



ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE VIBRAÇÕES LIVRES ACOPLADAS FLUIDO - ESTRUTURA EM CASCAS CILÍNDRICAS

Alejandro Augusto Ospina Lopez¹

alejandroaugustoospinalopez@gmail.com

Lineu Jose Pedroso¹

luneujp@gmail.com

Marcus Vinicius Girão de Moraes²

mumorais@gmail.com

1 – Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental
Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) – Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDPE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF.

2 – Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica
Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas (PPCM) – Grupo de Dinâmica de Sistemas (GDS) Campus Universitário Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF.

Resumo. *O estudo das características dos movimentos vibratórios destas estruturas cilíndricas, onde a influência das restrições na sua vinculação e o acoplamento com o meio fluido representam parâmetros importantes para a compreensão geral do seu comportamento. Tais fatores observam-se nas aplicações industriais, como reservatórios de líquidos, tanques de combustíveis de foguetes, reatores nucleares, entre outros. Quando se deve evitar efeitos destrutivos como a ressonância, assim como garantir o desempenho da estrutura de modo a satisfazer as exigências necessárias evitando acidentes com incidências ambientais, sociais e econômicas. Neste trabalho estuda-se o comportamento dinâmico de cascas cilíndricas em vibrações livres considerando o acoplamento fluido-estrutura. A solução analítica para a vibração livre da casca cilíndrica circular é obtida considerando as equações de movimento proposto pela teoria de Donnell. Sendo, funções modais de viga escolhidas para satisfazer as condições de contorno desejadas. No estudo do fluido-acústico (cavidade cilíndrica) efetuou a solução da equação da onda mediante o método de separação de variáveis, quanto a análise das vibrações acopladas fluido-estrutura, aplicou-se um método pseudo-acoplado, onde implementou-se um fator de massa virtual de fluido na equação de movimento da estrutura. Em todas as análises realizadas, utilizou-se o software ANSYS, baseado no método numérico dos elementos finitos. O estudo comparativo analítico e numérico mostrou uma boa aproximação.*

Palavras Chaves: *Cascas cilíndricas, Vibração livre, Fluido-estrutura, Método dos elementos finitos.*

1 INTRODUÇÃO

Cilindros de paredes finas são elementos estruturais que apresentam propriedades intrínsecas de leveza e resistência, sendo amplamente utilizados em certos equipamentos onde o reduzido peso da estrutura é essencial. A grande vantagem da casca cilíndrica, além da facilidade de fabricação, é sua capacidade de resistir a carregamentos axiais e a pressões internas através de esforços de membrana, o que permite a construção de estruturas bastante leves e esbeltas. Embora tais estruturas tenham uma forma geométrica simples, podem apresentar um complexo comportamento dinâmico devido a sua ampla variedade de combinações modais.

Uma ampla revisão da literatura sobre vibrações não-lineares, livres e forçadas, de cascas, com ou sem fluido, pode ser encontrada em Amabili e Paidoussis (2003).

Amabili, Pellicano e Paidoussis (1999 a, 1999 b, 2000 a e 2000 b) estudam as vibrações livres não-lineares e forçadas de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada em contato com um fluido incompressível, não viscoso, estacionário ou em movimento, usando a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas.

Lakis e Paidoussis (1971) trabalharam na implementação de um elemento finito tipo shell para a determinação das características de vibração livres de uma casca cilíndrica circular fina parcial ou totalmente preenchida com líquido estacionário. A carga inercial do fluido é tomada em consideração incorporando-a na matriz de massa dos elementos finitos que estão abaixo da superfície livre do líquido.

Chiba et al (1984) apresentam análises teóricas para a vibração livre linear de uma casca cilíndrica engastada livre, parcialmente preenchida com um líquido incompressível, foram utilizadas as equações dinâmicas de Donnell, o problema foi resolvido com um procedimento de Galerkin modificado; Gonçalves e Batista (1986) desenvolveram uma análise teórica para a vibração livre de cascas cilíndricas verticais simplesmente apoiadas preenchidas parcialmente ou submersas em fluido. A técnica de Rayleigh-Ritz foi usada para obter uma solução aproximada que coincide com a solução exata para os casos de uma casca vazia ou uma completamente em contato com o fluido. As vibrações da casca foram examinadas usando a teoria de casca de Sanders. O fluido considerado como não viscoso e incompressível. O acoplamento entre a casca deformável e seu meio acústico foram levados em consideração. As soluções foram apresentadas para mostrar o efeito de uma altura variável de fluido nas frequências naturais da casca.

Em Gonçalves (1985), uma expressão de massa virtual, onde o líquido pode ser considerado como uma massa adicional para a casca cilíndrica, posteriormente em Gonçalves (1987), investigou-se as vibrações não-lineares de cilindros de paredes finas contendo líquido.

Koga e Tsushima (1990), apresentam uma solução assintótica para a frequência natural do modo de respiração de uma casca cilíndrica cheia com um líquido. O efeito da força inercial do líquido é incorporado nas equações de movimento da casca como massa virtual. A solução é válida para algumas condições de contorno, entre outras, a simplesmente apoiada e a engastada livre.

Em Lindholm (1962), Bhuta e Koval(1964), Berry e Reissner(1958). Uma expressão aproximada de massa virtual de fluido é estudada.

Em Zhang et al (2001) e Zhang (2002) estudou-se os efeitos da presença de um fluido denso no interior de uma casca cilíndrica, utilizando o método de propagação de onda para estudar o efeito da presença do fluido na resposta da estrutura. As frequências naturais obtidas para um modelo estrutural no vácuo e outro modelo similar acoplado ao fluido interno apresentaram diferenças entre 40% e 50% para um mesmo modo. O autor ressalta a necessidade de avaliar influência do acoplamento nas deformadas modais e frequências naturais, para o correto projeto de um sistema de controle.

Kim et al (2003) desenvolveram um método teórico para investigar as características de vibração acoplada de cascas cilíndricas, enrijecidas por anéis e parcialmente preenchidas com um fluido invíscido, incompressível e irrotacional. Considerando o efeito de *sloshing* ou de superfície livre. Como o efeito de sloshing ou de superfície livre foi levado em conta na análise, os modos de *Bulging* e *sloshing* foram estudados. O método de Rayleigh-Ritz foi usado para derivar a equação de frequência de cascas enrijecidas por anéis e parcialmente preenchidas com fluido. A formulação teorica baseasse na teoria para casca fina de Love. A solução para o potencial de velocidade do movimento do fluido, foi assumida como uma soma de dois conjuntos de combinações lineares de funções harmônicas que satisfizeram a equação de Laplace e as condições de contorno relevantes. O efeito do nível do fluido, o número e a posição dos enrijecedores sobre as características de vibração acoplada, foi investigado.

No âmbito do Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura (GD FE) da UnB, há uma série de trabalhos e atividades de pesquisas ligado ao problema de vibrações livres e forçadas em cascas com e sem a presença de fluidos densos, como por exemplo : Pedroso et al. (1994a, 1994b), Mendes (2013), Ospina et al. (2013), Mendes et al. (2013, 2014), e Ospina (2014).

2 ANALISE TEORICA

As cascas cilíndricas podem ser definidas como um corpo limitado por duas superfícies curvas, cuja distância entre essas duas superfícies é pequena em relação às outras dimensões, sendo assim, espessura (h) $\ll$ raio (a), e espessura (h) $\ll$ comprimento (L). Considera-se uma casca cilíndrica de raio a , espessura h e comprimento L , de material elástico linear com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ_s .

Os componentes do sistema em coordenadas cilíndricas são z, θ, r ; Onde u, v, w representam direções axial, circunferencial e radial de um ponto na superfície média. A geometria e o campo de deslocamentos estão ilustrados na Figura 1 **Erro! Fonte de referência não encontrada..**

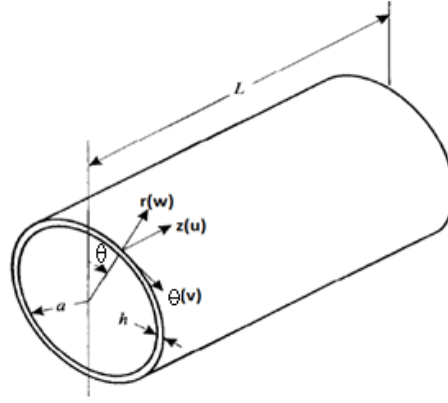


Figura 1. Geometria e campo de deslocamentos da casca cilíndrica circular.

As equações de movimento para uma casca cilíndrica podem ser escritas matricialmente considerando o campo de deformações proposto pela teoria de Donnell como:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(z, \theta, t) \\ v(z, \theta, t) \\ w(z, \theta, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Onde L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são operadores diferenciais com relação z, θ, r .

$$L_{11} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = r \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{13} = r \nu \frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_{22} = r^2 \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \beta \left\{ (1-\nu) r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \beta \left\{ r^2 \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\}$$

$$L_{31} = -r \nu \frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_{32} = -\frac{\partial}{\partial \theta} - \beta \left\{ (2-\nu) r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\}$$

$$L_{33} = -1 - \beta \left\{ r^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2r^2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right\} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Onde $\beta = h^2/12 R^2$, $\gamma = \rho_s R^2(1-\nu^2)/E$.

Supõe-se que o fluido no interior do invólucro cilíndrico é não-viscoso, isotrópico, irrotacional e em estado estacionário, o qual satisfaz a equação de onda acústica. A equação do movimento do fluido pode ser escrito em Kinsler (1962) no sistema de coordenadas cilíndricas (z, θ, r) .

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2)$$

Onde p é a pressão acústica, c a velocidade da onda acústica fluido livre, t tempo.

A seguinte forma de solução para as deformações da superfície média da casca cilíndrica que satisfazem tanto as equações de movimento e as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} u &= A_{i,m,n} \frac{\partial(\varphi_m)}{\partial z} \cos[n(\theta - \psi)] \exp^{i\omega t} \\ v &= B_{i,m,n} (\varphi_m) \cos[n(\theta - \psi)] \exp^{i\omega t} \\ w &= C_{i,m,n} (\varphi_m) \cos[n(\theta - \psi)] \exp^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

Sendo A , B e C constantes que descrevem a amplitude dos deslocamentos axial (u), circunferencial (v) e radial (w), respectivamente, (ω) é a frequência circular $\varphi_m = \sin(m\pi z/L)$, $\cos[n(\theta - \psi)]$ são funções solução que descrevem as deformadas modais na vibração livre da viga e o anel, Soedel (2005).

A formulação associada ao campo de pressão acústica no fluido, que satisfaz a equação de onda acústica, associada ao número de onda axial, número de onda radial e circunferencial é dada como

$$p_{i,\bar{m},\bar{n}} = P_{i,\bar{m},\bar{n}} \cos[\bar{n}(\theta - \vartheta)] J_n\left(\frac{\chi_i}{a} r\right) \sin\left(\frac{\bar{m}\pi z}{L}\right) \exp^{i\omega t} \quad (4)$$

Onde $j()$ é a função de Bessel de ordem n , em que a coordenada (r) relaciona o numero de círculos nodais (i), a coordenada (θ) relaciona o número de diâmetros modais ($\bar{n}$), e por ultimo, a coordenada (z) relaciona o número de nodos axiais ($\bar{m}$). A equação de onda apresenta resposta harmônica no tempo, onde (ω) é a frequência natural:

$$\omega = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\bar{m}\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\chi_i}{a}\right)^2} \quad (5)$$

Para assegurar acoplamento estrutura casca-cavidade acústica isto é que o fluido continue em contacto com a parede, o deslocamento radial de fluido e o deslocamento radial casca deve ser igual na interface da parede interior do invólucro e o fluido. Esta condição de acoplamento é determinada por Soedel (2005) como:

$$\left. \frac{\partial \phi(a, r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\partial w(z, \phi, t)}{\partial t} \quad (6)$$

Para o caso de uma casca cilíndrica reta e simplesmente apoiada sem restrição axial, e uma vez que o fluido está envolvido, A pressão acústica no contorno, $r = a$, é dada por

$$p(a, \theta, z, t) = j \frac{C \rho_f \omega^2}{B'_n(\alpha r)|_{r=a}} = B_n(\alpha r) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \phi)] e^{j\omega t} \quad (7)$$

A combinação entre a solução analítica de pressões do fluido e a equação de movimento da estrutura, em um dado modo de vibração pré-estabelecido, permite o desenvolvimento de uma solução pseudo-acoplada, que incorpora os efeitos do fluido na estrutura e permite a solução das frequências acopladas do problema, Chopra, (2007), estudado por Ribeiro, (2010).

$$\begin{bmatrix} \rho_e h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho_e h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho_e h (1 + \xi) \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

É a densidade virtual ou adicional do fluido, adimensional.

$$\xi = \left(\frac{\rho_f a}{\rho_e h} \right) \left[\frac{B_n(\alpha a)}{a B'_n(\alpha a)|_{r=a}} \right] \quad (9)$$

Para uma solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes da Eq. (8) tem que ser zero. Expandindo o determinante resulta,

$$a_0 \omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (10)$$

A continuação a expressão para a Frequência circular natural acoplada do sistema

$$\omega_{1mn}^2 = -\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{a_1}{3} \quad (11)$$

Onde B_n é a Função de Bessel, sendo B'_n , sua derivada.

3 ASPECTOS NUMÉRICOS E COMPUTACIONAIS

O elemento finito SHELL63 para a casca cilíndrica apresenta comportamento de membrana e de viga. São permitidos carregamentos no plano e na direção normal. O elemento possui seis graus de liberdade em cada um dos quatro nós (translações dos nós nas direções x, y e z; e rotações em torno dos mesmos eixos). Estão incluídas a capacidade de rigidez a tensão e grandes deflexões. A opção de matriz de rigidez consistente tangencial está disponível para uso na análise de grandes deflexões (rotação finita).

O elemento finito FLUID30 é usado para modelar o meio fluido e a interface em problemas de interação fluido/estrutura. Aplicações típicas incluem problemas de propagação sonora e dinâmica de estruturas submersas em meio fluido. A equação que governa a acústica, isto é, a equação de onda tridimensional, pode ser discretizada considerando o acoplamento entre a pressão acústica e o movimento estrutural na interface. O elemento apresenta oito nós com quatro graus de liberdade por nó: pressão e translação do nó nas direções x, y e z. As translações, entretanto, são aplicáveis apenas nos nós que estão na interface.

Para elementos acústicos que estão em contato com o sólido, são conhecidos como elemento de interfase estabelece a configuração padrão que permite a interação fluido-estrutura; resultando em matrizes de elementos assimétricos com deslocamentos como graus de liberdade u_x , u_y , u_z , e pressão. Para todos os outros elementos acústicos, ao interior do domínio o resultado são matrizes de elementos simétricos com o grau de liberdade com variável pressão. As matrizes simétricas requerem muito menos espaço de armazenamento e tempo de computador.

3.1 Análise de convergência

Para obter as soluções numéricas adequadas pelo Método dos Elementos Finitos no software ANSYS, estudos de convergência para cada modelo (casca, cavidade, acoplamento casca-cavidade cilíndrica), foram realizados.

A fórmula para obter o erro percentual dos resultados numéricos em comparação com os resultados analíticos foi:

$$Erro(\%) = \left| \frac{\omega_{\text{Analítico}} - \omega_{\text{Numérico}}}{\omega_{\text{Analítico}}} \right| \cdot 100 \quad (12)$$

Na Tabela apreciam-se os quatro níveis de refinamentos feitos na configuração geométrica da casca cilíndrica (altura ou comprimento e circunferência).

Tabela 1 - Níveis de refinamentos.

Nível Refinamento	Nº divisões Altura	Nº divisões Circunferência
1	7	12
2	10	24
3	20	48
4	40	80

A Figura apresenta a convergência da estrutura casca para as duas primeiras frequências naturais numéricas para cada nível de refinamento, a informação no gráfico refere-se as duas primeiras combinações modais m,n e suas frequências naturais analíticas, para as quais o estudo de convergência numérico é realizado.

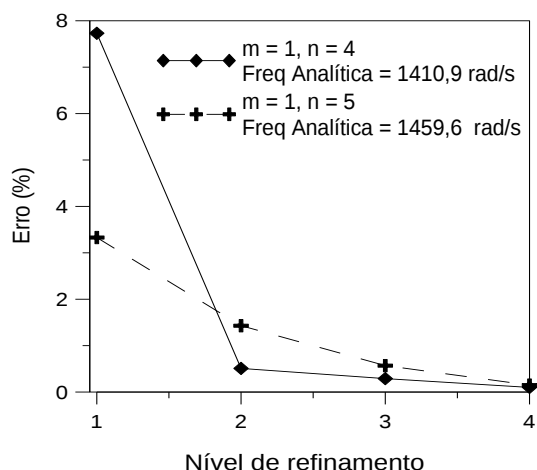


Figura 2. Análise de convergência para a estrutura casca.

Na Figura . 3 apresenta-se a variação das frequências naturais numéricas, para cada nível de refinamento do modelo cavidade cilíndrica, a informação no gráfico reporta as duas primeiras frequências naturais analíticas para as quais o estudo de convergência numérico é realizado.

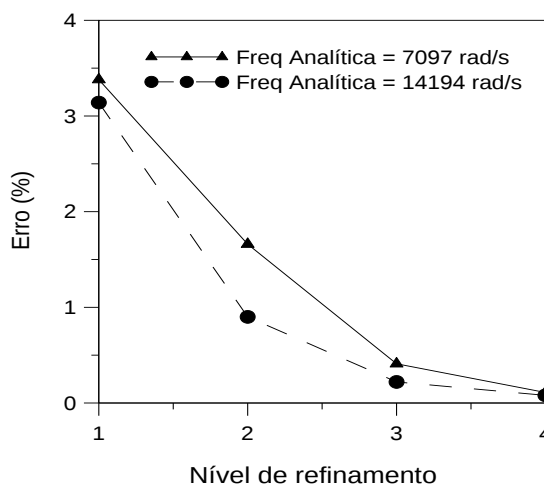


Figura 3. Analise de convergência para a cavidade cilíndrica.

A Fig. 4 apresenta a convergência das duas primeiras frequências naturais numéricas para o sistema acoplado. Podem-se apreciar as rigidezes das soluções numéricas onde um erro porcentual de 40 % na frequência numérica para o primeiro nível de discretização diminui a 17% para o segundo nível de discretização. Uma explicação para este fato é devido ao pouco refinamento na superfície de interface para garantir o efeito acoplado fluido-estrutura.

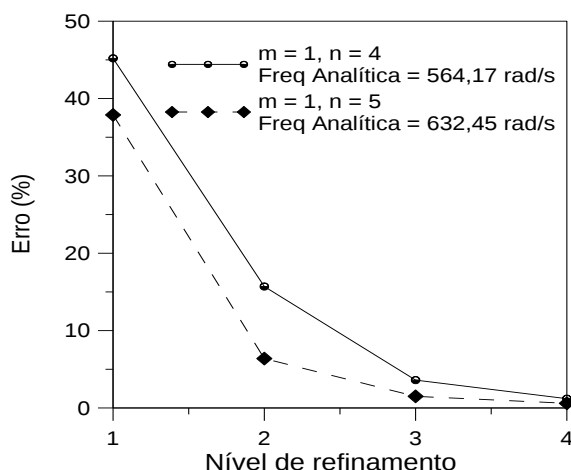


Figura 4. Análise de convergência para o acoplamento fluido-estrutura.

Em todas as análises dos casos desacoplados e acoplados, foi utilizado o nível de refinamento 4, para a obtenção das soluções numéricas neste trabalho.

4 ESTUDO DE CASOS E RESULTADOS

4.1 Validações

A precisão das equações de movimento de Donnell para frequências desacopladas da casca tem sido validada extensivamente e revista em Kraus (1967) e Blevins (1979). Neste trabalho mais resultados da comparação são dados para novas validações. Desta vez pretende-se estudar e comparar modelos analíticos e numéricos para a interação fluido estrutura de uma casca completamente preenchida de um fluido acústico. Para tanto, estuda-se o comportamento de modelos desacoplados de casca e de cavidade. Finalmente, compara-se o modelo numérico de interação fluido-estrutura com o trabalho analítico-experimental de Amabili e Dalpiaz (1995).

A Tabela 2 mostra a comparação dos resultados analíticos e numéricos das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) da casca cilíndrica desacoplada simplesmente apoiada nos extremos e sem restrição axial. A Tabela 2 relaciona as frequências numéricas e analíticas com o índice modal (i, m, n) e o erro relativo, segundo Eq. (12).

Os parâmetros da casca são: $L/R = 3.79$, $h/R = 0.0057$, $h = 1 \text{ mm}$.

Tabela 2. Frequências naturais da estrutura casca desacoplada, com condições de contorno simplesmente apoiada.

N	i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ Analítico (rad/s)	$\omega_{i,m,n}$ Numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4	1410.9	1410.07	0.06
2	1	1	5	1459.6	1458.14	0.10
3	1	1	6	1881.2	1878.48	0.14
4	1	1	3	2022.8	2022.2	0.03
5	1	1	7	2498.7	2497.6	0.04
6	1	2	6	2806.9	2805.6	0.05
7	1	2	7	3000.6	2998.2	0.08
8	1	2	5	3160.3	3160.4	0.00
9	1	1	8	3248.4	3246.6	0.06
10	1	2	8	3547.8	3544.2	0.10

Como pode se ver a partir das comparações os resultados estão em boa concordância.

A Tabela 3 mostra a comparação dos resultados analíticos e numéricos das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) para uma cavidade acústica cilíndrica desacoplada aberta nos seus extremos e fechada na lateral. Tabela 3 relaciona as frequências numéricas e analíticas com o índice modal (i, m, n) e o erro relativo, segundo da Eq. (12).

Tabela 3. Frequências naturais da cavidade desacoplada aberta nos seus extremos e fechada na lateral.

N	i	$\bar{m}$	$\bar{n}$	$\omega_{i,\bar{m},\bar{n}}$ Analítico (rad/s)	$\omega_{i,\bar{m},\bar{n}}$ Numérico (rad/s)	Erro (%)
1	0	1	0	7097	7098	0,01
2	0	2	0	14194	14209	0,11
3	0	1	1	17304	17318	0,08
4	0	2	1	21226	21233	0,03
5	0	3	0	21291	21299	0,04
6	0	3	1	26502	26513	0,04
7	0	1	2	27124	27148	0,09
8	0	4	0	28388	28406	0,06
9	0	2	2	29779	29802	0,08
10	0	4	1	32480	32500	0,06

Os resultados das frequências da cavidade obtidos na Tabela 3 caracterizam-se por uma boa aproximação. As frequências obtidas pela teoria analítica e pelo software ANSYS (método numérico) são praticamente iguais. Isto demonstra uma boa concordância do modelo numérico e a formulação analítica para estas condições de contorno.

Tabela 4. Frequências naturais acopladas

N	i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ Analítico (rad/s)	$\omega_{i,m,n}$ Numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4	564,17	567,2	0,5
2	1	1	5	632,45	637,8	0,8
3	1	1	3	734,15	736,3	0,3
4	1	1	6	871,22	881,9	1,2
5	1	1	7	1223,69	1243,9	1,7
6	1	1	2	1247,81	1248,5	0,1
7	1	2	6	1312,78	1329,21	1,3
8	1	2	5	1388,99	1401,8	0,9
9	1	2	7	1480,04	1504,4	1,6
10	1	2	8	1832,04	1703,6	7,0

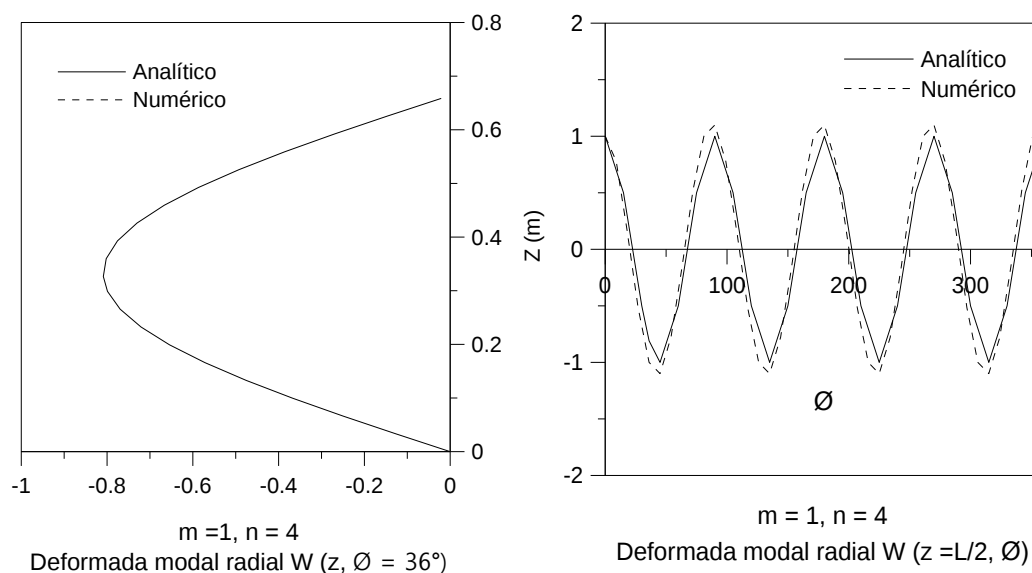


Figure 5. Deformadas modais para o sistema acoplado radial, ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

A Tabela 5 apresenta as dez primeiras frequências numéricas comparativas dos sistemas casca cilíndrica e acoplamento casca-cavidade.

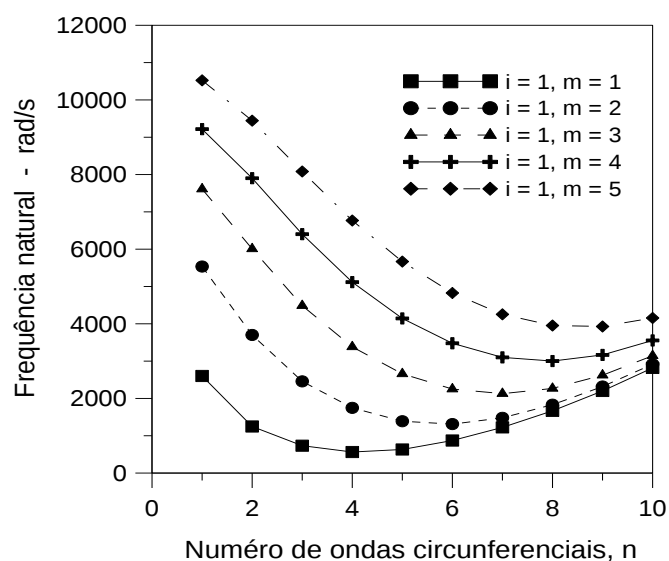
Tabela 5. Frequências numéricas comparativas casca vs casca-cavidade

Estrutura Casca		Acoplamento Fluido-Estrutura	
N (i, m, n)	ω (rad/s)	N (i, m, n)	ω (rad/s)
1 (1,1,4)	1410,07	1 (1,1,4)	567,2
2 (1,1,5)	1458,14	2 (1,1,5)	637,8
4 (1,1,3)	2022,2	3 (1,1,3)	736,3
3 (1,1,6)	1878,48	4 (1,1,6)	881,9
5 (1,1,7)	2497,6	5 (1,1,7)	1243,9
11 (1,1,2)	3830,29	6 (1,1,2)	1248,5
6 (1,2,6)	2805,6	7 (1,2,6)	1329,21
8 (1,2,5)	3160,4	8 (1,2,5)	1401,8
7 (1,2,7)	2998,2	9 (1,2,7)	1504,4
10 (1,2,8)	3544,2	10 (1,2,8)	1703,6
9 (1,1,8)	3246,6		

As formas modais acopladas das dez primeiras frequências (Tabela 5) caracterizam-se pelo modo controlado pela estrutura. Isso ocorre devido ao fato de que o sólido provoca uma perturbação na cavidade o que força o fluido a acompanhar a sua deformada.

Como o modo da estrutura é dominante, pode-se comparar esse resultado com a frequência correspondente para o caso desacoplado. Observa-se que esse valor é maior que o resultado obtido no caso acoplado, devido à existência de massa adicional incorporada ao sistema fluido-estrutura.

Os modos da estrutura não apresentam excitação de formas modais típicas da cavidade, mas adicionam massa de fluido à estrutura, como se pode observar pela perturbação da região de fluido em contato com a parede da estrutura. A Figura 6 apresenta as frequências naturais $\omega_{i,m,n}$ analíticas para o primeiro grupo de frequências $i = 1$.

**Figura 6. Frequências naturais analíticas acopladas**

A Figura apresenta as frequências naturais analíticas $i=1$ para as combinações modais $m=1$ e $n=3$ a 7 em Hz, para a estrutura desacoplada (casca cilíndrica vazia) e para o sistema acoplado fluido-estrutura FE (casca cilíndrica cheia).

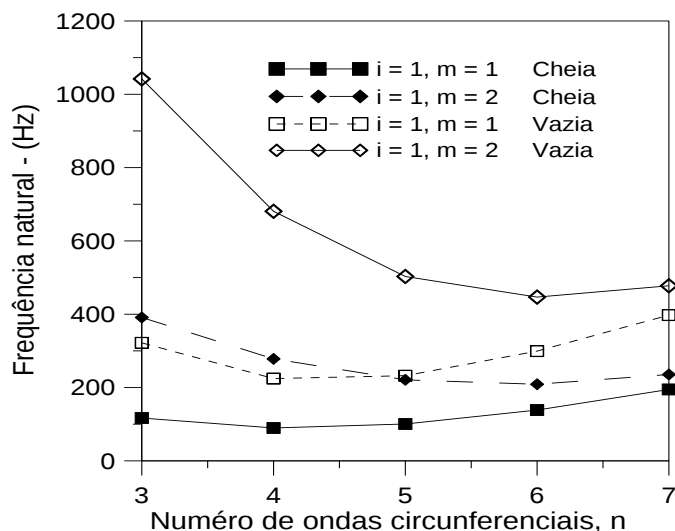


Figura 7 - Frequências naturais analíticas para a casca vazia e cheia.

Na Figura , tanto para a casca vazia quanto para a casca preenchida de fluido, as frequências naturais atingem um valor mínimo para o mesmo valor de $n=5$.

Isto indica que a energia interna de deformação elástica é praticamente idêntica nos dois casos. Pode-se concluir que o decréscimo acentuado das frequências no caso da casca cheia de líquido em relação ao caso da casca vazia, é explicado pelo aumento acentuado da energia cinética do sistema fluido-estrutura, que é traduzido pelo acréscimo do parâmetro de massa virtual ξ nas equações de movimento, ver Eq. (9) sem um aumento correspondente da energia potencial do sistema. Sempre que isto ocorre em um sistema dinâmico conservativo há um decréscimo nas frequências naturais.

A casca cilíndrica com condições de contorno simplesmente apoiada, acoplada a um fluido acústico ou cavidade acústica com extremos abertos (isto é, pressão zero), foi estudada em uma análise de vibrações livres pelas abordagens analítica e numérica em um estudo comparativo. Os resultados caracterizam-se por uma boa aproximação. Percebe-se as suavidades das soluções analíticas em relação com a rigidez da solução numérica, isto é observado na análise de convergência, em especial na convergência para o modelo numérico acoplado, ver Figura 4.11, onde para a primeira mudança no nível de refinamento na superfície de interação fluido-estrutura a diminuição do erro foi considerável, passando de 47% a 17% para a primeira frequência natural, e de 37% a 6% para a segunda frequência natural. Analiticamente a solução baseasse em incorporar nas equações do movimento da casca cilíndrica, o efeito da força de inércia do líquido oscilante, como massa virtual. O qual permitira obter as frequências naturais para o sistema acoplado casca-cavidade acústica ou (casca-fluido acústico). Podese apreciar que as ordens das frequencias naturais para a casca contendo o fluido decrescem a metade ou terça parte das ordens das frequencias naturais para a casca vazia. Neste método desprezasse o efeito hidrostático da agua e se particulariza o efeito oscilatório da pressão do liquido considerado como uma massa adicional para a casca.

5 CONCLUSÕES

Para o estudo das características modais de cascas cilíndricas vazias e cheias com líquido, considerou-se o estudo de 3 casos, através de uma análise comparativa entre as soluções analíticas e numéricas. Os três casos: Caso 1.A., Caso 1.B. e Caso 1.C., apresentam o estudo do acoplamento fluido acústico-estrutura casca cilíndrica.

No Caso 1.A., analisou-se uma casca cilíndrica circular reta de paredes finas, simplesmente apoiada e sem restrição axial, Os dados obtidos pelas abordagens analítica e numérica mostraram-se bastante próximos, o que garante a coerência dos resultados. A modelagem da casca foi feita com a utilização da teoria linear de Donnell e assumindo soluções em expansões modais de funções de viga. Observa-se que a menor frequência natural não esta necessariamente associada aos menores valores do numero de ondas circunferenciais, n . Observa-se a grande variedade de deformadas modais com aspecto bastante diferenciado, obtidas a partir das equações dinâmicas que descrevem a casca cilíndrica, dentro das quais estão as vibrações transversal, longitudinal e torcional.

No Caso 1.B. analisou-se a cavidade acústica com geometria cilíndrica, aberta nos extremos e rígida na lateral, o estudo comparativo analítico e numérico caracteriza-se por uma excelente aproximação entre os resultados, se destacando por uma boa coerência entre o modelo numérico e a formulação analítica para estas condições de contorno. Analiticamente obteve-se a solução da equação de Helmholtz (que representa a base teórica para o fluido) através do método de separação de variáveis, os resultados são expressos em termos de frequências naturais e modos de pressão. Observa-se que as frequências naturais da cavidade acústica são na ordem de 5 a 10 vezes superiores as frequências naturais para a casca vazia.

No Caso 1.C. estudou-se a análise de vibrações livres pelas abordagens analítica e numérica para o sistema acoplado casca-cavidade, os resultados caracterizam-se por uma boa aproximação. Analiticamente o efeito do líquido foi incorporado nas equações do movimento da casca, como massa virtual, quando a pressão exercida pelo líquido sobre a superfície do reservatório é devida a força de inércia do líquido oscilante. Pode ser visto que as frequências naturais para a casca contendo o fluido se reduz aproximadamente da metade a terça parte do valor das frequências para a casca vazia. Observa-se que os modos naturais dominantes para o sistema acoplado são os modos naturais da estrutura. Percebe-se a suavidade das soluções analíticas em relação a rigidez da solução numérica, isto é observado nas análise de convergência, em especial na convergência do modelo numérico fluido-estrutura, em que para a primeira mudança no nível de refinamento na superfície de interação fluido-estrutura ocorre uma diminuição considerável do erro.

AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, ao Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC), ao Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura (GDFE), pelo apoio, motivação e conhecimentos impartidos, ao Departamento de Engenharia Mecânica Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas (PPCM), a os professores

Lineu José Pedroso e Marcus Vinicius Girão de Moraes, pelos valiosos ensinamentos, paciência, e boa disposição; especial agradecimento a CNPq, CAPES, pela incrível oportunidade de uma formação de alta qualidade.

REFERÊNCIAS

Amabili, M. & Paidoussis, M. P., 2003 “Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction”, *Applied Mechanics Review*, vol. 56, pp. 349v- 381.

Amabili, M., Pellicano, F. & Paidoussis, M. P., 1999a “Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid.” Part I: stability. *Journal of Sound and Vibration*, v225, p. 655-699.

Amabili, M., Pellicano, F. & Paidoussis, M. P., 1999b “Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid.” Part II: Large-amplitude vibrations without flow. *Journal of Sound and Vibration*, v228, p. 1103-1124.

Amabili, M., Pellicano, F. & Paidoussis, M. P., 2000a “Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid.” Part III: Truncation effect without flow and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, v237, p. 641-666.

Amabili, M., Pellicano, F. & Paidoussis, M. P., 2000b “Non-linear vibrations of fluid-filled, simply supported circular cylindrical shells: theory and experiments.” *The 2000 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition – Non-linear Dynamics of Shells and Plates*, Orlando, p 73-84.

Amabili, M., & Dalpiaz, G., 1995 “Breathing vibrations of a Horizontal Cylindrical tank shell, partially filled with liquid”. *Journal of Vibration and Acoustics*.

Berry, J. G. & Reissner, E., 1958. “The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibrations of a thin pressurized cylindrical shell.” *J. Aeronautical Sci.* 25, 288-294.

Blevins, R. D., 1979. *Formulas for the Natural Frequency and Mode Shape*. Krieger Publishing Company.

Bhuta, P. & Koval, L. R., 1964. “Hydroelastic solution of the sloshing of a liquid in a cylindrical tank.” *J. Acoust. Soc. Am.* 36 (11), 2071 - 2079.

Chiba, M., Yamaki, N., & Tani, J., 1984. “Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid” – Part I: *Theoretical Analysis, Thin-walled structures* 2, 265 - 284.

Feio da Silva; “Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido estrutura” *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB, 2007.

Fernholz, C. M, Robinson, J. H., 1990 “Fully-Coupled Fluid/Structure Vibration Analysis Using MSC/NASTRAN”, *NASA technical memorandum* 102857.

Gonçalves, P. B., “Linear vibrations of thin shells in a fluid medium.” *Rio*. 1985.

Koga, T. & Tsushima, M., 1990. “Breathing vibrations of a liquid – filled circular cylindrical shell”, *Int. J. Solids Structures* vol. 26, No 9/10. pp. 1005-1015.

Kim, Y. W., Lee, Y.S. & Ko, S. H. (2003). “Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffener”. In: *Journal of Sound and Vibration*, 276 (2004) 869-897. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.008.

Kraus, H. 1967. *Thin Elastic Shells*. New York: Wiley.

Mendes, N. B., 2013 “Um estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura aplicados a barragens em arco” *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB.

Mendes, N. B. ; Pedroso, L. J., 2014. “Um estudo das frequências naturais e modos de vibração em painéis cilíndricos abatidos. In: IASS-SLTE 2014 Symposium Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints, 2014, 2014, Brasília.

Mendes, N. B. ; Pedroso, L. J.; Gibert, R. 2013. “Um Estudo analítico-numérico em vibrações livres de cavidades acústicas cilíndricas. In: XXXIV Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2013), 2013, Pirinópolis-GO.

Pedroso, L. J. ; Brito, J. L. V. ; Barbosa, A. N. ; Stumpf, R. D. 1994a. “Estudo Dinamico Teorico-Experimental da Casca Cilindrica Interna do Nucleo de um Reator Nuclear”. In: 8 Brazilian Symposium on Piping and Pressure Vessels.

Pedroso, L. J. ; Barbosa, A. N. ; Morais, M. V. G. . 1994b, “ Vibracoes Livres de Cascas Cilindricas pelo Metodo das Diferencas Finitas”. In: XV Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Belo Horizonte. XV CILAMCE. Belo Horizonte, 1994b.v.II.p.1059-1068.

Lakis, A. A. & Paidoussis, M. P., 1971 “Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid.” *Journal of Sound and Vibration*, 19 (1), 1-15.

Lopez, A. A. O., 2014 “Estudo comparativos analítico-numérico de vibrações livres e acoplamento fluido-estrutura em cascas cilíndricas”. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB.

Lopez, A. A. L. ; Dutra, R. B. ; Pedroso, L. J. 2013 . “Um estudo analítico e numérico dos efeitos das condições de borda em vibrações livres de cascas cilíndricas. In: XXXIV Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2013), 2013, Pirinópolis-GO.

Lindholm, U. S., Kana, D. D. & Abramson, H. N., 1962. “Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid.” *J. Aerospace. Sci.* 29, 1052-1059.

Zhang, M. X., 2002. “Parametric studies of coupled vibration of cylindrical pipes conveying fluid with the wave propagation approach.” *Computers and Structures* 80, 287 – 295.

Zhang, X. M., Liu, G. R., & Lam, K. Y., 2001. “Vibration analysis of thin cylindrical shell using wave propagation approach.” *Journal of Sound and Vibration*, 239 (3), 397 – 403.