



O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento

Paulo de Oliveira Weinhardt

paulo_weinhardt@live.com

Marcos Arndt

marcos.arndt@gmail.com

Roberto Dalledone Machado

roberto.dalledonemachado@gmail.com

Universidade Federal do Paraná

Av. Cel. Francisco H. dos Santos, 210, 81531-980, Curitiba, Paraná, Brasil

Abstract. *No contexto da análise dinâmica de estruturas, uma das limitações do Método dos Elementos Finitos (MEF) é a dificuldade de aproximar as altas frequências. Essa falta de precisão se torna mais significativa a medida que os carregamentos excitam os modos com frequências mais altas. Visando abordar esse tipo de problema é possível utilizar o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) para enriquecer o espaço de aproximação e representar melhor esses modos de alta frequência. Neste artigo são discutidos três tópicos relevantes a esta abordagem em problemas da elasticidade unidimensional: formas de enriquecimento eficientes na análise dinâmica, tipos de Partição de Unidade utilizados como base do MEFG e técnicas de pré condicionamento das funções de enriquecimento para diminuir a sensibilidade das matrizes geradas. Os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas disponíveis para o problema de barra, mostrando que as implementações propostas possibilitam captar melhor frequências mais elevadas, melhorando a representatividade do espectro.*

Keywords: *Análise Dinâmica, MEFG, Partição da Unidade, Condicionamento, MEFG Estabilizado*

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um método de Galerkin aplicado a subdomínios. Nesse método são adicionadas funções de enriquecimento que refletem características particulares do problema que visam melhorar a qualidade da aproximação. Para simular a propagação de trincas, por exemplo, podem ser utilizadas funções que contenham singularidades ou descontinuidades. Analogamente, para problemas da dinâmica de estruturas, podem ser utilizadas funções que contenham termos trigonométricos.

Os trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012) apresentaram a aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise dinâmica. No trabalho de Arndt (2009) foram estudadas metodologias de enriquecimento para a análise modal de estruturas reticuladas. A eficiência da abordagem se comprovou com a obtenção de excelentes resultados em termos do espectro de frequências. No entanto, a aplicação de sucessivas camadas de enriquecimento resultam no aumento de sensibilidade do problema numérico. Posteriormente, Torii (2012) deu continuidade aos estudos do MEFG em dinâmica, estendendo as aplicações ao domínio bidimensional e envolvendo análises modais e transientes.

Baseando-se nesses trabalhos, Shang (2014) estende os estudos do MEFG a análise dinâmica elastoplástica propondo soluções para as dificuldades numéricas presentes na abordagem por MEF. Os resultados obtidos são bastante satisfatórios mas, no entanto, a problemática de sensibilidade numérica continua presente.

Concomitantemente, foram desenvolvidos por Garcia *et al.* (2010) estudos utilizando o MEFG C^k para a análise modal relacionando o grau de regularidade do espaço de aproximação com a capacidade desse representar com qualidade frequências de vibração elevadas. Esta abordagem empresta as funções de Shepard dos métodos sem malha em função da possibilidade de escolher uma ordem de regularidade " k " do espaço de aproximação contido em " C^k ", utilizando-as como Partição da Unidade. O enriquecimento é então feito com termos polinomiais.

Estendendo a hipótese de que a regularidade do espaço de aproximação influencia na acurácia do espectro, este artigo apresenta uma construção baseada em funções trigonométricas para fins de comparação com as abordagens utilizando elementos lagrangeanos (Arndt, 2009; Torii, 2012; Shang, 2014) e elementos C^k (Garcia *et al.*, 2010).

Visando tratar os problemas de sensibilidade numérica que surgem na aplicação das propostas de enriquecimento, são apresentadas duas alternativas: aplicação dos conceitos do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado e aplicação de modificações de pré-condicionamento nas funções de enriquecimento.

O MEFG Estabilizado foi proposto por Babuška & Banerjee (2012) para tratar o problema de mal-condicionamento dos sistemas de equações gerados pela aplicação do MEFG. Esta solução consiste numa simples modificação das funções de enriquecimento antes de associá-las à Partição da Unidade. Babuška & Banerjee (2012) apresentam ainda o embasamento matemático que garante que o condicionamento desses sistemas pré-condicionados é tão bom quanto os resultantes do MEF. Neste trabalho, testa-se a extensão dessa proposta à análise modal, que resulta em um problema de autovalores e autovetores generalizado.

Seguindo a ideia de que pequenas alterações nas funções de enriquecimento podem alterar o condicionamento numérico do problema sem perdas significativas das propriedades de

acurácia do MEFG, este artigo propõe uma sutil modificação nas funções utilizadas para análise unidimensional por Arndt (2009). Esta proposta se mostrou bastante eficaz, aumentando significativamente a estabilidade do método.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho desenvolveu duas abordagens visando a melhora da acurácia e da estabilidade da aplicação do MEFG em análise dinâmica, gerando melhora nos resultados e aumento da aplicabilidade. As abordagens consistem em:

- Estudo da escolha da partição da unidade (PU) utilizada como base;
- Estudo de modificações pré condicionantes aplicadas às funções de enriquecimento.

2.1 ANÁLISE DINÂMICA MODAL

No contexto deste trabalho foi estudado um problema simples com solução analítica, possibilitando assim a validação dos resultados, estudo de convergência de vibração uniaxial de barra e comparação das abordagens adotadas.

Segundo Bathe (1996), a análise modal recai no seguinte problema de autovetores e autovalores generalizado:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (1)$$

onde,

- K : matriz de rigidez;
- M : matriz de massa;
- ω : frequência natural;
- ϕ : vetor de modo de vibração natural.

As matrizes K e M estão associadas a discretização e aproximação por Elementos Finitos do Problema Variacional de Valor de Contorno (PVVC) referente ao equilíbrio dinâmico do sistema. Ou seja, as matrizes K e M podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} K &= [k_{ij}] = \int_{\Omega} \Phi_{i,x} \Phi_{j,x} d\Omega \\ M &= [m_{ij}] = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

sendo Φ as funções de interpolação, $\Phi_{,x}$, em notação indicial, sua primeira derivada e Ω o domínio global do problema.

SOLUÇÃO ANALÍTICA - BARRA BI-ENGASTADA

Visando a possibilidade de uma comparação eficaz dos métodos aproximados, o presente trabalho se restringiu a aplicação em um problema com solução analítica disponível. Para o caso unidimensional, o problema escolhido é exposto a seguir.

Considere-se uma barra engastada em ambas as extremidades, conforme ilustrado na Fig 1.

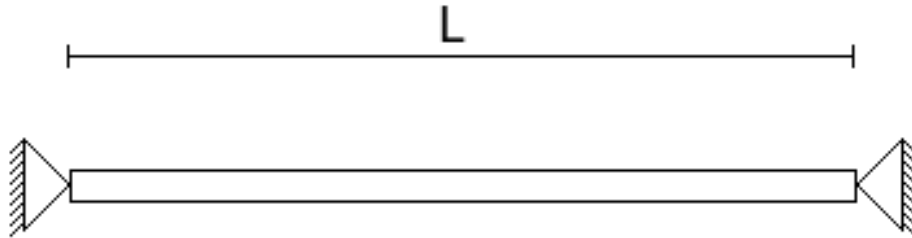


Figura 1: Barra bi-engastada.

O modelo resulta no seguinte problema elíptico de autovalores e autovetores, na forma forte:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\omega^2 \frac{\rho}{E} u(x) \quad (3)$$

Sujeito às condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

A solução analítica é dada por:

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (5)$$

Esta solução é utilizada para normalizar as soluções aproximadas como:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_h}{\omega} \quad (6)$$

Considerando que o espectro de frequência independe das constantes, foram adotados: seção constante unitária, parâmetros de material unitários e comprimento total unitário.

Analogamente, os graus de liberdade (n) são normalizados em função do número total de graus de liberdade (N) como:

$$\bar{n} = \frac{n}{N} \quad (7)$$

Dessa forma, ao plotar $\bar{\omega} \times \bar{n}$, pode-se comparar os diferentes métodos com distintos números de graus de liberdade.

2.2 CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO DO MEF

Conforme Melenk (1995), o MEF pode ser visto como um caso particular do Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU). Assim, as propriedades do MEF, e consequentemente do MEF, são herdadas do MEFPU. A seguir são estabelecidas as condições às quais a aproximação deve estar submetida para que sejam válidas as propriedades da Partição da Unidade.

Partição da Unidade é um espaço topológico de funções $\{\phi_i\}$ subordinadas a uma cobertura $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$ que possuem as seguintes propriedades:

- $\text{suporte}\{\phi_i\} \subset \{\bar{\Omega}_i\}$, ou seja $\{\phi_i\}$ tem suporte compacto em $\{\Omega_i\}$
- $\sum_i \{\phi_i\} = 1$ em Ω

Com a definição deste ente topológico pode-se estabelecer o conceito do espaço de aproximação do MEFPU.

Seja Ω_i uma cobertura aberta de $\{\Omega_i\} \subset \mathbb{R}$ e seja uma Partição da Unidade $\{\phi_i\}$ correspondente. Seja, ainda, um espaço $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$. Então o espaço

$$V_{MEFPU} = \sum_i \phi_i V_i \quad (8)$$

é definido como espaço de aproximação do MEFPU.

Os espaços de aproximação V_i apresentam as seguintes propriedades de aproximação:

Sendo $v_i \in V_i$ e assumindo que os espaços de aproximação locais V_i satisfaçam

$$|u - v_i|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(i) \quad (9)$$

e

$$|\nabla(u - v_i)|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(i) \quad (10)$$

Então a função u_h satisfaz,

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left(\sum_i \epsilon_1^2(i) \right) \quad (11)$$

e

$$|\nabla(u - u_h)|_{L(\Omega)^2} \leq \sqrt{2M} \left(\sum_i \left(\frac{C_g}{\text{diam}\Omega_i} \right)^2 \epsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(i) \right) \quad (12)$$

Com os conceitos pertinentes do MEFPU embasados, pode-se escrever que a solução aproximada do MEF é composta da soma de duas parcelas:

$$u_h^e = u_{MEF} + u_{ENR} \quad (13)$$

onde u_{MEF} corresponde a parcela descrita pelas funções de aproximação clássicas do MEF e u_{ENR} corresponde a aproximação feita pelas funções de enriquecimento que visam incorporar aspectos particulares do problema estudado.

ENRIQUECIMENTO TRIGONOMÉTRICO

Para o problema de vibração livre foi proposto por Arndt (2009) um bloco de funções de enriquecimento para o problema de análise dinâmica com o MEFG. Esse grupo de funções consiste na construção de um par de nuvens, uma senoidal e uma cossenoidal, subordinadas a cobertura do nó enriquecido. Essas nuvens são escritas no domínio do elemento como dois pares de funções seno e cosseno. O domínio elementar é considerado para $\xi \in (0, +1)$.

Nuvem senoidal:

$$\begin{aligned}\gamma_{1j} &= \text{sen}(\beta_j L_e \xi) \\ \gamma_{2j} &= \text{sen}(\beta_j L_e (\xi - 1))\end{aligned}\tag{14}$$

Nuvem cossenoidal:

$$\begin{aligned}\varphi_{1j} &= \text{cos}(\beta_j L_e \xi) - 1 \\ \varphi_{2j} &= \text{cos}(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1\end{aligned}\tag{15}$$

Onde L_e é o comprimento do elemento e $\beta_j = j\pi$ é um parâmetro de enriquecimento hierárquico proposto por Arndt (2009) para j níveis de funções.

2.3 ESCOLHA DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

Conforme exposto por Garcia *et al.* (2010), a regularidade do espaço de aproximação realizada na análise modal se relaciona diretamente com a capacidade de representação das frequências mais elevadas. Considerando que, como mostrado por Duarte & Oden (1996), a regularidade das funções que formam a partição da unidade limita a regularidade do espaço enriquecido, é razoável supor que a escolha apropriada da PU influencia diretamente a qualidade da aproximação de altas frequências do MEFG. Dessa forma, foram escolhidas alternativas com graus diferentes de regularidade para testar essa correlação.

PARTIÇÃO LAGRANGEANA

A primeira escolha é o polinômio linear de Lagrange definido em $\Omega : (-1, +1)$, ou função chapéu (*hat function*). A escolha do polinômio linear de Lagrange resulta numa facilidade nos cálculos e construção dos espaços de aproximação. As funções são definidas na Eq.16 e ilustradas na Fig.2:

$$\mathcal{L}_1 : \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1 - \xi)}{2} \\ \frac{(1 + \xi)}{2} \end{array} \right\}\tag{16}$$

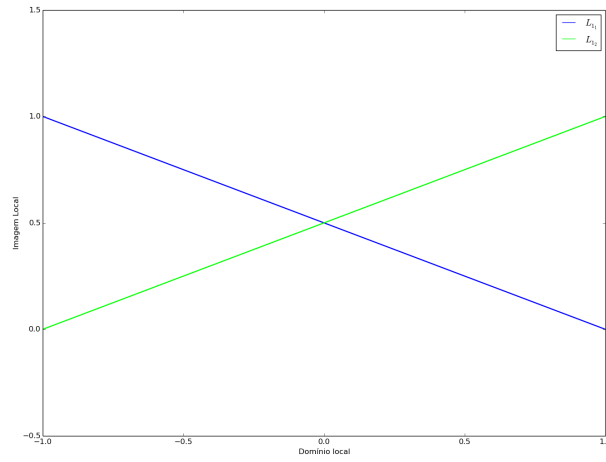
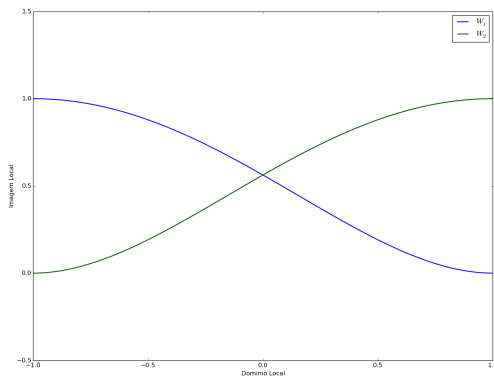


Figura 2: Partição da Unidade Lagrangeanas Linear

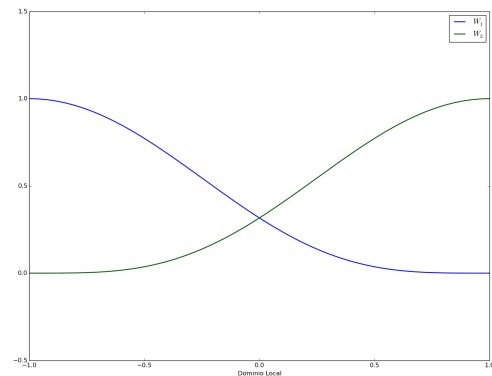
PARTIÇÃO C^k

A funções C^k utilizadas são funções de Shepard construídas a partir das duas funções peso descritas na Eq.17 e ilustradas nas Figs. 3 e 4:

$$W : \left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \left(\frac{1 + \xi}{h_\alpha} \right)^2 \right]^n \\ \left[1 - \left(\frac{1 - \xi}{h_\alpha} \right)^2 \right]^n \end{array} \right\} \quad (17)$$



(a)



(b)

Figura 3: Funções Peso C^k , $h_\alpha = 2$ - (a): $n = 2$; (b): $n = 4$

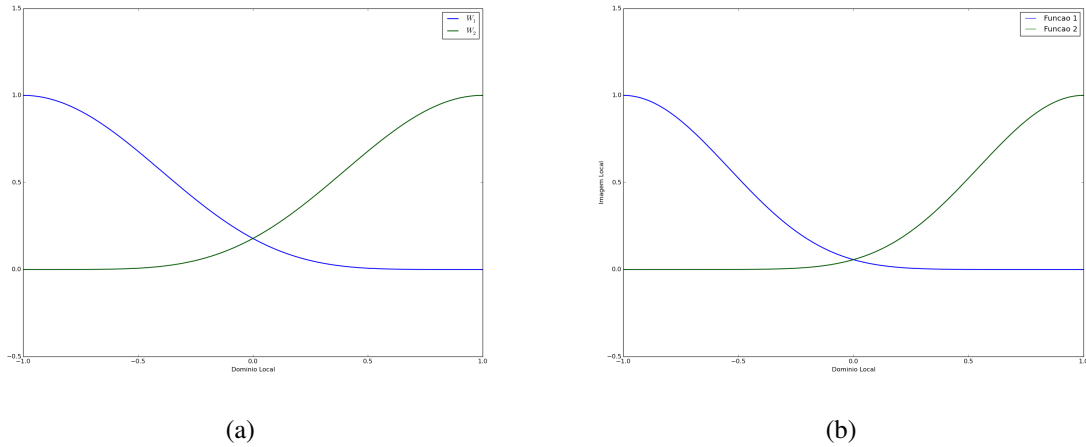


Figura 4: Funções Peso C^k , $h_\alpha = 2$ - (a): $n = 6$; (b): $n = 10$

Considerando o caso desta aplicação unidimensional de malha uniforme, h_α no domínio do elemento mestre corresponde $h_\alpha = 1 - (-1) = 2$. As funções descritas na Eq.18 possuem suporte compacto no domínio do $\Omega_e : (-1, +1)$ do elemento. Pode-se mostrar ainda que essas funções possuem regularidade de ordem n , caso de n ser par, ou de ordem $n - 1$ se n for ímpar. Tais propriedades permitem escrever uma partição da unidade com regularidade C^k , conforme exposto a seguir na Eq.18.

$$S : \left\{ \begin{array}{l} \frac{W_1(\xi)}{(W_1(\xi) + W_2(\xi))} \\ \frac{W_2(\xi)}{(W_1(\xi) + W_2(\xi))} \end{array} \right\} \quad (18)$$

Nas Figs. 5 e 6 apresentam-se as partições da unidade C^k para os casos $n \in \{2, 4, 6, 10\}$

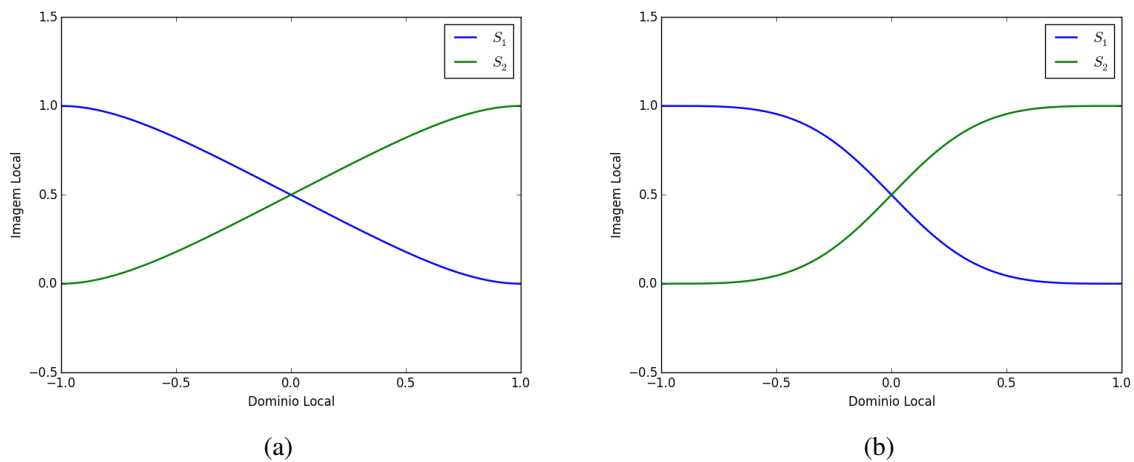


Figura 5: Partição da Unidade C^k - (a): $n = 2$; (b): $n = 4$

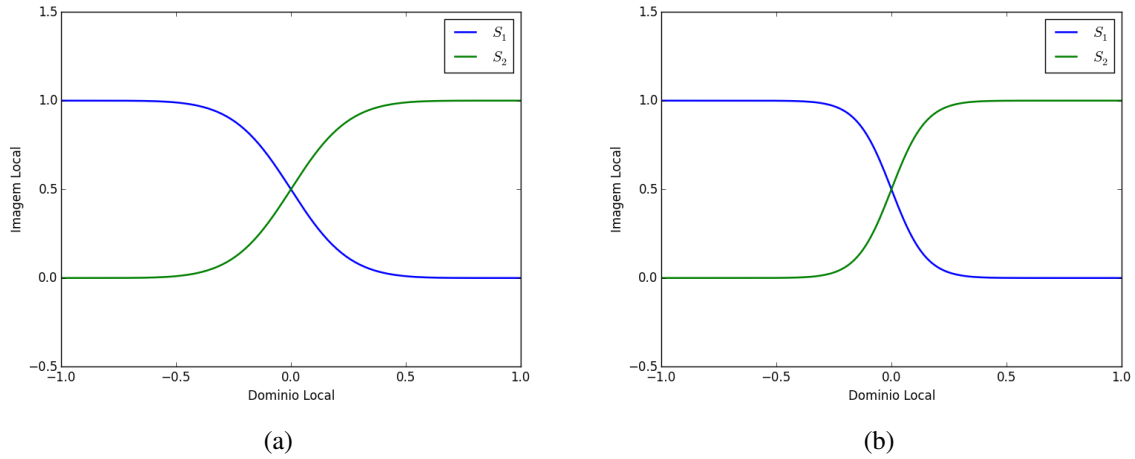


Figura 6: Partição da Unidade C^k - (a): $n = 6$; (b): $n = 10$

PARTIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

A construção da Partição da Unidade Trigonométrica utilizada neste trabalho baseia-se na Relação Trigonométrica Fundamental. Neste caso, como exposto na Eq.19 e ilustrado na Fig.7, pode-se escrever para o domínio $\Omega : (-1, +1)$:

$$T : \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \left(\frac{(\xi + 1)\pi}{4} \right) \\ \sin^2 \left(\frac{(\xi + 1)\pi}{4} \right) \end{array} \right\} \quad (19)$$

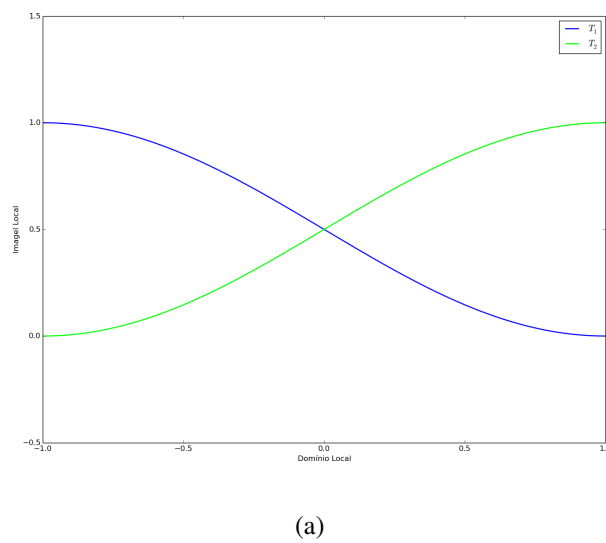


Figura 7: Partição da Unidade Trigonométrica

2.4 PRÉ CONDICIONAMENTO DO ENRIQUECIMENTO

MODIFICAÇÃO BASEADA NO MEFGE

O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE) é proposto como uma alternativa para melhorar o condicionamento numérico do MEFG (Babuška & Banerjee, 2012). Este método consiste na aplicação de uma modificação simples nas funções de enriquecimento antes da sua inclusão no espaço de aproximação do MEFG (Gupta *et al.* (2013); Li (2014)).

No MEFGE, modifica-se localmente as funções de enriquecimento empregadas antes da sua multiplicação pela Partição da Unidade (PU). O processo de modificação consiste no descrito pela Eq.20:

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) - I_\omega(\varphi_i(x)) \quad (20)$$

Onde,

- $\tilde{\varphi}_i$: i-ésima função enriquecedora estabilizada
- φ_i : i-ésima função enriquecedora
- $I_\omega(\varphi_i(x))$: interpolante linear por parte da i-ésima função enriquecedora subordinada ao suporte ω

A estabilização do 1º nível de enriquecimento proposto é ilustrado na Fig.8.

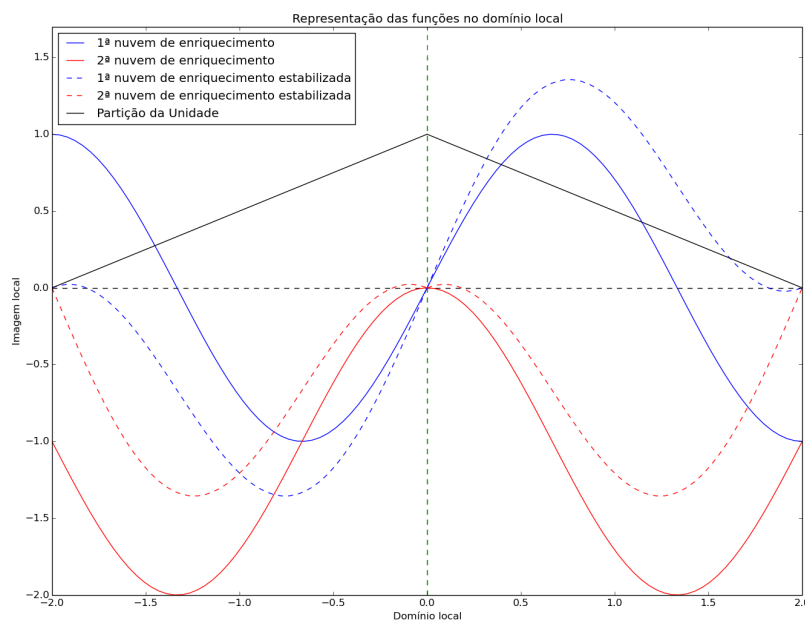


Figura 8: Processo de estabilização das funções do primeiro nível de enriquecimento.

MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA

Segundo Feldman & Feigenbaum (1963), um processo que pode resolver um determinado problema sem a garantia de que realmente irá resolvê-lo é uma heurística. Com esta definição em mente, uma abordagem proposta se baseou na observação de testes numéricos para inferir um processo que reduzisse a sensibilidade do MEFM com enriquecimentos trigonométricos sucessivos.

Assim, o presente trabalho propõe uma alteração no grupo de funções de enriquecimento visando estabilizar sua aplicação sucessiva que visa evitar a construção de espaços de aproximação que tendem a dependência linear. A modificação proposta consiste basicamente na eliminação do parâmetro L_e e um ajuste no parâmetro β_j a cada novo nível de enriquecimento de forma automática. Assim, as funções utilizadas nas aplicações foram escritas no domínio de $\xi \in (-1, +1)$ da seguinte forma:

Nuvem senoidal:

$$\begin{aligned}\gamma_{1j} &= \text{sen}(\beta_j(\xi + 1)) \\ \gamma_{2j} &= \text{sen}(\beta_j(\xi - 1))\end{aligned}\tag{21}$$

Nuvem cossenoidal:

$$\begin{aligned}\varphi_{1j} &= \cos(\beta_j(\xi + 1)) - 1 \\ \varphi_{2j} &= \cos(\beta_j(\xi - 1)) - 1\end{aligned}\tag{22}$$

Parâmetro β_j

$$\beta_j = (2j - \frac{5}{4})\pi\tag{23}$$

3 RESULTADOS

3.1 IMPACTO DA ESCOLHA DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

A primeira análise corresponde ao estudo do impacto da escolha da Partição da Unidade no espectro de frequências. Essa abordagem é feita em duas etapas:

- Impacto da escolha sem enriquecimento
- Impacto da escolha com enriquecimento

Como exposto anteriormente, as alternativas testadas são:

- Lagrange C^0
- C^k com $k \in (2, 4, 6, 10)$
- Trigonométrica C^∞

IMPACTO SEM ENRIQUECIMENTO

A aplicação de elementos lagrangeanos lineares (C^0) é clássica. O resultado para o espectro normalizado de frequências pode ser visto na Fig.9. Observa-se que há boa aproximação para

frequências mais baixas (início do espectro) e uma pior aproximação para frequências mais elevadas (fim do espectro).

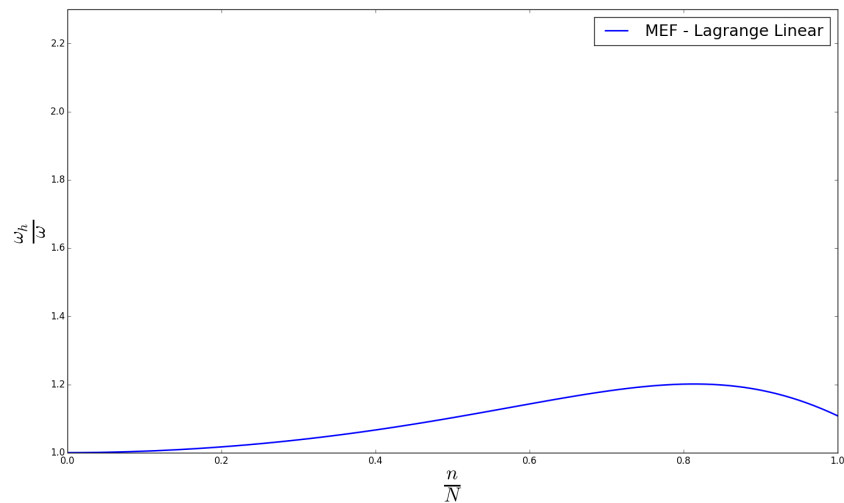


Figura 9: Espectro normalizado de frequências - Lagrange C^0

Conforme exposto anteriormente, a utilização de uma partição da unidade C^k visa aumentar a regularidade do espaço de aproximação e assim produzir mais acurácia em frequências mais elevadas. A Fig.10 mostra que o aumento da regularidade da partição da unidade C^k deteriora a solução aproximada sem enriquecimento.

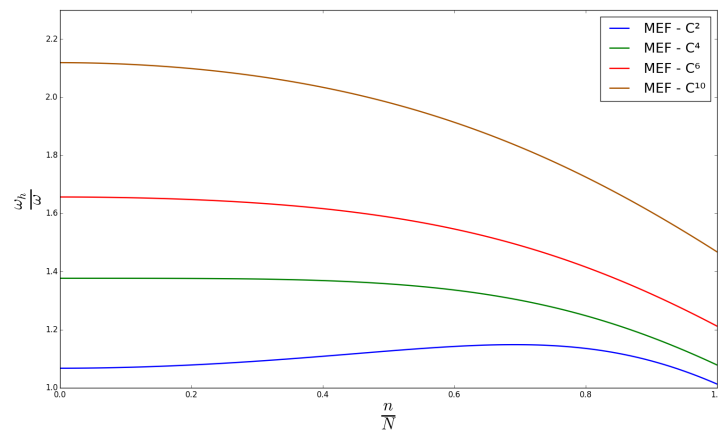


Figura 10: Espectro normalizado de frequências - C^k

Estendendo a hipótese de relação entre a regularidade do espaço de aproximação com a acurácia em trechos do espectro, utiliza-se uma partição da unidade de classe C^∞ especialmente construída com o intuito de ter boa aproximação no trecho final do espectro. Neste caso a escolha em questão implica uma boa aproximação das últimas frequências. Os resultados podem ser atestados na Fig.11.

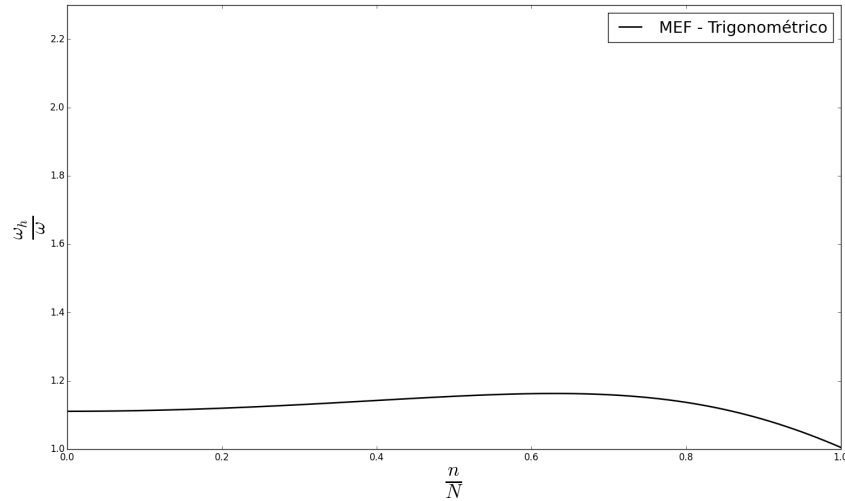


Figura 11: Espectro normalizado de frequências - Trigonométrico C^∞

Pode-se observar a regularidade do espaço de aproximação realmente impacta a construção do espectro de frequências. No entanto, a relação proposta entre regularidade e acurácia ao longo do espectro merece mais estudos para esclarecimentos.

IMPACTO COM ENRIQUECIMENTO

Dando continuidade aos testes de escolha da partição da unidade, aplica-se um nível de enriquecimento trigonométrico descrito pelas equações 15 e 16. O espectro normalizado de frequências é exposto em três gráficos: $\frac{1}{3}$ do espectro, $\frac{2}{3}$ do espectro e a totalidade do espectro. Com essa visualização é possível observar com mais detalhes comportamentos específicos por trecho ao mesmo tempo que contextualizamos ao longo do gráfico.

Primeiramente, note-se que no primeiro terço do espectro (Fig.12), para as partições C^k e a Lagrangiana C^0 , há uma relação inversa entre regularidade da PU e qualidade na aproximação. O espectro resultante da escolha da partição trigonométrica se encaixa entre os espectros de C^2 e C^4 , mantendo bons resultados.

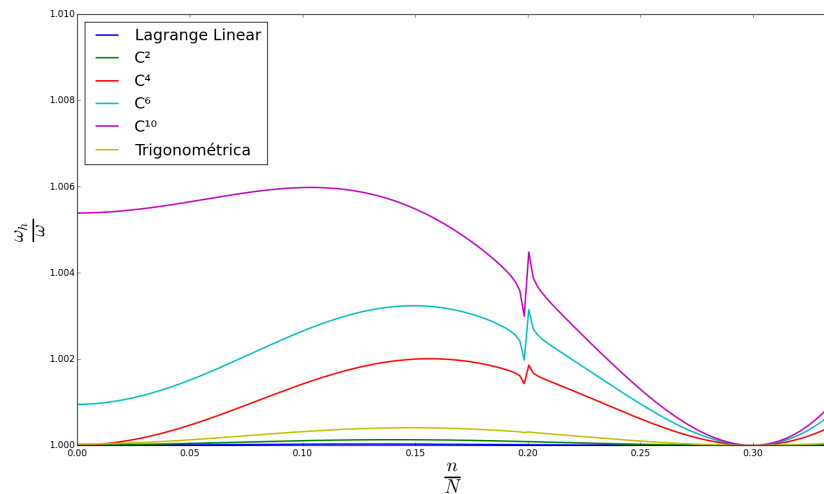


Figura 12: Espectro normalizado de frequências - 1 nível de enriquecimento - $\frac{1}{3}$ do espectro

A medida que o estudo avança para $\frac{2}{3}$ do espectro (Fig.13), nota-se que a escolha da PU trigonométrica passa a ser mais vantajosa que as demais para frequências até $\frac{3}{5}$ do espectro. A escolha da PU Lagrangeana começa a ter sua qualidade de aproximação deteriorada enquanto as escolhas C^4 e C^6 começam a estabilizar. A PU C^{10} piora consideravelmente a acurácia a medida que a PU C^4 apresenta leve melhora.

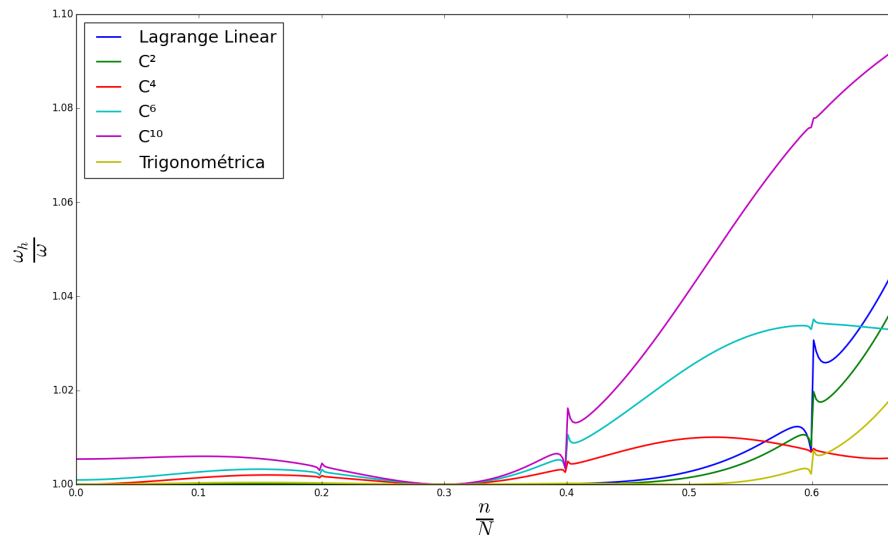


Figura 13: Espectro normalizado de frequências - 1 nível de enriquecimento - $\frac{2}{3}$ do espectro

Finalmente, analisando o trecho final do espectro (Fig.14), podemos notar a perda de qualidade de aproximação para todas as escolhas de PU. No entanto, pode-se notar que há uma ordenação de acurácia para as escolhas de PU C^k , sendo que quanto maior o k , consequentemente maior regularidade, melhor a aproximação do trecho final do espectro.

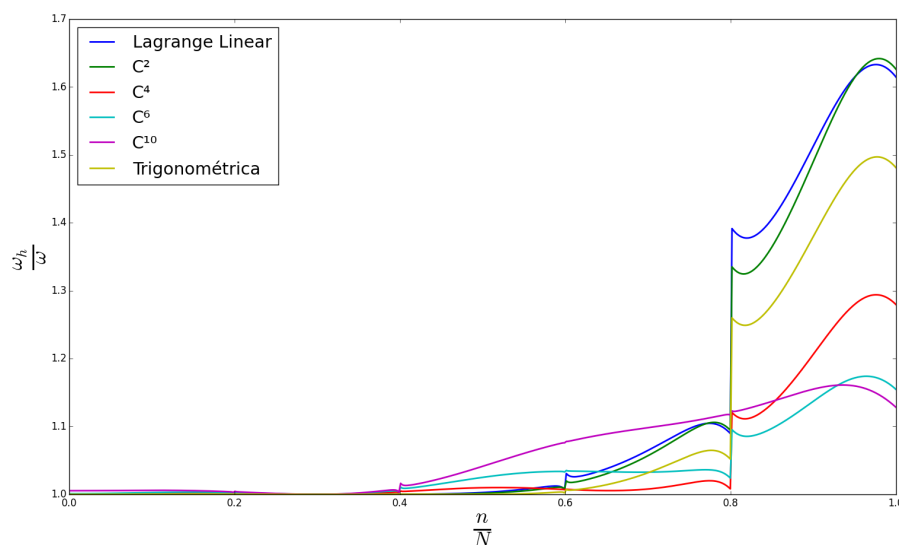


Figura 14: Espectro normalizado de frequências - 1 nível de enriquecimento

3.2 ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO

MODIFICAÇÃO BASEADA NO MEFGE

A sensibilidade da solução numérica da análise modal através da utilização do MEFGE foi constatada por Arndt (2009) e por Torii (2012). Estudos como o de Leung & Zhu (2004) indicam que a estabilidade esteja diretamente ligada com o condicionamento da matriz de massa do sistema.

Visando melhorar o condicionamento das matrizes envolvidas, foi testada a aplicação do conceito do MEFGE. A proposta de estabilização do MEFGE consiste em uma modificação das funções enriquecimento e melhora o condicionamento da matriz resultante (Babuška & Banerjee, 2012).

Testes foram feitos para estudar o impacto da utilização dessa técnica de pré condicionamento no processo de enriquecimento sucessivo do MEFGE com as funções descritas pelas equações 15 e 16, com uma malha de 100 elementos. É possível notar que a acurácia do MEFGE e MEFGE, em relação ao espectro, são bastante próximas.

A medida que são aplicadas camadas de enriquecimento o problema se torna mais sensível. Na quarta camada de enriquecimento os dois métodos atingem um limite de sensibilidade, chegando próximo a encontrar modos espúrios. Avançar com o processo de enriquecimento nesse ponto é possível, mas demanda uma custo computacional alto para realizar as contas com grande precisão e atingir bons resultados nas integrações numéricas.

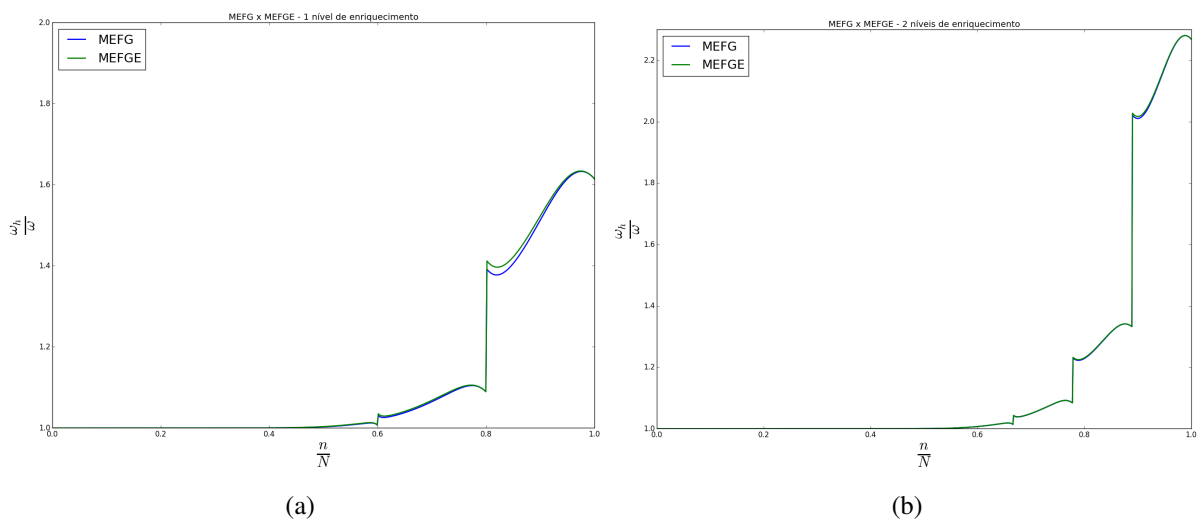


Figura 15: Espectro normalizado de frequências - 1º e 2º níveis de enriquecimento - MEFGE x MEFGE

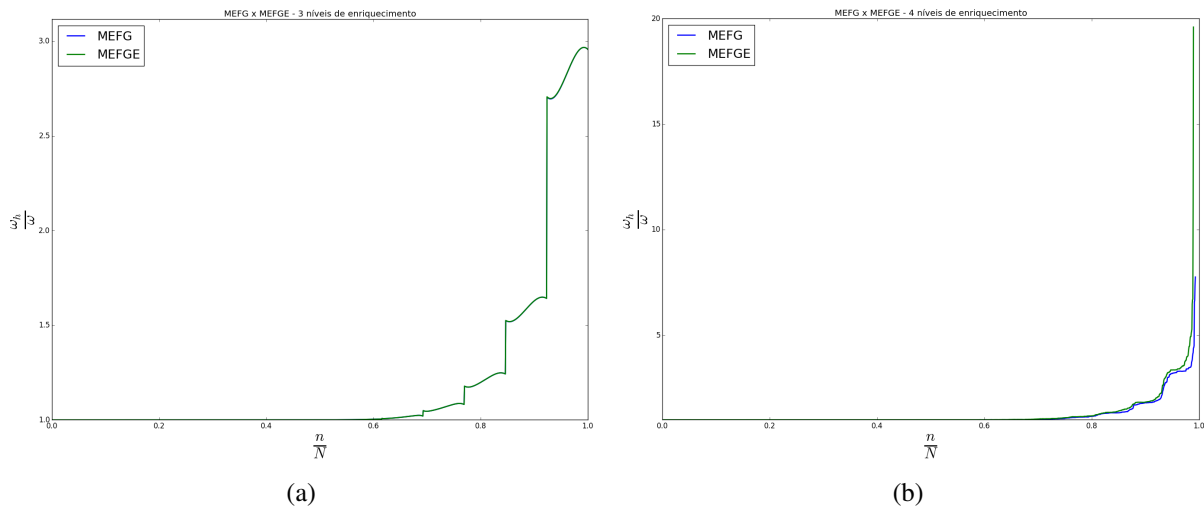


Figura 16: Espectro normalizado de frequências - 3º e 4º níveis de enriquecimento - MEFG x MEFGE

MODIFICAÇÃO HEURÍSTICA

O enriquecimento trigonométrico proposto por Arndt (2009) tem alta acurácia e garante independência linear analítica entre cada nível de enriquecimento. No entanto, os testes apresentam uma dificuldade numérica de avançar para níveis de enriquecimento mais altos sem utilizar uma precisão muito alta e com grande dificuldade de integração numérica.

Baseando-se em diversos testes, resolveu-se tentar um processo de amortização do parâmetro β_j ao longo de cada camada de enriquecimento. Esse processo consiste no descrito pela Eq.23. Os resultados dos testes feitos até a 4ª camada de enriquecimento são expostos nas Figs.17, 18 e 19. O 1º nível de enriquecimento foi omitido em razão das duas abordagens coincidirem para os parâmetros adotados.

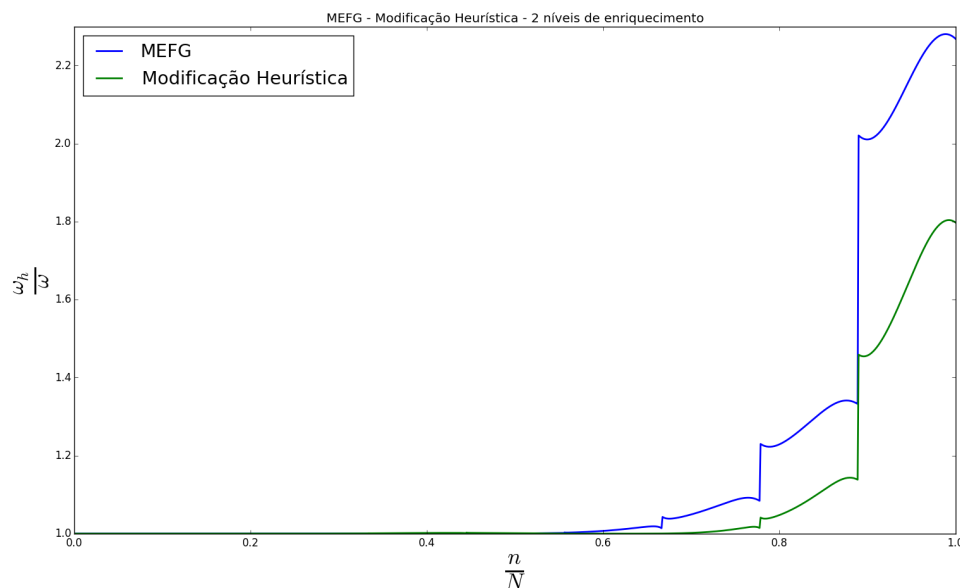


Figura 17: Espectro normalizado de frequências - 2 níveis de enriquecimento - Modificação Heurística

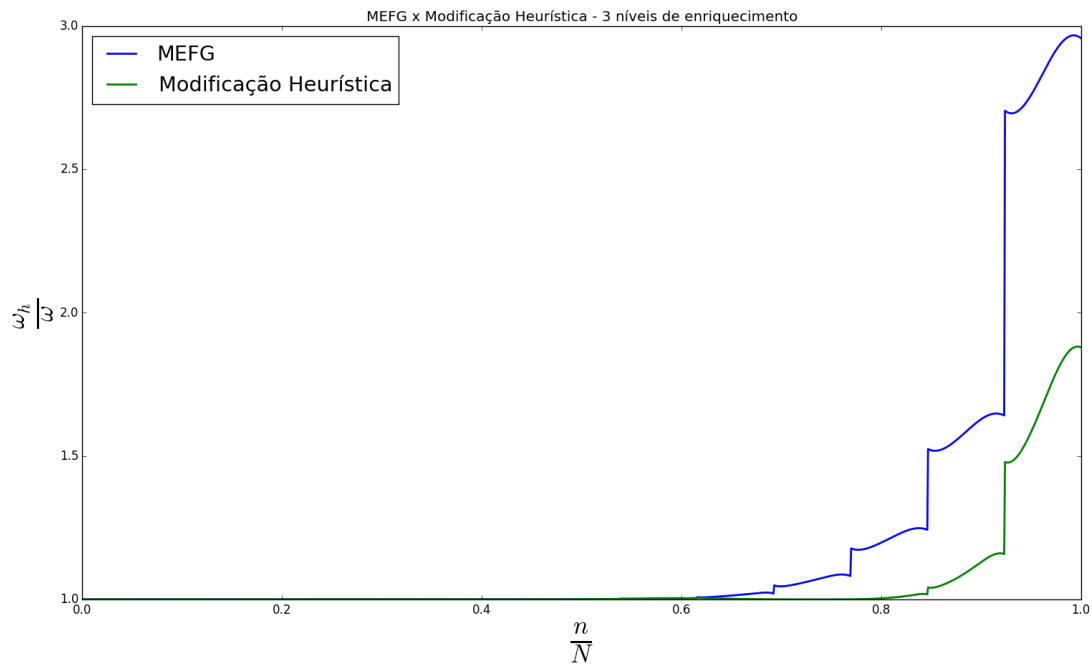


Figura 18: Espectro normalizado de frequências - 3 níveis de enriquecimento - Modificação Heurística

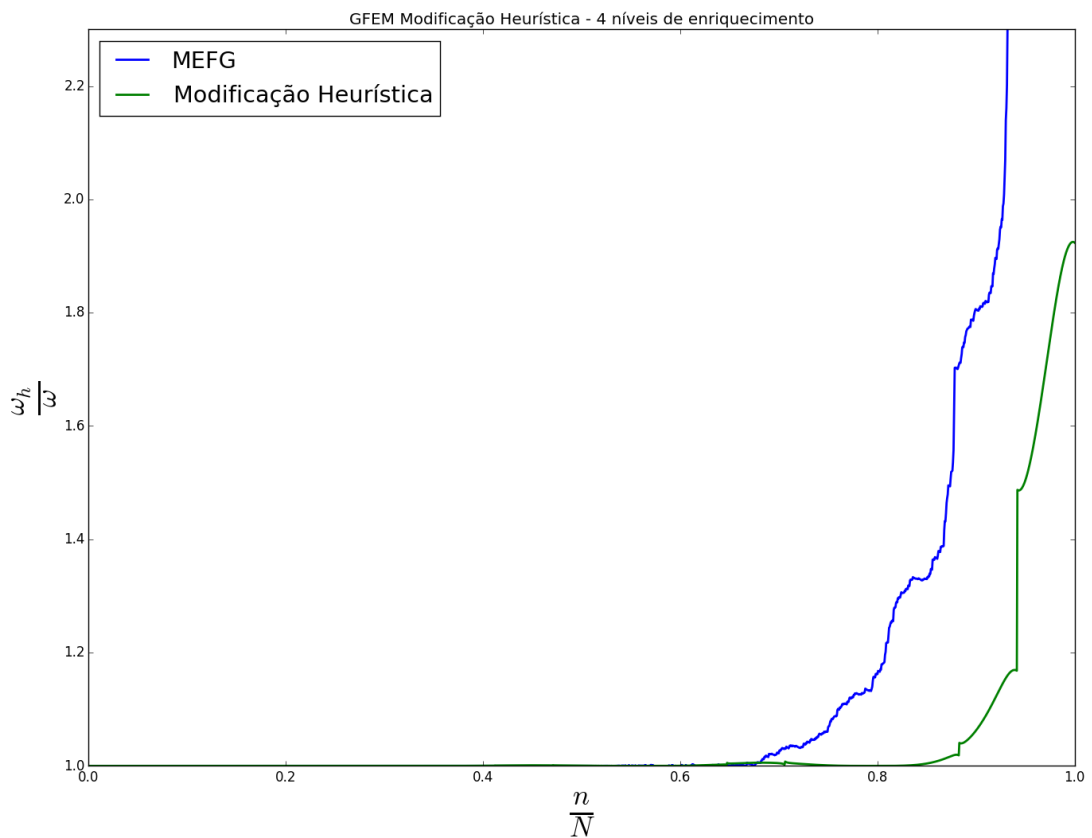


Figura 19: Espectro normalizado de frequências - 4 níveis de enriquecimento - Modificação Heurística

Os testes aqui apresentados se restringem a 4 níveis de enriquecimento, porém o método

foi testado para níveis mais elevados, utilizando apenas precisão dupla, demonstrando a mesma tendência de estabilidade.

Visando embasar a melhora obtida com o processo de estabilização aqui proposto, foram medidos o números de condição da matriz de massa elementar analítica referente aos 10 primeiros níveis de enriquecimento. O comportamento estável resultante desse processo de pré condicionamento é evidente, como pode ser visto na Fig.20.

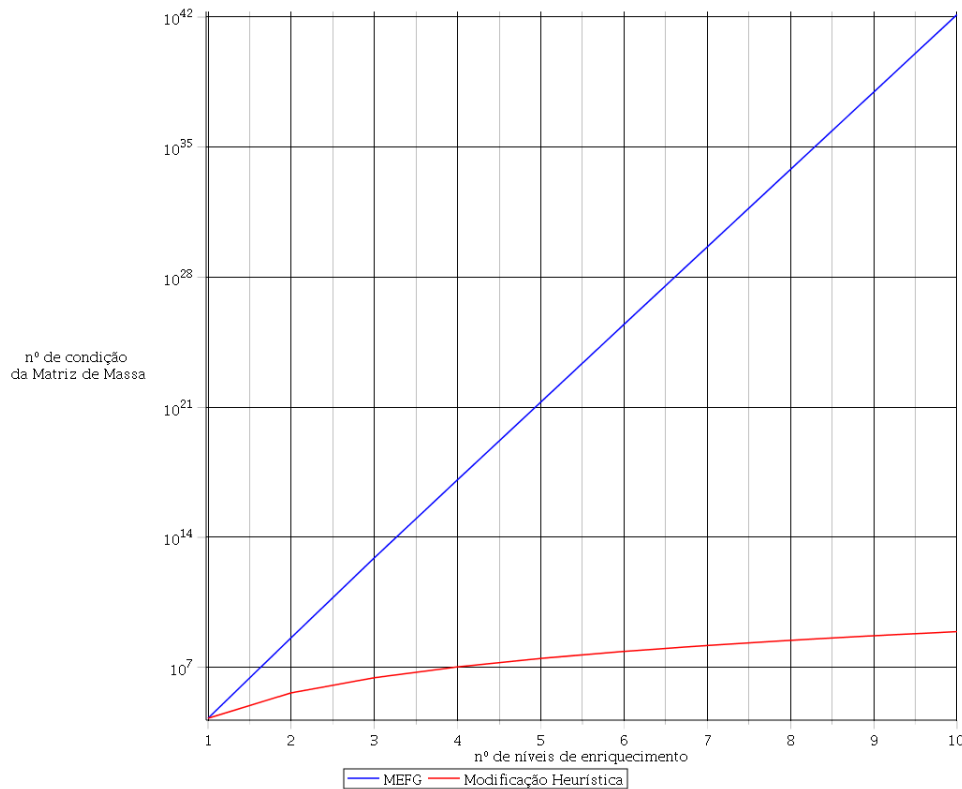


Figura 20: Número de condição da Matriz de Massa Elementar para os dez primeiros níveis de enriquecimento - MEFG x Modificação Heurística

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas duas abordagens visando melhorar características de aproximação e estabilidade do MEFG em análise dinâmica.

Primeiramente foram realizados testes com diferente tipos de partição da unidade com o intuito de relacionar regularidade do espaço de aproximação com a acurácia. Constatou-se que há aplicabilidade da partição da unidade C^k , com regularidade regulável, e da partição da unidade trigonométrica apresentada, com regularidade C^∞ . No entanto, a partição lagrangeana, C^0 , apresentou melhor interação com o tipo de enriquecimento estudado nesse trabalho.

Em um segundo momento foram apresentados testes com duas propostas de estabilização: baseada no MEFGE e heurística. Expôs-se a aplicabilidade do conceito de pré condicionamento do MEFGE à análise modal mantendo-se a acurácia do espectro, apesar de não resolver a questão da estabilidade de enriquecimentos sucessivos da maneira como a estabilização é formulada. A abordagem exige novos estudos para consolidação, principalmente com uma adap-

tação da formulação e aplicação na análise transiente. Por outro lado, a modificação heurística das funções enriquecimento produziu uma estabilização efetiva no contexto de enriquecimentos sucessivos. Houve ganho considerável em termos do condicionamento da matriz de massa do sistema, resultando em boa estabilidade numérica do problema.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro por meio de bolsa de estudo.

REFERÊNCIAS

- Arndt, M., 2009. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Babuška, I. & Banerjee, U., 2012. “Stable generalized finite element method (SGFEM)”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 201, pp. 91–111.
- Bathe, K.J., 1996. *Finite element procedures*. Prentice-Hall.
- Duarte, C.A. & Oden, J.T., 1996. “An h-p adaptive method using clouds”. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 237–262.
- Feldman, J. & Feigenbaum, E.A., 1963. *Computers and Thought*. McGraw-Hill.
- Garcia, O.A., Rossi, R. & Linzmaier, P.R., 2010. “Método de elementos finitos generalizados com alta regularidade na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas”. In C.G.P. VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica 2010, ed., *VI Congresso Nacional e Engenharia Mecânica, 2010*.
- Gupta, V., Duarte, C.A., Babuška, I. & Banerjee, U., 2013. “A stable and optimally convergent generalized fem (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 266, pp. 23–39.
- Leung, A. & Zhu, B., 2004. “Fourier p-elements for curved beam vibrations”. *Thin-walled structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 39–57.
- Li, H., 2014. *Investigation of stability and accuracy of high order generalized finite element methods*. Master’s thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Melenk, J.M., 1995. *On generalized finite element methods*. Ph.D. thesis, The University of Maryland.
- Shang, Y.H., 2014. *Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos de elementos finitos*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
- Torii, A.J., 2012. *Análise dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná.