



ANÁLISE ASSINTÓTICA TOPOLÓGICA DO MODELO DE FLEXÃO DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN

Vitor Sales

Antonio André Novotny

vitores@lncc.br

novotny@lncc.br

Laboratório nacional de Computação cinética, LNCC/MCT

Departamento de Matemática Aplicada e Computacional

25651-075, Av. Getúlio Vargas 333, Petrópolis - RJ, Brasil

Abstract. *O conceito de derivada topológica tem se mostrado útil em muitas aplicações, tais como otimização topológica, problemas inversos, processamento de imagens, modelagem constitutiva multi-escala, mecânica da fratura e modelagem da evolução de dano. A análise assintótica topológica foi amplamente desenvolvida para uma grande variedade de problemas modelados por equações diferenciais parciais. Por outro lado, a derivada topológica associada a problemas acoplados é conhecida apenas em sua forma abstrata. Neste trabalho, portanto, considera-se o modelo de flexão de placa de Reissner-Mindlin, que é escrito na forma de um sistema acoplado de equações diferenciais parciais. Em particular, a análise assintótica topológica da energia potencial total associada é desenvolvida e a derivada topológica com relação à nucleação de uma inclusão circular é obtida na sua forma fechada. Finalmente, os resíduos da expansão assintótica topológica são estimados e uma justificativa matemática completa para a derivada topológica é apresentada.*

Keywords: 1. Equações diferenciais parciais 2. Análise Assintótica. 3. Modelo de Flexão de Placas de Reissner-Mindlin. 4. Derivada topológica.

1 INTRODUÇÃO

Uma placa é um corpo em três dimensões no qual uma dimensão, denominada espessura, é relativamente menor que as outras duas dimensões. As placas podem ser divididas em: placas finas ou delgadas e placas espessas. O importante a ser diferenciado entre placas finas e espessas são as hipóteses necessárias para construção dos modelos.

O modelo de flexão de placas de Kirchhoff pode ser visto como uma extensão do modelo de viga de Euler-Bernoulli. A teoria de Kirchhoff não considera a deformação por cisalhamento transversal e se limita a placas delgadas. Por outro lado, a teoria de Reissner-Mindlin leva em conta o cisalhamento transversal, podendo então ser aplicado na análise de flexão de placas espessas. Cabe mencionar que o modelo de Reissner-Mindlin pode ser visto como uma extensão do modelo de vigas de Timoshenko.

O modelo matemático, embasado na teoria de Reissner-Mindlin, é escrito na forma de um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem totalmente acoplado. Neste trabalho objetiva-se obter a derivada topológica associada ao modelo de flexão de placa de Reissner-Mindlin. A análise de sensibilidade topológica fornece um desenvolvimento assintótico para um funcional de forma adotado, cujo termo principal é um campo escalar, denominado derivada topológica, que mede a sensibilidade do referido funcional quando uma perturbação singular (furo, inclusão, termofonte, etc) infinitesimal é introduzida em um ponto arbitrário do domínio de definição do problema. Cabe esclarecer que a derivada topológica associada ao modelo de Kirchhoff já está disponível Amstutz and Novotny (2011).

A derivada topológica é definida através do tensor de polarização proveniente da análise assintótica em relação ao parâmetro pequeno que controla o tamanho da perturbação topológica. Este tensor depende da forma da referida perturbação e possui uma representação explícita somente em alguns casos particulares. Sendo assim, é proposto um procedimento axiomático para obtenção do tensor de polarização e consequentemente da derivada topológica

Os tensores de polarização associados aos efeitos de cisalhamento e flexão oriundos da análise assintótica do modelo de Reissner-Mindlin são análogos aos tensores de polarização associados aos modelos de Laplace e Navier, respectivamente. Finalmente, é apresentada a derivada topológica da energia potencial total associada ao problema de flexão de placa de Reissner-Mindlin, considerando a nucleação de uma inclusão de forma arbitrária como perturbação topológica e levando em conta material anisotrópico e homogêneo. Por último, os resíduos da expansão assintótica topológica são estimados, o que conduz à justificativa matemática completa para a derivada topológica.

2 CONCEITO DE DERIVADA TOPOLÓGICA

A expansão assintótica topológica mede a sensibilidade de um determinado funcional de forma em relação a uma perturbação infinitesimal do domínio de definição do problema. O termo mais importante dessa expansão é denominado derivada topológica, que depende somente da solução do problema definido no domínio não perturbado. A derivada topológica é o primeiro termo da expansão assintótica do funcional de forma com relação ao parâmetro associado ao tamanho da perturbação infinitesimal. Este conceito foi introduzido rigorosamente por Sokolowski e Zochowski (1999), desde então, a derivada topológica mostrou-se útil no tratamento de muitos problemas, por exemplo: Otimização topológica, Problemas inversos,

Processamento de imagens, Modelos constitutivos multiescala, Mecânica do dano e da fratura, O primeiro livro acerca do tema derivada topológica foi publicado por Novotny and Sokołowski (2013).

Para o cálculo da derivada topológica é considerado um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sujeito a uma perturbação não suave confinada em uma pequena região $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon\omega$ com comprimento ε e centro em $\hat{x}$, como mostrado na Figura 1. A seguir é definida uma função característica associada ao domínio não perturbado, Ω , $x \mapsto \chi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $\chi = \mathbb{1}_\Omega$. Por outro lado, é definida uma função constante por partes associada ao domínio perturbado $x \mapsto \chi_\varepsilon(\hat{x}, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_\Omega - (1 - \gamma)\mathbb{1}_{\omega_\varepsilon(\hat{x})}$, onde γ é o contraste.

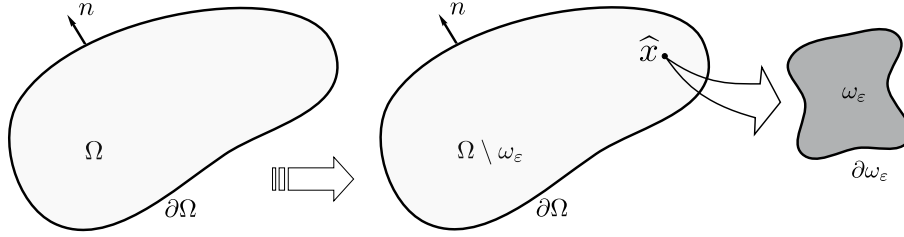


Figura 1: Conceito da derivada topológica.

É possível assumir a seguinte expansão para o funcional de forma dado por $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$, associado ao domínio topologicamente perturbado,

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)), \quad (1)$$

onde $\psi(\chi)$ é o funcional de forma associado ao domínio original (não perturbado), $f(\varepsilon)$ é uma função positiva tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e ainda, $o(f(\varepsilon))$ é o termo remanescente, ou seja $o(f(\varepsilon))/f(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. A função $\hat{x} \mapsto \mathcal{T}(\hat{x})$ é chamada de derivada topológica de ψ no ponto $\hat{x}$. Esta derivada pode ser vista como uma correção de primeira ordem de $\psi(\chi)$ para aproximar $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$. Reorganizando a equação (1) tem-se:

$$\frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)} = \mathcal{T}(\hat{x}) + \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)}. \quad (2)$$

passando o limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na expressão acima obtém-se:

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)}. \quad (3)$$

A perturbação topológica é aqui caracterizada pela nucleação de uma inclusão com propriedades físicas distintas do meio. Sendo assim os domínios geométricos são topologicamente equivalentes.

3 MODELO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

A derivada topológica para placa de Kirchhoff foi calculada em Amstutz and Novotny (2011). Nessa teoria, o operador diferencial se caracteriza por ser de quarta ordem. Por outro lado, a derivada topológica para placa de Reissner-Mindlin não foi apresentada na literatura.

Nesta última teoria, o modelo mecânico é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais totalmente acoplado de segunda ordem. Aqui cabe salientar que a derivada topológica para um problema acoplado foi apresentada apenas de forma abstrata em Cardone et al. (2010) para o problema piezoelétrico. Portanto, neste capítulo é apresentada a derivada topológica para placa com as hipóteses de Reissner-Mindlin de forma fechada.

Como exposto acima, são consideradas as hipóteses cinemáticas do problema de flexão de placa de Reissner-Mindlin apresentadas em Mindlin (1951) e Reissner (1945), onde o domínio da placa bidimensional é dado por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com espessura $h > 0$ constante, por simplicidade. Será considerado que a placa é submetida a efeitos de flexão e cisalhamento sob as seguintes premissas cinemáticas: as fibras normais ao plano médio da placa permanecem retas durante o processo de deformação, mas não necessariamente perpendiculares ao plano médio, e ainda, estas fibras não sofrem variações no seu comprimento. Consequentemente, as deformações normais são nulas e as deformações cisalhantes transversais não são desprezíveis.

3.1 Formulação do Problema

Nesta seção, é estudada a análise assintótica topológica do funcional dado pela energia potencial total associada ao problema de flexão de placa de Reissner-Mindlin, onde a perturbação topológica é de forma arbitrária com a propriedade do material anisotrópico e homogêneo. A seguir é apresentado o problema original e o problema perturbado, bem como a existência da derivada topológica.

Problema não Perturbado

O funcional de forma associado ao problema não perturbado é definido como:

$$\psi(\chi) := \mathcal{J}(\theta, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w)) - \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot \theta + \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q} w, \quad (4)$$

onde $\mathcal{M}(\theta) = \mathbb{C} \nabla^s \theta = \mathbb{C} \left(\frac{1}{2} (\nabla \theta + (\nabla \theta)^\top) \right)$ é o momento fletor e $\mathcal{Q}(\theta, w) = \mathbf{K}(\theta - \nabla w)$ é o esforço cisalhante. Os tensores constitutivos $\mathbb{C}$ e $\mathbf{K}$, que são respectivamente tensores de quarta e segunda ordem, são considerados anisotrópicos e homogêneos. A rotação θ e o deslocamento transversal w são soluções do seguinte problema variacional acoplado: Encontre $(\theta, w) \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \eta_\theta) = \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot \eta_\theta \\ \int_{\Omega} \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \nabla \eta_w = \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q} \eta_w \end{cases}, \quad \forall (\eta_\theta, \eta_w) \in \mathcal{V}. \quad (5)$$

No problema variacional (5), $\mathcal{U}$ é o conjunto das funções admissíveis e $\mathcal{V}$ é o espaço das variações admissíveis, e são dados por:

$$\mathcal{U} := \{(\varphi_\theta, \varphi_w), \varphi_\theta \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ e } \varphi_w \in H^1(\Omega) : \varphi_w|_{\Gamma_{D_w}} = \bar{w}, \varphi_\theta|_{\Gamma_{D_\theta}} = \bar{\theta}\}, \quad (6)$$

$$\mathcal{V} := \{(\varphi_\theta, \varphi_w), \varphi_\theta \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ e } \varphi_w \in H^1(\Omega) : \varphi_w|_{\Gamma_{D_w}} = 0, \varphi_\theta|_{\Gamma_{D_\theta}} = 0\}, \quad (7)$$

na qual será adotada a notação $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. As fronteiras de Neumann são denotadas por Γ_{N_θ} e Γ_{N_w} , enquanto que as fronteiras de Dirichlet, por Γ_{D_θ} e Γ_{D_w} . Assim, $\bar{\theta} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{D_\theta})$ é o dado de Dirichlet que representa uma rotação prescrita sobre Γ_{D_θ} e $\bar{w} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{D_w})$ é o dado de Dirichlet associado a um deslocamento transversal prescrita sobre Γ_{D_w} . O dado de Neumann sobre Γ_{N_θ} é $\bar{m} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{N_\theta})$, que representa o momento aplicado sobre Γ_{N_θ} , e o dado de Neumann $\bar{q} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{N_w})$ representa os esforços cortantes sobre Γ_{N_w} . Para que o problema esteja bem posto deve-se destacar que $\Gamma_{D_w} \cap \Gamma_{N_w} = \emptyset$ e $\Gamma_{D_\theta} \cap \Gamma_{N_\theta} = \emptyset$, onde as medidas de Γ_{D_θ} e Γ_{D_w} são diferentes de zero. A fim de garantir a existência e a unicidade para (5) é necessário satisfazer $\Gamma_{D_w} \cap \Gamma_{D_\theta} \neq \emptyset$ ou a curvatura de Γ_{D_w} diferente de zero, ver Amstutz and Novotny (2011).

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional (5) pode ser enunciada da seguinte forma: Encontre (θ, w) tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\mathcal{M}(\theta)) + \mathcal{Q}(\theta, w) &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathcal{Q}(\theta, w)) &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \mathcal{M}(\theta) &= \mathbb{C} \nabla^s \theta, \\ \mathcal{Q}(\theta, w) &= \mathbf{K}(\theta - \nabla w), \\ w &= \bar{w} \quad \text{sobre } \Gamma_{D_w}, \\ \theta &= \bar{\theta} \quad \text{sobre } \Gamma_{D_\theta}, \\ \mathcal{M}(\theta)n &= \bar{m} \quad \text{sobre } \Gamma_{N_\theta}, \\ \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot n &= \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_{N_w}. \end{array} \right. \quad (8)$$

onde n é o vetor normal unitário sobre $\partial\Omega$ direcionado para o exterior do domínio Ω . O problema de Reissner-Mindlin é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais totalmente acoplado de segunda ordem (ver Rössle and Sändig (2011) e McLean (2000, Ch. 4)). Além disso, esse modelo possui propriedades elípticas e esse fato será utilizado frequentemente nesse trabalho.

Problema Perturbado

O domínio Ω será perturbado pela nucleação de uma pequena inclusão ω_ε de forma arbitrária. Será assumido que $\overline{\omega_\varepsilon(\hat{x})} \Subset \Omega$, ou seja, a perturbação não toca a fronteira $\partial\Omega$. Também será considerado o parâmetro $0 < \gamma < \infty$ representando o contraste da propriedade material.

A energia potencial total associada ao problema perturbado pode ser escrita como:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) := \mathcal{J}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon)) - \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot \theta_\varepsilon + \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q} w_\varepsilon, \quad (9)$$

onde o parâmetro $\gamma_{\omega_\varepsilon}$ é definido por:

$$\gamma_{\omega_\varepsilon} := \begin{cases} 1 & \text{em } \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}, \\ \gamma & \text{em } \omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

As funções θ_ε e w_ε do funcional (9) são soluções do seguinte problema variacional: Encontre $(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot \eta_\theta) = \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot \eta_\theta \\ \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot \nabla \eta_w = \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q} \eta_w \end{cases}, \forall (\eta_\theta, \eta_w) \in \mathcal{V}_\varepsilon, \quad (11)$$

onde o conjunto $\mathcal{U}_\varepsilon$ e o espaço $\mathcal{V}_\varepsilon$ são definidos como:

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{ \varphi = (\varphi_\theta, \varphi_w) \in \mathcal{U} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial\omega_\varepsilon \}, \quad (12)$$

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \{ \varphi = (\varphi_\theta, \varphi_w) \in \mathcal{V} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial\omega_\varepsilon \}, \quad (13)$$

em que $\llbracket \varphi \rrbracket := \varphi|_{\Omega \setminus \omega_\varepsilon} - \varphi|_{\omega_\varepsilon}$ representa o salto da função φ sobre a fronteira $\partial\omega_\varepsilon$. O domínio Ω é perturbado pela nucleação de uma inclusão $\omega_\varepsilon(\hat{x})$ de mesma natureza do material de base, mas com um contraste γ . A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional (11) é: Encontre $(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon)$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta_\varepsilon)) + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon)) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{M}(\theta_\varepsilon) = \mathbb{C} \nabla^s \theta_\varepsilon, \\ \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) = \mathbf{K}(\theta_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon), \\ w_\varepsilon = \bar{w} & \text{sobre } \Gamma_{D_w}, \\ \theta_\varepsilon = \bar{\theta} & \text{sobre } \Gamma_{D_\theta}, \\ \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta_\varepsilon) n = \bar{m} & \text{sobre } \Gamma_{N_w}, \\ \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot n = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_{N_\theta}, \\ \left. \begin{array}{l} \llbracket \theta_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket w_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta_\varepsilon) \rrbracket n = 0 \\ \llbracket \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0 \end{array} \right\} & \text{sobre } \partial\omega_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (14)$$

onde n é o vetor normal unitário exterior, como apresentado na Figura 1.

Existência da Derivada Topológica

Os funcionais de forma original e perturbado foram introduzidos por meio das equações (4) e (9), respectivamente. Agora será mostrado a existência da derivada topológica para o problema em análise. Considere o seguinte resultado

Lema 1. *Seja $(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon)$ e (θ, w) soluções do problema perturbado (11) e original (5), respectivamente. Então tem-se que:*

$$\|\theta_\varepsilon - \theta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad (15)$$

$$\|w_\varepsilon - w\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad (16)$$

onde C é constante independente do parâmetro ε .

Demonstração. Tomando a diferença entre (5) e (11), tem-se para todo $(\eta_\theta, \eta_w) \in \mathcal{V}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta_\varepsilon) - \mathcal{M}(\theta)) \cdot \nabla^s \eta_\theta + (\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) - \mathcal{Q}(\theta, w)) \cdot \eta_\theta = 0 \\ \int_{\Omega} (\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) - \mathcal{Q}(\theta, w)) \cdot \nabla \eta_w = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Utilizando a definição do contraste $\gamma_{\omega_\varepsilon}$ dada por (10) e introduzindo a notação $e_\theta = \theta_\varepsilon - \theta$ e $e_w = w_\varepsilon - w$, tem-se

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(e_\theta) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot \eta_\theta = (1 - \gamma) \int_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \eta_\theta, \\ \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot \nabla \eta_w = (1 - \gamma) \int_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \nabla \eta_w, \end{cases} \quad (18)$$

onde os termos

$$\pm \int_{\omega_\varepsilon} \gamma \mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \gamma \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \eta_\theta \quad \text{e} \quad \pm \int_{\omega_\varepsilon} \gamma \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \nabla \eta_w,$$

foram somados às equações (17)₁ e (17)₂, respectivamente. Agora, tomando $\eta_\theta = e_\theta$ e $\eta_w = e_w$ como função teste nas equações (18) tem-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot e_\theta = (1 - \gamma) \int_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot e_\theta, \\ \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot \nabla e_w = (1 - \gamma) \int_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot \nabla e_w. \end{cases} \quad (19)$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot (e_\theta - \nabla e_w)) = \\ (1 - \gamma) \int_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (e_\theta - \nabla e_w). \end{aligned} \quad (20)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz juntamente com a desigualdade triangular e utilizando a regularidade elíptica de θ e w ,

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot (e_\theta - \nabla e_w)) \leq C_1 \varepsilon \left(\|e_\theta\|_{\mathbf{H}^1(\omega_\varepsilon)} + \|e_w\|_{H^1(\omega_\varepsilon)} \right). \quad (21)$$

Utilizando a coercividade da forma bilinear do lado esquerdo da equação anterior tem-se que

$$\alpha \left(\|e_\theta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|e_w\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \leq \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(e_\theta) \cdot \nabla^s e_\theta + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(e_\theta, e_w) \cdot (e_\theta - \nabla e_w), \quad (22)$$

Então,

$$C_1 \varepsilon \left(\|e_\theta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|e_w\|_{H^1(\Omega)} \right) \geq \alpha \left(\|e_\theta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|e_w\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \quad (23)$$

$$\geq \frac{\alpha}{2} \left(\|e_\theta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|e_w\|_{H^1(\Omega)} \right)^2. \quad (24)$$

Finalmente, tem-se:

$$\|e_\theta\|_{H^1(\Omega)} + \|e_w\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad (25)$$

onde a constante C , independe do parâmetro ε e é dada por $C = \frac{2C_1}{\alpha} \in \mathbb{R}^+$. $\square$

3.2 Cálculo da Variação da Energia Potencial Total

Tomando $\eta_w = w_\varepsilon - w$ e $\eta_\theta = \theta_\varepsilon - \theta$ como função teste em (5) e somando os resultados, com isso tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w)) = \\ & \int_{\Omega} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon)) - \\ & \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot (\theta_\varepsilon - \theta) + \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q}(w_\varepsilon - w). \end{aligned} \quad (26)$$

Substituindo (26) no funcional de forma (4) obtém-se,

$$\begin{aligned} \psi(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon)) - \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot (\theta_\varepsilon + \theta) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q}(w_\varepsilon + w). \end{aligned} \quad (27)$$

Da mesma forma, $\eta_w = w_\varepsilon - w$ e $\eta_\theta = \theta_\varepsilon - \theta$ como função teste em (11) e somando os resultados, com isso encontra-se a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \gamma_{w_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon)) = \\ & \int_{\Omega} \gamma_{w_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \theta + \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot (\theta - \nabla w)) + \\ & \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot (\theta_\varepsilon - \theta) - \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q}(w_\varepsilon - w). \end{aligned} \quad (28)$$

Substituindo (28) no funcional de forma (9), tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma_{w_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla^s \theta + \mathcal{Q}(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot (\theta - \nabla w)) - \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{N_\theta}} \bar{m} \cdot (\theta_\varepsilon + \theta) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{N_w}} \bar{q}(w_\varepsilon + w). \end{aligned} \quad (29)$$

Calculando a diferença entre (29) e (27) se obtém o resultado a seguir.

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) = -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta_\varepsilon + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon)), \quad (30)$$

onde usou-se a definição (10) para constante γ_{w_ε} . Note que a integral acima está concentrada numa integral sobre a inclusão ω_ε .

3.3 Análise Assintótica da Solução

Para calcular a derivada topológica (3) é necessário conhecer o comportamento assintótico das funções θ_ε e w_ε em relação ao parâmetro ε . A fim de resolver a diferença entre os funcionais $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$ e $\psi(\chi)$ apresentada em (30) serão considerados os seguintes *ansätze* para θ_ε e w_ε ,

$$\theta_\varepsilon(x) = \theta(x) + \varepsilon\phi(x/\varepsilon) + \tilde{\theta}_\varepsilon(x) , \quad (31)$$

$$w_\varepsilon(x) = w(x) + \varepsilon z(x/\varepsilon) + \tilde{w}_\varepsilon(x) . \quad (32)$$

As funções θ e w são soluções do problema não perturbado (8), enquanto que as funções ϕ e z são soluções dos problemas exteriores e $\tilde{\theta}_\varepsilon$ e $\tilde{w}_\varepsilon$ são os resíduos. Para construir os problemas exteriores substitui-se os *ansätze* em (14), e com isso pode-se escrever as seguintes igualdades,

$$\begin{cases} -\varepsilon \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbb{C} \nabla^s \phi) - \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon)) + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) + \varepsilon \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\phi, z) = 0 , \\ -\varepsilon \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \nabla z) + \varepsilon \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi) + \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)) = 0 , \end{cases} \quad (33)$$

Considerando a mudança de variável $x = \varepsilon y$, tem-se que $\nabla_y z(y) = \varepsilon \nabla z(x/\varepsilon)$ e $\nabla_y^s \phi(y) = \varepsilon \nabla^s \phi(x/\varepsilon)$. Então pode-se escrever,

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y(\gamma_\omega \mathbb{C} \nabla_y^s \phi) - \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon)) + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) + \varepsilon \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\phi, z) = 0 , \\ -\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y(\gamma_\omega \mathbf{K} \nabla_y z) + \varepsilon \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi) + \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)) = 0 . \end{cases} \quad (34)$$

Para construção do problema exterior, que é independente de ε , utiliza-se os termos de menor ordem de ε . Portanto, na variável y as parcelas que compõem os problemas exteriores são,

$$\operatorname{div}_y(\gamma_\omega \mathbb{C} \nabla_y^s \phi(y)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \text{ e } \operatorname{div}_y(\gamma_\omega \mathbf{K} \nabla_y z(y)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 , \quad (35)$$

onde

$$\gamma_\omega = \begin{cases} 1 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega} , \\ \gamma & \text{em } \omega . \end{cases} \quad (36)$$

Considerando a condição de transmissão sobre $\partial\omega_\varepsilon$, apresentada em (14), segue que:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma) \mathcal{M}(\theta)(\hat{x})n + \llbracket \gamma_\omega \mathbb{C} \nabla_y^s \phi \rrbracket n + \\ (1 - \gamma) [\mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}(\theta)(\hat{x})]n + \llbracket \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon) \rrbracket n = 0 , \end{aligned} \quad (37)$$

e

$$\begin{aligned} (1 - \gamma) \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) \cdot n - \llbracket \gamma_\omega \mathbf{K} \nabla_y z \rrbracket \cdot n + \varepsilon (1 - \gamma) \mathbf{K} \phi \cdot n + \\ (1 - \gamma) [\mathcal{Q}(\theta, w) - \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x})] \cdot n + \llbracket \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = 0 , \end{aligned} \quad (38)$$

Em seguida, agrupa-se os termos de mesma ordem de ε e assim, constrói-se os problemas na variável y ,

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y(\gamma_\omega \mathbb{C} \nabla_y^s \phi) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 , \\ \phi \rightarrow 0 & \|y\| \rightarrow \infty , \\ \llbracket \phi \rrbracket = 0 \\ \llbracket \gamma_\omega \mathbb{C} \nabla_y^s \phi \rrbracket n = g_\theta \end{cases} \text{ sobre } \partial\omega . \quad (39)$$

onde $g_\theta = -(1 - \gamma)\mathcal{M}(\theta)(\hat{x})n$. De forma análoga, a função z é solução de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y(\gamma_\omega \mathbf{K} \nabla_y z) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ z \rightarrow 0 \quad \|y\| \rightarrow \infty, \\ \llbracket z \rrbracket = 0 \\ \llbracket \gamma_\omega \mathbf{K} \nabla_y z \rrbracket \cdot n = g_w \end{array} \right\} \text{sobre } \partial\omega, \quad (40)$$

com $g_w = (1 - \gamma)\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) \cdot n$.

Os resíduos $(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)$ são soluções do problema de valor de contorno que compensa as discrepâncias introduzidas por ϕ e z , ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon)) - \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) = f_1 & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)) = f_2 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon) = \mathbb{C} \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon, \\ \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) = \mathbf{K}(\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{w}_\varepsilon), \\ \tilde{\theta}_\varepsilon = \varepsilon^2 \theta_0 & \text{sobre } \Gamma_{D_\theta}, \\ \tilde{w}_\varepsilon = \varepsilon^2 w_0 & \text{sobre } \Gamma_{D_w}, \\ \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon)n = \varepsilon^2 \mathcal{M}(\theta_0)n & \text{sobre } \Gamma_{N_\theta}, \\ \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) \cdot n = \varepsilon^2 \mathcal{Q}(\theta_0, w_0) \cdot n & \text{sobre } \Gamma_{N_w}, \\ \llbracket \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon) \rrbracket n = g_1 \\ \llbracket \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) \rrbracket \cdot n = g_2 \\ \llbracket \tilde{\theta}_\varepsilon \rrbracket = 0 \\ \llbracket \tilde{w}_\varepsilon \rrbracket = 0 \end{array} \right\} \text{sobre } \partial\omega_\varepsilon, \quad (41)$$

onde $w_0 := -\varepsilon^{-1}z|_{\partial\Omega}$, $\theta_0 := -\varepsilon^{-1}\phi|_{\partial\Omega}$, $g_1 = -(1-\gamma)[\mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}(\theta)(\hat{x})]n$ e $g_2 = \tilde{g}_h + \varepsilon \tilde{g}_p$, com $\tilde{g}_h = -(1-\gamma)[\mathcal{Q}(\theta, w) - \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x})] \cdot n$ e $\tilde{g}_p = -(1-\gamma)\mathbf{K}\phi(n) \cdot n$, e ainda $f_1 = \varepsilon \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\phi, z)$ e $f_2 = \varepsilon \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K}\phi)$.

Lema 2. *Seja $(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)$ solução para (41). Então, os resíduos são $\|\tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$ e $\|\tilde{w}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$.*

Demonstração. A prova está na Seção 3.6. □

Para conhecer o comportamento assintótico das funções θ_ε e w_ε , foram apresentadas as expansões (31) e (32). Para ser possível conhecer tal comportamento é necessário calcular ϕ e z dos problemas (39) e (40). Porém, essas soluções podem ser obtidas analiticamente apenas para alguns casos particulares como, por exemplo, no caso em que a forma da perturbação é circular e as propriedades do material são isotrópicas. Na seção seguinte será apresentada a derivada topológica para o caso anisotrópico, homogêneo e com uma perturbação de forma arbitrária.

3.4 Cálculo da Derivada Topológica

Substituindo (31) e (32) em (30) obtém-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) = & -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} ((\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w))(\hat{x}) \\ & + \varepsilon \mathcal{M}(\theta)(\hat{x}) \cdot \nabla^s \phi - \varepsilon \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) \cdot \nabla z) + \mathcal{E}(\varepsilon) , \end{aligned} \quad (42)$$

onde $\mathcal{E}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, como pode ser visto na Seção 3.6, com:

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{w}_\varepsilon)) , \quad (43)$$

$$\mathcal{E}_2(\varepsilon) = -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta - (\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta)(\hat{x})) , \quad (44)$$

$$\mathcal{E}_3(\varepsilon) = -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w) - (\mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w))(\hat{x})) , \quad (45)$$

$$\mathcal{E}_4(\varepsilon) = -\varepsilon \frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla^s \phi \cdot (\mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}(\theta)(\hat{x}))) , \quad (46)$$

$$\mathcal{E}_5(\varepsilon) = -\varepsilon \frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (\phi - \nabla z) \cdot (\mathcal{Q}(\theta, w) - \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x})) , \quad (47)$$

$$\mathcal{E}_6(\varepsilon) = -\varepsilon \frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} \phi \cdot \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) . \quad (48)$$

Os problemas (39) e (40) são apresentados, respectivamente, nas formas variacionais a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } w \in \mathcal{W}_1^*, \text{ tal que:} \\ \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_\omega \mathbb{C} \nabla_y^s \phi \cdot \nabla_y^s \eta = (1-\gamma) \mathcal{M}(\theta)(\hat{x}) \cdot \int_\omega \nabla_y^s \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{W}_1^*, \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } w \in \mathcal{W}_2^*, \text{ tal que:} \\ \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_\omega \mathbf{K} \nabla_y z \cdot \nabla_y \eta = -(1-\gamma) \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) \cdot \int_\omega \nabla_y \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{W}_2^*, \end{array} \right. \quad (50)$$

onde a mudança de variável $x = \varepsilon y$ foi utilizada. E ainda, os espaços $\mathcal{W}_1^*$ e $\mathcal{W}_2^*$ são dados por:

$$\mathcal{W}_1^* := \{\varphi \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial\omega\} . \quad (51)$$

$$\mathcal{W}_2^* := \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R} : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \text{ sobre } \partial\omega\} . \quad (52)$$

onde $\|(\cdot)\|_{W_1^*(\mathbb{R}^2)} = |(\cdot)|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2)}$ e $\|(\cdot)\|_{W_2^*(\mathbb{R}^2)} = |(\cdot)|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$.

Então, o momento fletor $\mathcal{M}(\theta)$ e o esforço cisalhante $\mathcal{Q}(\theta, w)$ serão escritos em função de suas componentes cartesianas, ou seja:

$$\mathcal{M}(\theta)(\hat{x}) = (\mathcal{M}(\theta)(\hat{x}))_{ij} (e_i \otimes e_j) , \quad (53)$$

$$\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) = (\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}))_i e_i , \quad (54)$$

onde $(\mathcal{M}(\theta)(\hat{x}))_{ij}$ representa as entradas do tensor $\mathcal{M}$ na base definida pelos vetores e_i e e_j . Da mesma forma, $(\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}))_i$ são as componentes do tensor $\mathcal{Q}$ na base definida pelos vetores e_i . Estas componentes são dadas por:

$$(\mathcal{M}(\theta)(\hat{x}))_{ij} = (\mathcal{M}(\theta)(\hat{x})) \cdot (e_i \otimes e_j), \quad (55)$$

$$(\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}))_i = (\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x})) \cdot e_i. \quad (56)$$

Nos problemas (49) e (50), pode-se escrever ϕ e z como combinações lineares das componentes do momento e do esforço, respectivamente, da seguinte forma:

$$\phi(y) = (\mathcal{M}(\theta)(\hat{x}))_{ij} v_1^{(ij)}(y), \quad (57)$$

$$z(y) = (\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}))_i v_2^{(i)}(y). \quad (58)$$

Substituindo as equações (53) e (57) no problema variacional (49), encontra-se o seguinte conjunto canônico de problemas exteriores na forma variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v_1^{(ij)} \in \mathcal{W}_1^*, \text{ tal que:} \\ \int_{\mathbb{R}^2} \gamma \omega \mathbb{C} \nabla_y^s v_1^{(ij)} \cdot \nabla_y^s \eta = (1 - \gamma)(e_i \otimes e_j) \cdot \int_{\omega} \nabla_y^s \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{W}_1^*. \end{array} \right. \quad (59)$$

Analogamente substitui-se as equações (54) e (58) no problema variacional (50) para encontrar o conjunto de problemas exteriores, na forma variacional, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } v_2^{(i)} \in \mathcal{W}_2^*, \text{ tal que:} \\ \int_{\mathbb{R}^2} \gamma \omega \mathbf{K} \nabla_y v_2^{(i)} \cdot \nabla_y \eta = -(1 - \gamma)e_i \cdot \int_{\omega} \nabla_y \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{W}_2^*. \end{array} \right. \quad (60)$$

Considerando a mudança de variável $x = \varepsilon y$, tem-se que $\nabla_y z(y) = \varepsilon \nabla z(x/\varepsilon)$, $\nabla_y^s \phi(y) = \varepsilon \nabla^s \phi(x/\varepsilon)$ e tem-se a estimativa $\mathcal{E}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$. A diferença (42) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) = & -\varepsilon^2 \frac{1 - \gamma}{2} \int_{\omega} \left((\mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w))(\hat{x}) + \right. \\ & \left. \nabla^s \theta(\hat{x}) \cdot \mathbb{C} \nabla_y^s \phi(y) - (\theta - \nabla w)(\hat{x}) \cdot \mathbf{K} \nabla_y z(y) \right) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (61)$$

Utilizando (57) e (58) escreve-se:

$$\mathbb{C} \nabla_y^s \phi(y) = (\mathbb{C} \nabla_y^s v_1^{(ij)}(y))_{kl} (e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l) (\mathcal{M}(\theta)(\hat{x})), \quad (62)$$

$$\mathbf{K} \nabla_y z(y) = (\mathbf{K} \nabla_y v_2^{(i)}(y))_j (e_i \otimes e_j) (\mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x})). \quad (63)$$

Agora, substituindo (62) e (63) em (61) obtém-se:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) = \varepsilon^2 |\omega| \mathbb{P} \mathbb{C} \nabla^s \theta \cdot \nabla^s \theta + \varepsilon^2 |\omega| \mathbf{P} \mathbf{K} (\theta - \nabla w) \cdot (\theta - \nabla w) + o(\varepsilon^2), \quad (64)$$

Finalmente, tem-se todos os elementos necessários para apresentar o principal resultado desse trabalho, isto é:

Teorema 3. *Seja $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon)$ o funcional de forma associado ao problema perturbado dado por (9). Então, admite-se a expansão assintótica topológica da seguinte forma:*

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, w_\varepsilon) = \mathcal{J}(\theta, w) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\hat{x}) + o(\varepsilon^2), \quad (65)$$

onde a função $f(\varepsilon) = |\omega|\varepsilon^2$ e a derivada topológica dada por:

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \mathbb{P}\mathcal{M}(\theta(\hat{x})) \cdot \nabla^s \theta(\hat{x}) + \mathbf{P}\mathcal{Q}(\theta(\hat{x}), w(\hat{x})) \cdot (\theta(\hat{x}) - \nabla w(\hat{x})). \quad (66)$$

A matriz de polarização $\mathbb{P}$, associada com os efeitos flexão, é dada pelo seguinte tensor de quarta ordem

$$\mathbb{P} = -\frac{1-\gamma}{2|\omega|} \int_{\omega} [\mathbb{I} + (\mathbb{C}\nabla_y^s v_1^{(ij)})_{kl}(e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l)] . \quad (67)$$

Por outro lado, a matriz de polarização $\mathbf{P}$, associada aos efeitos de cisalhamento, é dada pelo tensor de segunda ordem, definido como

$$\mathbf{P} = -\frac{1-\gamma}{2|\omega|} \int_{\omega} [\mathbf{I} - (\mathbf{K}\nabla_y v_2^{(i)})_j(e_i \otimes e_j)] . \quad (68)$$

Os tensores identidade $\mathbf{I}$ e $\mathbb{I}$ são de segunda e quarta ordem, respectivamente.

Para calcular a derivada topológica descrita acima é necessário conhecer os tensores de polarização $\mathbb{P}$ e $\mathbf{P}$, mas por sua vez, estes dependem da forma da perturbação e das propriedades do material. Foi apresentada a derivada para o caso geral, ou seja, material homogêneo, anisotrópico e para uma perturbação de forma arbitrária. Neste caso não é possível encontrar analiticamente a derivada topológica. Portanto para obtê-la, é necessário calcular as soluções $v_1^{(ij)}$ e $v_2^{(i)}$ dos problemas (59) e (60) numericamente. Por outro lado, para casos particulares em que a perturbação é circular e as propriedades são isotrópicas pode-se obter analiticamente a derivada topológica (66), tal situação será apresentada na seção a seguir.

3.5 Caso Particular: Material isotrópico com perturbação circular

As soluções dos problemas exteriores (39) e (40) são conhecidas na literatura (Novotny and Sokołowski, 2013). Estas têm exatamente a mesma estrutura dos problemas de valor de contorno de Navier e Laplace, respectivamente. E ainda, para o caso particular de inclusão circular com a propriedade isotrópica e homogênea, as soluções analíticas são conhecidas. Então a propriedade do material pode ser escrita como:

$$\mathbb{C} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}((1-\nu)\mathbb{I} + \nu(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})), \quad (69)$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa Eh}{2(1+\nu)}\mathbf{I}. \quad (70)$$

Veja, para maiores informações, o livro Novotny and Sokołowski (2013). Utilizando o teorema de Eshelby (1957, 1959), tem-se a seguinte representação para a solução de (39)

$$\mathbb{C}\nabla_y^s \phi(y) \Big|_{B_1} = \mathbb{T}\mathcal{M}(\theta)(\hat{x}), \quad (71)$$

onde $\mathbb{T}$ é o tensor isotrópico de quarta ordem dado por:

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma \alpha_2} \left(2\alpha_2 \mathbb{I} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 + \gamma \alpha_1} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (72)$$

e para a solução (40)

$$\mathbf{K} \nabla_y z(y) \Big|_{B_1} = \mathbf{T} \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}), \quad (73)$$

onde $\mathbf{T}$ é um tensor isotrópico de segunda ordem e pode ser escrito como:

$$\mathbf{T} = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \mathbf{I}. \quad (74)$$

Agora, considerando o resultado em (61), é possível calcular a integral sobre B_1 explicitamente, o que fornece o seguinte:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi) = \pi \varepsilon^2 (\mathbb{P} \mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta + \mathbf{P} \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w)) + o(\varepsilon^2). \quad (75)$$

Portanto, pela definição (3), diretamente identifica-se a derivada topológica $\mathcal{T}(\hat{x})$ para o funcional de forma ψ , ou seja,

$$\mathcal{T}(\hat{x}) = \mathbb{P} \mathcal{M}(\theta(\hat{x})) \cdot \nabla^s \theta(\hat{x}) + \mathbf{P} \mathcal{Q}(\theta(\hat{x}), w(\hat{x})) \cdot (\theta(\hat{x}) - \nabla w(\hat{x})), \quad (76)$$

desde que $f(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$. E $\mathbb{P}$ é a matriz de polarização associada com os efeitos de flexão, e é dada pelo seguinte tensor isotrópico de quarta ordem,

$$\mathbb{P} = -\frac{1 - \gamma}{2} (\mathbb{I} + \mathbb{T}) = -\frac{1}{2} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma \alpha_2} \left((1 + \alpha_2) \mathbb{I} + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(1 + \gamma \alpha_1)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (77)$$

onde os coeficientes α_1 e α_2 são escritos como:

$$\alpha_1 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}. \quad (78)$$

Enquanto a matriz de polarização $\mathbf{P}$, associada com os efeitos de cisalhamento, é dada pelo tensor isotrópico definido como

$$\mathbf{P} = -\frac{1 - \gamma}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \mathbf{I}. \quad (79)$$

3.6 Estimativas dos Termos Remanescentes

Será considerada nesta seção as estimativas dos termos remanescentes da análise assintótica topológica para o problema de placas quando o funcional de forma é dado pela energia potencial total, ou seja, será estimado $\mathcal{E}$ dado pela expansão assintótica (42).

Prova do Lema 2

Por uma questão de rigor, é apresentada a solução explícita para o problema exterior escalar (40), que pode ser encontrada em muitas referências (ver, por exemplo Novotny and Sokołowski (2013, Ch. 5, pp. 144)), ou seja,

$$z(x/\varepsilon)|_{\Omega \setminus \omega_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|x - \hat{x}\|^2} \beta \cdot (x - \hat{x}), \quad (80)$$

$$z(x/\varepsilon)|_{\omega_\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \beta \cdot (x - \hat{x}), \quad (81)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}^2$ é um vetor constante. A partir das equações acima, observa-se que $z|_{\partial\Omega} = -\varepsilon w_0$, com a função w_0 independente do parâmetro ε . Além disso, a partir de um cálculo simples, tem-se $\|z\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon})$ e $\|z\|_{L^2(\Omega)} = O(\varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|}) = o(\varepsilon^\delta)$, com $\delta < 1$. O caso vetorial é completamente análogo ao escalar (Amstutz (2006)). Então, usando os mesmos argumentos, a solução explícita para o problema exterior vetorial (39), fornece $\phi|_{\partial\Omega} = -\varepsilon\theta_0$, com a função θ_0 independente do parâmetro ε (Obert and Duvall (1967, Ch. 4, pp. 105)). Finalmente, $\|\phi\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon})$ e $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = o(\varepsilon^\delta)$.

Antes de prosseguir, será apresentado o seguinte resultado, que pode ser encontrada na literatura (ver, por exemplo, Adams (1975); Mikhailov (2011)).

Teorema 4. *Considerando um domínio aberto e limitado $D \subset \mathbb{R}^2$, com fronteira Lipschitz ∂D . Então,*

$$\|\varphi\|_{L^2(\partial D)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(D)}, \quad (82)$$

para cada $\varphi \in H^1(D)$, onde a constante C é independente de φ . O mesmo resultado vale para funções vetoriais em $H^1(D) \times H^1(D)$.

Agora, tem-se todos os elementos para provar o Lema 2. Para começar será decomposto a solução (41) como $(\tilde{\theta}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon) = (\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) + (\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p)$. Portanto:

Lema 5. *Seja $(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h)$ solução do seguinte problema variacional: Encontre $(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \in \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$, para todo $(\eta_\theta, \eta_w) \in \mathcal{V}_\varepsilon$, tal que:*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \eta_\theta) = \int_{\partial\omega_\varepsilon} g_1 \cdot \eta_\theta + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{N_\theta}} \mathcal{M}(\theta_0) n \cdot \eta_\theta, \\ \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \nabla \eta_w = \int_{\partial\omega_\varepsilon} \tilde{g}_h \eta_w + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{N_w}} (\mathcal{Q}(\theta_0, w_0) \cdot n) \eta_w, \end{cases} \quad (83)$$

com o conjunto $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$ definido como $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon := \mathcal{V}_\varepsilon + \{(\varphi_\theta, \varphi_w)\}$, onde $(\varphi_\theta, \varphi_w) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ é lifting do valor na fronteira de Dirichlet $\varepsilon^2(\theta_0, w_0)$, dotado com as propriedades adicionais $\varphi_\theta = 0$ em $\partial\omega_\varepsilon \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma_{D_\theta})$ and $\varphi_w = 0$ on $\partial\omega_\varepsilon \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma_{D_w})$. E ainda, $g_1 = -(1-\gamma)[\mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}(\theta)(\hat{x})]n$ e $\tilde{g}_h = -(1-\gamma)[\mathcal{Q}(\theta, w) - \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x})] \cdot n$. Então, as estimativas $\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$ e $\|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$ são verdadeiras.

Demonstração. Ao tomar $\eta_\theta = \tilde{\theta}_\varepsilon^h - \varphi_\theta$ e $\eta_w = \tilde{w}_\varepsilon^h - \varphi_w$ em (83), tem-se as seguintes igualdades

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^h + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^h) = \int_{\partial\omega_\varepsilon} g_1 \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^h + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{N_\theta}} \mathcal{M}(\theta_0) n \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^h + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{D_\theta}} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) n \cdot \theta_0, \quad (84)$$

e

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \nabla \tilde{w}_\varepsilon^h = \int_{\partial\omega_\varepsilon} \tilde{g}_h \tilde{w}_\varepsilon^h + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{N_w}} (\mathcal{Q}(\theta_0, w_0) \cdot n) \tilde{w}_\varepsilon^h + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{D_w}} (\mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot n) w_0. \quad (85)$$

Os dois últimos termos nas igualdades acima podem ser substituídas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{D_\theta}} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) n \cdot \theta_0 &= \int_{\partial\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) n \cdot \varphi_\theta \\ &= \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \varphi_\theta + \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \varphi_\theta, \end{aligned} \quad (86)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{D_w}} (\mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot n) w_0 &= \int_{\partial\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot n) \varphi_w \\ &= \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \nabla \varphi_w, \end{aligned} \quad (87)$$

como $\varphi_\theta = 0$ sobre $\partial\omega_\varepsilon \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma_{D_\theta})$, $\varphi_w = 0$ sobre $\partial\omega_\varepsilon \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma_{D_w})$, $\gamma_{\omega_\varepsilon} = 1$ sobre $\partial\Omega$, $\text{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h)) = \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h)$ e $\text{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h)) = 0$ em $\omega_\varepsilon \cup (\Omega \setminus \omega_\varepsilon)$. Subtraindo (85) de (84) e levando em consideração estes dois últimos resultados, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^h + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon^h - \nabla \tilde{w}_\varepsilon^h)) &= \int_{\partial\omega_\varepsilon} g_1 \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^h - \int_{\partial\omega_\varepsilon} \tilde{g}_h \tilde{w}_\varepsilon^h + \\ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \varphi_\theta + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \varphi_\theta - \varepsilon^2 \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot \nabla \varphi_w + \\ \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{N_\theta}} \mathcal{M}(\theta_0) n \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^h - \varepsilon^2 \int_{\Gamma_{N_w}} (\mathcal{Q}(\theta_0, w_0) \cdot n) \tilde{w}_\varepsilon^h. \end{aligned} \quad (88)$$

A partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz, pelo teorema do traço e considerando a desigualdade triangular, obtemos

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^h + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon^h - \nabla \tilde{w}_\varepsilon^h)) \leq C_1 \varepsilon^2 \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (89)$$

onde utilizou-se a regularidade elíptica interior das funções θ e w . Finalmente, a partir da coercividade da forma bilinear do lado esquerdo de (89), ou seja,

$$\alpha \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \leq \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^h + \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^h, \tilde{w}_\varepsilon^h) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon^h - \nabla \tilde{w}_\varepsilon^h), \quad (90)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} C_1 \varepsilon^2 \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \right) &\geq \alpha \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \right)^2. \end{aligned} \quad (91)$$

Então, obtém-se

$$\|\tilde{\theta}_\varepsilon^h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^2, \quad (92)$$

que conduz ao resultado, com $C = \frac{2C_1}{\alpha}$ independente de ε . $\square$

Lema 6. *Seja $(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p)$ solução do seguinte problema variacional: Encontre $(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \in \mathcal{V}_\varepsilon$, tal que, para todo $(\eta_\theta, \eta_w) \in \mathcal{V}_\varepsilon$:*

$$\begin{cases} \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p) \cdot \nabla^s \eta_\theta + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot \eta_\theta) &= \varepsilon \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \nabla z \cdot \eta_\theta - \varepsilon \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi \cdot \eta_\theta, \\ \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot \nabla \eta_w &= \varepsilon \int_\Omega \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi) \eta_w + \varepsilon \int_{\partial \omega_\varepsilon} \tilde{g}_p \eta_w, \end{cases} \quad (93)$$

onde $\tilde{g}_p = -(1 - \gamma) \mathbf{K} \phi(n) \cdot n$. Então, as estimativas $\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$ e $\|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$ são verdadeiras.

Demonstração. Ao definir $\eta_\theta = \tilde{\theta}_\varepsilon^p$ e $\eta_w = \tilde{w}_\varepsilon^p$ em (93), tem-se as seguintes igualdades

$$\int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^p + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p) = \varepsilon \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \nabla z \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p - \varepsilon \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p, \quad (94)$$

$$\int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot \nabla \tilde{w}_\varepsilon^p = \varepsilon \int_\Omega \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi) \tilde{w}_\varepsilon^p + \varepsilon \int_{\partial \omega_\varepsilon} \tilde{g}_p \tilde{w}_\varepsilon^p. \quad (95)$$

Depois de subtrair a segunda igualdade da primeira, tem-se

$$\begin{aligned} \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^p + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon^p - \nabla \tilde{w}_\varepsilon^p)) &= -\varepsilon \int_{\partial \omega_\varepsilon} \tilde{g}_p \tilde{w}_\varepsilon^p \\ &\quad + \varepsilon \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \nabla z \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p - \varepsilon \int_\Omega \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi) \tilde{w}_\varepsilon^p - \varepsilon \int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p. \end{aligned} \quad (96)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema 4, o primeiro termo do lado direito de (96) pode ser escrito como:

$$\int_{\partial \omega_\varepsilon} \tilde{g}_p \tilde{w}_\varepsilon^p \leq C_0 \|\phi\|_{\mathbf{L}^2(\partial \omega_\varepsilon)} \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2} \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)}, \quad (97)$$

onde $\|\phi\|_{\mathbf{L}^2(\partial \omega_\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon})$. Agora, considerando o segundo termo de (96). Integrando por partes

$$\int_\Omega \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \nabla z \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p = (1 - \gamma) \int_{\partial \omega_\varepsilon} \mathbf{K} \tilde{\theta}_\varepsilon^p \cdot n z - \int_\Omega \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \tilde{\theta}_\varepsilon^p) z, \quad (98)$$

onde $\tilde{\theta}_\varepsilon^p = 0$ sobre $\partial\Omega$. Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema 4, tem-se

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \nabla z \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p \leq C_2 \|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\omega_\varepsilon)} \|z\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} + C_3 \|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \varepsilon^{1/2} \|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad (99)$$

com $\|z\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon})$ e $\|z\|_{L^2(\Omega)} = o(\varepsilon^\delta)$, onde $\delta < 1$. Analogamente, para o terceiro termo do lado direito de (96), obtém-se

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi) \tilde{w}_\varepsilon^p \leq C_5 \varepsilon^{1/2} \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)}. \quad (100)$$

Da mesma forma, para a quarta parcela do lado direito de (96), tem-se

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} \mathbf{K} \phi \cdot \tilde{\theta}_\varepsilon^p \leq C_6 \varepsilon^\delta \|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (101)$$

Então, a partir dos resultados acima, juntamente com a desigualdade triangular obtém-se

$$\int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^p + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon^p - \nabla \tilde{w}_\varepsilon^p)) \leq C_7 \varepsilon^{3/2} \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)} \right). \quad (102)$$

Utilizando a coercividade da forma bilinear em (102), ou seja,

$$\alpha \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \leq \int_{\Omega} \gamma_{\omega_\varepsilon} (\mathcal{M}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon^p + \mathcal{Q}(\tilde{\theta}_\varepsilon^p, \tilde{w}_\varepsilon^p) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon^p - \nabla \tilde{w}_\varepsilon^p)), \quad (103)$$

e ainda,

$$\begin{aligned} C_7 \varepsilon^{3/2} \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)} \right) &\geq \alpha \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)} \right)^2. \end{aligned} \quad (104)$$

Finalmente obtém-se

$$\|\tilde{\theta}_\varepsilon^p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{3/2}, \quad (105)$$

que conduz ao resultado esperado, com $C = \frac{2C_7}{\alpha}$ independente de ε . $\square$

Finalmente, a prova do Lema 2 segue imediatamente a partir dos resultados do Lema 5 e Lema 6.

Estimativa do Resíduo $\mathcal{E}(\varepsilon)$

Considerando o resíduo $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ dado por (43) e a notação $M = \mathcal{M}(\theta)$ e $Q = \mathcal{Q}(\theta, w)$, então

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) = -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (M \pm M(\hat{x})) \cdot \nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon + (Q \pm Q(\hat{x})) \cdot (\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{w}_\varepsilon). \quad (106)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\varepsilon) &\leq C_0 \left(\|M - M(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \|M(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \right. \\ &\quad \left. \|Q - Q(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \|Q(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (107)$$

Com a regularidade elíptica interior das funções θ e w , tem-se $\|M - M(\hat{x})\| \leq c_0 \|x - \hat{x}\|$ e $\|Q - Q(\hat{x})\| \leq c_1 \|x - \hat{x}\|$, onde c_0 e c_1 são constantes independente de ε , então

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon) \leq C_1 \varepsilon \left(\|\nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \|\tilde{\theta}_\varepsilon - \nabla \tilde{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \right), \quad (108)$$

onde usou-se o fato que $\|Q(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon)$, $\|M(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon)$ e $\|x - \hat{x}\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^2)$. Utilizando a desigualdade triangular juntamente com Lema 2, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\varepsilon) &\leq C_1 \varepsilon \left(\|\nabla^s \tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_1 \varepsilon \left(\|\tilde{\theta}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right) = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (109)$$

Os resíduos $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ e $\mathcal{E}_3(\varepsilon)$ são dados, respectivamente, por (44) e (45). Será utilizada a notação $h_2 = \mathcal{M}(\theta) \cdot \nabla^s \theta$ e $h_3 = \mathcal{Q}(\theta, w) \cdot (\theta - \nabla w)$. Pela regularidade elíptica interior das funções θ e w , tem-se $\|h_i - h_i(\hat{x})\| \leq c_i \|x - \hat{x}\|$, com $i = 2, 3$, onde as constantes c_i são independentes de ε . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(\varepsilon) &= -\frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (h_i - h_i(\hat{x})) \\ &\leq C_i \int_{\omega_\varepsilon} \|x - \hat{x}\| = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (110)$$

Será introduzida a notação $G_4 = \nabla^s \phi$, $H_4 = \mathcal{M}(\theta)$, $G_5 = \phi - \nabla z$ e $H_5 = \mathcal{Q}(\theta, w)$. Novamente, para regularidade interior das funções θ e w , tem-se $\|H_i - H_i(\hat{x})\| \leq c_i \|x - \hat{x}\|$ para $i = 4, 5$, onde as constantes c_i são independentes de ε . Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(\varepsilon) &= -\varepsilon \frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega_\varepsilon} G_i \cdot (H_i - H_i(\hat{x})) \\ &\leq \varepsilon C_0 \|G_i\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|H_i - H_i(\hat{x})\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \\ &\leq \varepsilon C_i \|G_i\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|x - \hat{x}\|_{\mathbf{L}^2(\omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (111)$$

onde usou-se a regularidade elíptica interior das funções ϕ e z .

Finalmente, para mudança de variável $x = \varepsilon y$, o resíduo $\mathcal{E}_6(\varepsilon)$ dado por (48) pode ser escrito como,

$$\mathcal{E}_6(\varepsilon) = -\varepsilon^3 \frac{1-\gamma}{2} \int_{\omega} \phi(y) \cdot \mathcal{Q}(\theta, w)(\hat{x}) = o(\varepsilon^2). \quad (112)$$

REFERÊNCIAS

- Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics vol. 140. Academic Press, New York.
- Amstutz, S. (2006). Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, 49(1-2):87–108.
- Amstutz, S. and Novotny, A. A. (2011). Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 17(3):705–721.

- Cardone, G., Nazarov, S., and Sokołowski, J. (2010). Asymptotic analysis, polarization matrices, and topological derivatives for piezoelectric materials with small voids. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(6):3925–3961.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society: Section A*, 241:376–396.
- Eshelby, J. D. (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society: Section A*, 252:561–569.
- McLean, W. (2000). *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge.
- Mikhailov, S. E. (2011). Traces, extensions and co-normal derivatives for elliptic systems on lipschitz domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 378:324–342.
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18:31–38.
- Novotny, A. A. and Sokołowski, J. (2013). *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer.
- Obert, L. and Duvall, W. I. (1967). *Rock mechanics and the design of structures in rock*. John Wiley & Sons, New York.
- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 12:68–77.
- Rössle, A. and Sändig, A.-M. (2011). Corner singularities and regularity results for the Reissner/Mindlin plate model. *Journal of Elasticity*, 103(2):113–135.