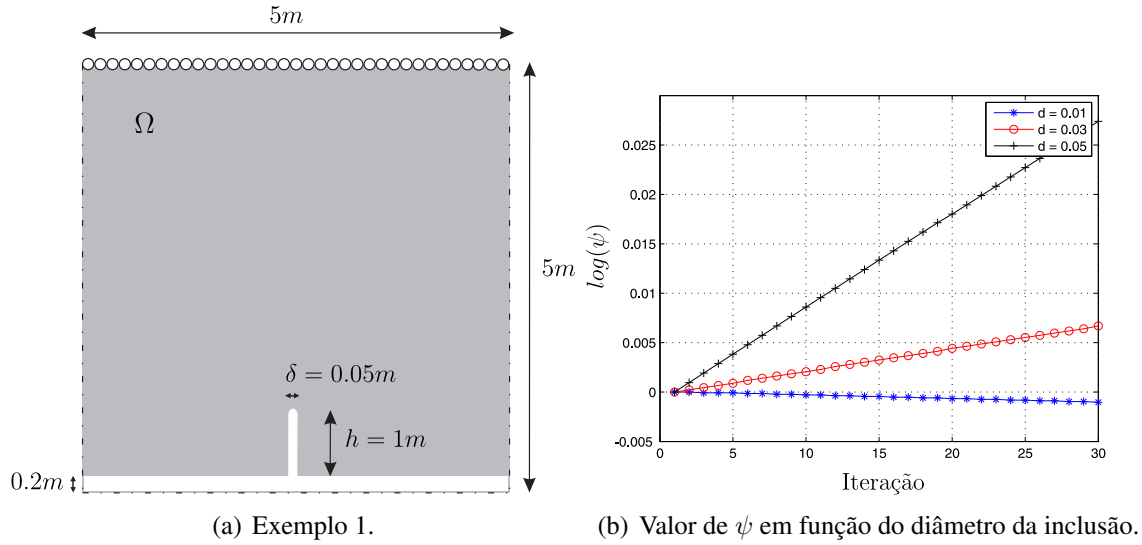


Figure 5: Exemplo 1

o funcional de Francfort-Marigo com dano pressurizado decresça, mas que possa ser tratado numericamente. Para realizar este teste, a espessura do dano inicial é fixada em $\delta = 0.05m$ e utilizados os seguintes diâmetros: $d \in \{0.05, 0.03, 0.01\} [m]$. A figura 5(b) mostra os resultados da evolução do funcional ψ em 30 iterações para os diferentes diâmetros considerados (A fim de facilitar a visualização foi plotada a relação $\log(\psi) \times$ iteração).

Note que somente a partir de $d = 0.01$ o funcional de Francfort-Marigo com dano pressurizado começa a decrescer. Sendo assim, os experimentos apresentados abaixo foram desenvolvidos com espessura do dano inicial $\delta = 0.05$ e diâmetro da inclusão $d = 0.01$.

Outro teste importante a ser realizado consiste em caracterizar a pressão de ativação da falha geológica, isto é, a pressão crítica. Conforme mencionado anteriormente, afim de contornar esta limitação do modelo no contexto de fraturamento hidráulico, utilizou-se a espessura inicial δ da região danificada como fator de escala. Mais precisamente, definiu-se o novo parâmetro de dissipação de energia ϵ_δ , mencionado na seção 2.3, da seguinte forma:

$$\epsilon_\delta = \frac{\epsilon_b}{\delta}, \quad (40)$$

onde foi feito $\epsilon_s = \epsilon_b$. Para caracterizar a pressão crítica foram utilizadas as seguintes espessuras para o dano inicial: $\delta \in \{1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024\} [m]$. O gráfico da Figura 6(a) mostra, respectivamente, os valores da pressão de ativação (normalizados) para os valores de δ estabelecidos acima com e sem a correção mencionada. Nota-se que sem a correção, a medida que δ diminui, o valor da pressão de ativação tende, abruptamente, para zero, o que corrobora com o fato de que, neste caso, qualquer valor da pressão já seria suficiente para elevar a densidade de energia a valores infinitamente altos na ponta da trinca. Com a correção, a pressão crítica apresenta um aparente comportamento assintótico em torno de um valor finito não nulo.

O resultado final obtido para o exemplo em questão é mostrado na Figura 6(b). Foram realizados 81 incrementos na pressão até que houvesse indicação de propagação. Portanto, a pressão crítica observada foi $p_c = 3.24MPa$. Este resultado foi obtido após 550 iterações a partir da propagação do dano, em seguida o programa foi interrompido.

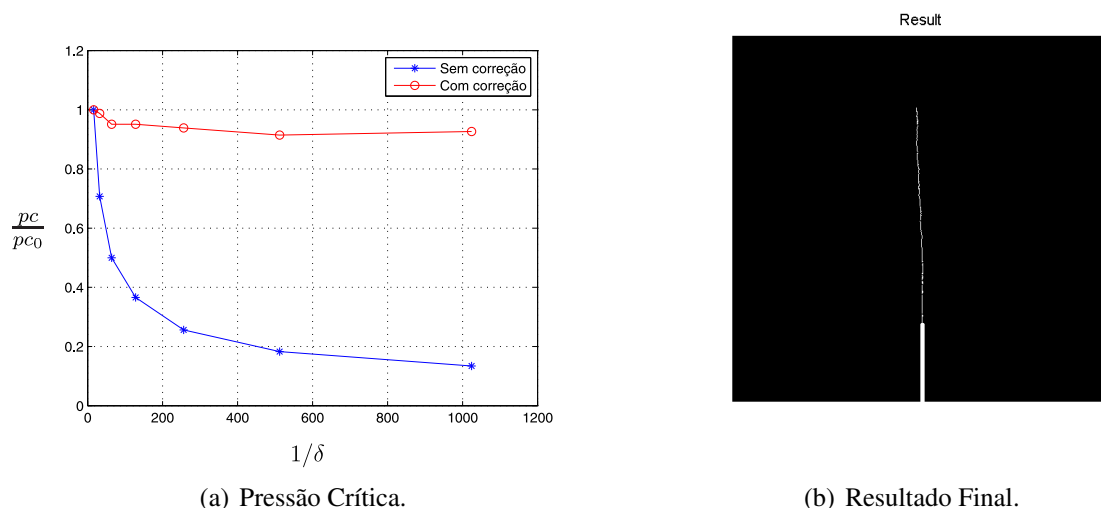


Figure 6: Exemplo 1

5.2 Exemplos 2

Neste segundo exemplo, tem-se a mesma situação proposta no exemplo anterior, todavia, considera-se que neste caso a falha geológica encontra-se inclinada em quarenta e cinco graus, ver Figura 7(a). O resultado obtido está mostrado na Figura 7(b).

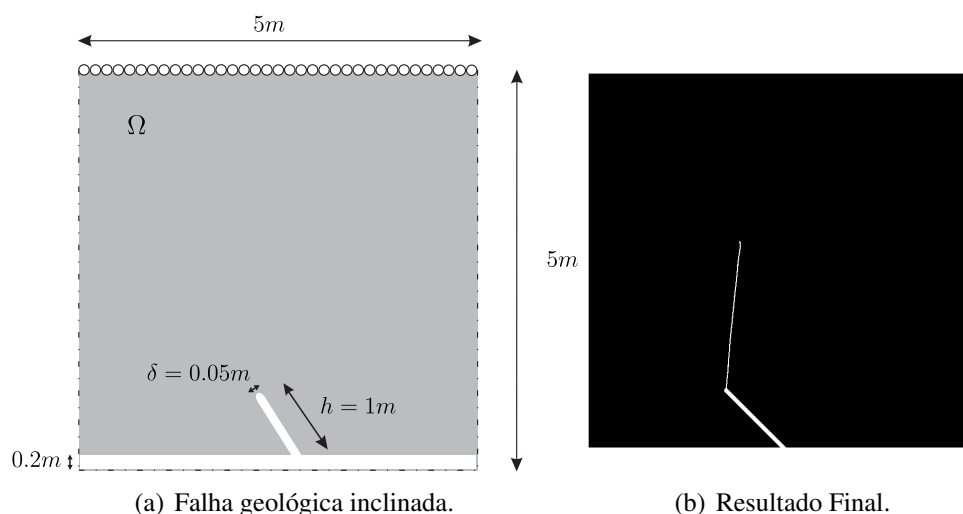


Figure 7: Exemplo 2

5.3 Exemplos 3

Neste próximo exemplo, é levada em conta a presença de um poço transversal pressurizado cuja pressão interna é a mesma observada no interior do poço de fraturamento. O objetivo é analisar o comportamento da trajetória descrita pela trinca na presença do poço transversal, ver Figura 8(a). O resultado obtido está mostrado na Figura 8(b). Nota-se que a trinca é absorvida pelo poço transversal.

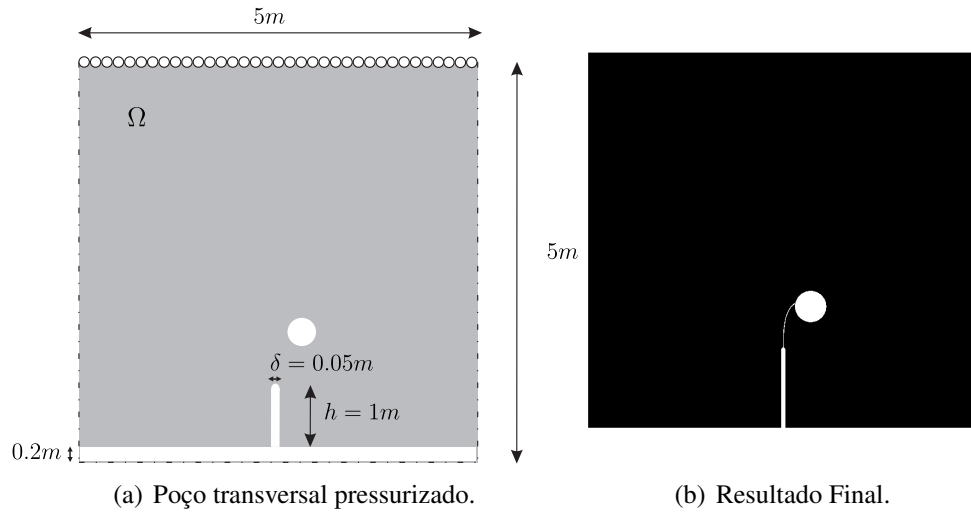


Figure 8: Exemplo 3

5.4 Exemplos 4

Neste último exemplo, é considerada uma situação análoga a anterior, porém, considerando que o poço transversal não está pressurizado, ver Figura 9(a). O resultado obtido está mostrado na Figura 9(b). Observa-se que, neste caso, a trinca é repelida.

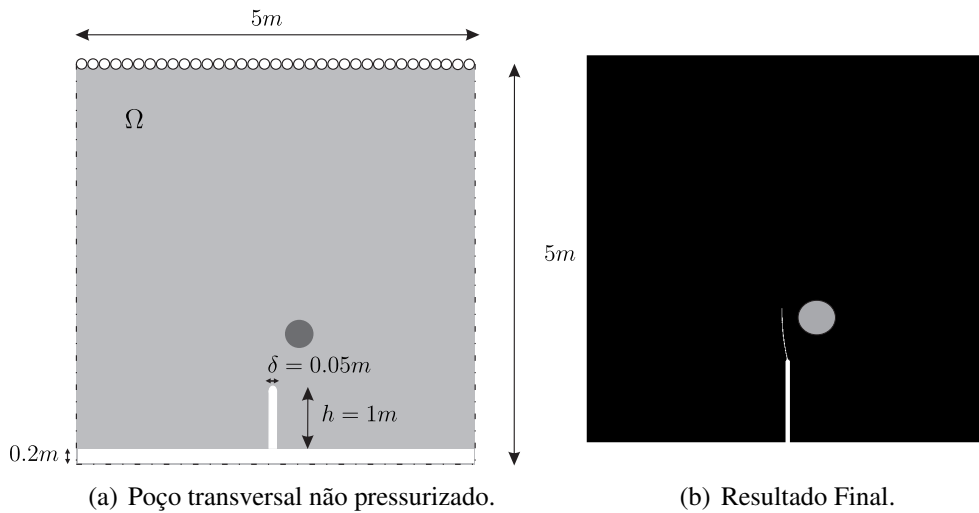


Figure 9: Exemplo 4

6 Conclusão

No presente trabalho foi proposto e apresentado um modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática. O novo modelo foi obtido, basicamente, incorporando o conceito de dano pressurizado ao modelo de Francfort-Marigo. Foi proposto então, um problema de otimização topológica que consiste em minimizar o funcional de Francfort-Marigo com dano pressurizado. Em seguida, foi realizada a análise de sensibilidade topológica do referido funcional onde obteve-se a respectiva derivada topológica. Cabe destacar que a derivada topológica

para o funcional de Francfort-Marigo é conhecida na literatura apenas para o caso em que a condição de transmissão na interface da inclusão é homogênea. Portanto, a derivada topológica para o caso em que a condição de transmissão na interface da inclusão é não homogênea representa a primeira contribuição deste trabalho. Depois, foi apresentado um algoritmo de nucleação e propagação de dano submetido a pressão hidrostática com o objetivo de simular o processo de fraturamento hidráulico. O presente algoritmo está baseado em uma condição de otimalidade local estabelecido a partir do campo derivada topológica. Finalmente, foram apresentados alguns experimentos numéricos para calibrar os parâmetros envolvidos no processo, validar numericamente o modelo proposto bem como ilustrar o comportamento de uma região danificada quando submetida à pressão crítica. A validação numérica do modelo aqui proposto representa a segunda contribuição importante deste trabalho. Observou-se ainda que a trajetória descrita pela trinca sofre influência quando na presença de poços transversais, o que sugere a possibilidade de controlar tais trajetórias.

APÊNDICE A. CÁLCULO DA DERIVADA TOPOLÓGICA

Observando a definição (18) nota-se que é necessário, em primeiro lugar, calcular a diferença entre o funcional de energia perturbado, $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$, e o funcional de energia original, $\psi(\chi)$, para, posteriormente, tomar o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e então obter a respectiva derivada topológica, indicada por $\mathcal{T}(\hat{x})$, do funcional ψ . Com essa finalidade, tendo em conta os problemas definidos sobre os domínios original e perturbado, pode-se escolher como função teste, por exemplo, $\eta = u_\varepsilon - u$. Então, da equação de estado (6) segue que:

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u) = \int_{\omega} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u), \quad (41)$$

dai tem-se que:

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s u = \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s u_\varepsilon - \int_{\omega} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u). \quad (42)$$

Introduzindo a expressão (42) na definição do funcional de energia original (5), obtém-se a seguinte expressão:

$$\psi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s u_\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\omega} p \operatorname{div}(u_\varepsilon + u) + \epsilon_b \int_{\omega} 1. \quad (43)$$

Agora, tomando $\eta = u_\varepsilon - u$ na equação de estado (22) tem-se que:

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s(u_\varepsilon - u) = \int_{\omega} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u) + \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u), \quad (44)$$

$$(45)$$

dai segue que:

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u_\varepsilon = \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u + \int_{\omega} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u) + \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u). \quad (46)$$

Introduzindo a expressão (46) na definição do funcional de energia perturbado (21), o mesmo pode ser reescrito como:

$$\psi(\chi_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u - \frac{1}{2} \int_{\omega} p \operatorname{div}(u_\varepsilon + u) - \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon + u) + \epsilon_b \int_{\omega} 1 + \epsilon_b \int_{B_\varepsilon} 1. \quad (47)$$

A partir das equações (43) e (47), a variação entre os funcionais de energia resulta em:

$$\psi(\chi_\varepsilon) - \psi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u - \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon + u) + \epsilon_b \int_{B_\varepsilon} 1. \quad (48)$$

Considerando a definição do contraste γ_ε , dado por (20), tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon) - \psi(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u + \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} \gamma \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u - \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u \\ & - \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u - \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon + u) + \epsilon_b \int_{B_\varepsilon} 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Cancelando os termos idênticos e somando e restando o termo

$$\frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} u, \quad (50)$$

obtem-se finalmente que:

$$\psi(\chi_\varepsilon) - \psi(\chi) = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u - \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div}(u_\varepsilon - u) + \epsilon_b \int_{B_\varepsilon} 1. \quad (51)$$

Observe que a variação da energia é escrita como uma integral concentrada na inclusão B_ε .

Agora, para aplicar a definição de derivada topológica é necessário conhecer o comportamento assintótico da função u_ε com respeito ao parâmetro ε . O conhecimento explícito deste comportamento permite identificar a função $f(\varepsilon)$, assim como os termos de ordem superior a ε . Uma vez conhecida a função $f(\varepsilon)$ toma-se o limite com $\varepsilon \rightarrow 0$ para obter a derivada topológica $\mathcal{T}(\hat{x})$ do funcional ψ . Todavia, este procedimento não é trivial em geral. É necessário realizar a análise assintótica da função u_ε com respeito ao parâmetro ε associada à condição de transmissão na inclusão. Uma justificativa rigorosa da expansão assintótica de u_ε pode ser vista nos trabalhos Kozlov et al.(1999) e Mazja et al.(1991), por exemplo. Com essa finalidade, considere um ansatz para u_ε na forma observada em Kozlov et al.(1999):

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + w_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x), \quad (52)$$

onde $u(x)$ é a solução do problema não perturbado, $w_\varepsilon(x)$ é o termo de ordem ε e $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ carrega os termos de ordem superior a ε . Aplicando o operador σ_ε na expansão acima tem-se:

$$\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = \sigma_\varepsilon(u(x)) + \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) + \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)), \quad (53)$$

expandindo $\sigma_\varepsilon(u(x))$ em série de Taylor em torno de $\hat{x}$ obtém-se:

$$\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = \sigma_\varepsilon(u(\hat{x})) + \gamma_\varepsilon \nabla \sigma(u(\xi))(x - \hat{x}) + \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) + \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)), \quad (54)$$

onde ξ é um ponto entre x e $\hat{x}$. Na fronteira da inclusão B_ε observa-se que:

$$\llbracket \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) \rrbracket n = -pn \Rightarrow \left(\sigma(u_\varepsilon(x)) \Big|_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}} - \gamma \sigma(u_\varepsilon(x)) \Big|_{B_\varepsilon} \right) n = -pn, \quad (55)$$

onde $\sigma_\varepsilon(\varphi) = \gamma_\varepsilon \sigma(\varphi)$. Então, avaliando a expansão (54) sobre ∂B_ε obtém-se:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma) \sigma(u(\hat{x})) n - \varepsilon (1 - \gamma) (\nabla \sigma(u(\xi)) n) n \\ + \llbracket \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) \rrbracket n + \llbracket \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)) \rrbracket n = -pn, \end{aligned} \quad (56)$$

Portanto, pode-se escolher $\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)$ tal que:

$$\llbracket \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon(x)) \rrbracket n = [(\gamma - 1)\sigma(u(\hat{x})) - pI] n \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \quad (57)$$

A partir daí, pode-se construir o seguinte problema obtido quando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \text{ tal que:} \\ \text{div} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty, \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \rrbracket n = \hat{u} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \end{array} \right. \quad (58)$$

com $\hat{u} = [(\gamma - 1)\sigma(u(\hat{x})) - pI] n$. O problema (58), denominado problema exterior, admite solução explícita. Para $p = 0$ a solução foi encontrada por Novotny & Sokołowski (2013), página 156 e para $p \neq 0$ a solução foi encontrada por Xavier (2014), página 18.

Uma vez que o tensor tensão associado a solução do problema exterior (58) é uniforme dentro da inclusão $B_\varepsilon(\hat{x})$, a tensão pode ser escrita da seguinte forma compacta:

$$\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)|_{B_\varepsilon} = \mathbb{T}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) + \mathbb{T}_\gamma, \quad (59)$$

onde $\mathbb{T}_\gamma$ é um tensor isotrópico de quarta ordem dado por:

$$\mathbb{T}_\gamma = \frac{\gamma(1 - \gamma)}{2(1 + \beta\gamma)} \left(2\beta \mathbb{I} + \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\gamma} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \quad (60)$$

e $\mathbb{T}_\gamma$ é um tensor de segunda ordem, também isotrópico, dado por:

$$\mathbb{T}_\gamma = p \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha\gamma} \mathbf{I}. \quad (61)$$

O resultado mostrado em (59) corrobora com o famoso Teorema de Eshelby, ver Eshelby (1957) e Eshelby (1959), que representa um dos maiores avanços teóricos do século XX em mecânica do contínuo, ver Kachanov et al.(2003). A seguir, será construído o termo $\sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$ de (53) de forma que venha a compensar as discrepâncias introduzidas pelos termos de ordem superior a ε , assim como pela camada limite sobre o contorno exterior $\partial\Omega$. Isto significa que o resíduo $\tilde{u}_\varepsilon$ de (52) deve ser solução do seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \tilde{u}_\varepsilon, \text{ tal que:} \\ \text{div} \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon \sigma(\tilde{u}_\varepsilon), \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w_\varepsilon \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(\tilde{u}_\varepsilon)n = -\sigma(w_\varepsilon)n \quad \text{sobre } \Gamma_N, \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \rrbracket n = 0 \quad \text{sobre } \partial\omega, \\ \llbracket \tilde{u}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \rrbracket n = \varepsilon h \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \quad (62)$$

com $h = (1 - \gamma)(\nabla \sigma(u(\xi))n)n$. Tem-se a seguinte estimativa para o resíduo $\tilde{u}_\varepsilon$: $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon^2)$. A demonstração pode ser encontrada em Novotny & Sokołowski (2013), página 155.

Agora, é possível calcular as integrais em (51) de forma a identificar os termos que dependem de ε assim como a função $f(\varepsilon)$ e obter, finalmente, a derivada topológica $\mathcal{T}(\hat{x})$ do funcional ψ . De fato, substituindo a expansão proposta para u_ε na primeira parcela de (51) tem-se:

$$\int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla^s u = \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u) \cdot \nabla^s u}_{(a)} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla^s u}_{(b)} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s u}_{(c)}. \quad (63)$$

Termo (a). Dentro da inclusão tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u(x)) \cdot \nabla^s u(x) &= \gamma \int_{B_\varepsilon} (\sigma(u(x)) \cdot \nabla^s u(x) \pm \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x})) \\ &= \pi \varepsilon^2 \gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x}) + \gamma \int_{B_\varepsilon} (h(x) - h(\hat{x})), \end{aligned} \quad (64)$$

onde $h(x) - h(\hat{x}) = \sigma(u(x)) \cdot \nabla^s u(x) - \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x})$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na segunda parcela do lado direito obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} (h(x) - h(\hat{x})) &\leq \|h(x) - h(\hat{x})\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|1\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq c_1 \varepsilon^2 c_2 \varepsilon = O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

onde utiliza-se a regularidade elíptica da função u .

Termo (b). A solução exata do problema exterior (58) é conhecida explicitamente, logo:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla^s u &= \int_{B_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla^s u(x) \pm \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla^s u(\hat{x})) \\ &= \nabla^s u(\hat{x}) \cdot \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) + \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot (\nabla^s u(x) - \nabla^s u(\hat{x})) \\ &= \pi \varepsilon^2 \nabla^s u(\hat{x}) \cdot (\mathbb{T}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) + \mathbb{T}_\gamma) + \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot (\nabla^s u(x) - \nabla^s u(\hat{x})). \end{aligned} \quad (65)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na segunda parcela do lado direito tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot (\nabla^s u(x) - \nabla^s u(\hat{x})) &\leq \|\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|\nabla^s u(x) - \nabla^s u(\hat{x})\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} c_0 \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &= c_1 \varepsilon c_2 \varepsilon^2 = O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (66)$$

onde utiliza-se, novamente, a regularidade elíptica da função u .

Termo (c). Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e utilizando a estimativa conhecida para $\tilde{u}_\varepsilon$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla^s u &\leq \|\sigma_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|\nabla^s u\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &= \|\gamma \rho \mathbb{C} \nabla^s \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|\nabla^s u\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq c_0 \|\nabla^s \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|\nabla^s u\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq c_1 \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)} \|\nabla^s u\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &= c_2 \varepsilon^2 c_3 \varepsilon = O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (67)$$

Para a segunda parcela de (51) tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} u &= \int_{B_\varepsilon} (p \operatorname{div} u(x) \pm p \operatorname{div} u(\hat{x})) \\ &= \pi \varepsilon^2 p \operatorname{div} u(\hat{x}) + \int_{B_\varepsilon} p (\operatorname{div} u(x) - \operatorname{div} u(\hat{x})), \end{aligned} \quad (68)$$

daí, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na integral em (68), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} p (\operatorname{div} u(x) - \operatorname{div} u(\hat{x})) &\leq c_0 p \int_{B_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| \\ &\leq c_0 p \|x - \hat{x}\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \|1\|_{L^2(B_\varepsilon, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq c_1 \varepsilon^2 c_2 \varepsilon = O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (69)$$

onde, mais uma vez, utiliza-se a regularidade elíptica da função u .

Agora, para a terceira parcela de (51), utilizando a expansão proposta para u_ε e a estimativa conhecida para $\tilde{u}_\varepsilon$, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} (u_\varepsilon - u) &= \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} (w_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} w_\varepsilon + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (70)$$

Daí, utilizando a relação constitutiva e fazendo algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$\frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} p \operatorname{div} w_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} \frac{p}{2\gamma\rho(\mu + \lambda)} \operatorname{tr} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon), \quad (71)$$

onde $\operatorname{tr} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)$, avaliado na inclusão, é dado por:

$$\operatorname{tr} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)|_{B_\varepsilon(\hat{x})} = \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha\gamma} [(1 - \gamma) \operatorname{tr} \sigma(u(\hat{x})) + 2p]. \quad (72)$$

Por fim, para a última parcela de (51) tem-se:

$$\epsilon_b \int_{B_\varepsilon} 1 = \pi \varepsilon^2 \epsilon_b. \quad (73)$$

Dessa forma, a variação da energia pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{\pi \varepsilon^2} &= -\frac{1 - \gamma}{2\gamma} [\gamma \sigma(u(\hat{x})) + (\mathbb{T}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) + \mathbb{T}_\gamma)] \cdot \nabla^s u(\hat{x}) \\ &\quad - p \operatorname{div} u(\hat{x}) - \frac{\alpha}{2} \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha\gamma} p \operatorname{div} u(\hat{x}) - \frac{p^2}{2\mu\rho(1 + \alpha\gamma)} + \epsilon_b + \frac{o(\varepsilon^2)}{\pi \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (74)$$

Tomando $f(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$ e aplicando a definição de derivada topológica na expressão acima tem-se:

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x}) - \left(1 + \alpha \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha\gamma}\right) p \operatorname{div} u(\hat{x}) - \frac{1}{2\mu\rho} \frac{p^2}{(1 + \alpha\gamma)} + \epsilon_b, \quad (75)$$

onde $\mathbb{P}_\gamma$, denominado tensor de polarização, é dado por (34).

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio das seguintes agências de fomento para o desenvolvimento deste trabalho: PRH/ANP-50 (Agência Nacional do Petróleo) e FAPERJ (Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro).

REFERÊNCIAS

- Allaire, G., Jouve, F. & Van Goethem, N., (2011). Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *Journal of Computational Physics*, 230(12):5010-5044, 2011.
- Eshelby, J.D., (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society: Section A*, 252:561-569, 1959.
- Eshelby, J.D., (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society: Section A*, 241(1226):376-396, 1957.
- Farias, J.M.C., (2013). *Análise de sensibilidade topológica aplicada ao modelo de dano de Francfort-Marigo*. Msc dissertation, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brazil, 2013.
- Francfort, G.A. & Marigo, J.J., (1993). Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *European Journal of Mechanics, A/ Solids*, 12(2):149-189, 1993.
- Kachanov, M., Shafiro, B. & Tsukrov, I., (2003). *Handbook of Elasticity Solutions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- Kozlov, V.A., Mazya, W.G. & Movchan, A.B., (1999). *Asymptotic analysis of fields in multi-structures*. Clarendon Press, Oxford, 1999.
- Mazja, W.G., Nasarow, S.A. & Plamenewski, B.A., (1991). *Asymptotische theorie elliptischer randwertaufgaben in singular gestörten gebieten, vol. 1 (English translation: Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, vol. 1, Basel: Birkhäuser Verlag, 2000)*. Akademie- Verlag, Berlin, 1991.
- Novotny, A.A. & Sokołowski, J., (2013). *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer, 2013.
- Pereira, L.C., Guimaraes, L.J.N., Horowitz, B. & Sánchez, M., (2014). Coupled hydro-mechanical fault reactivation analysis incorporating evidence theory for uncertainty quantification. *Computers and Geotechnics*, 56:202-215, 2014.
- Xavier, M.D.S., (2014). *Derivada topológica na otimização de estruturas submetidas à pressão hidrostática*. Msc dissertation, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brazil, 2014.