



DETERMINAÇÃO DE MODELOS DE BAIXA DIMENSÃO PARA A ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE CASCAS CILÍNDRICAS MODELADAS A PARTIR DA TEORIA DE SANDERS

Victor Mariano Maciel

Frederico M A Silva

victorm2maciel@hotmail.com

silvafma@gmail.com

Universidade Federal de Goiás

Av. Universitária, no. 1488, 74605-220, Goiânia, Goiás, Brasil

Resumo. Este trabalho investiga a aplicabilidade de um modelo de baixa dimensão, com três graus de liberdade e com um grau de liberdade, para a obtenção das relações frequência amplitude de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada. O modelo de baixa dimensão com três graus de liberdade consiste em escrever a amplitude dos modos não lineares de cada campo de deslocamento, axial, circunferencial e transversal, da casca cilíndrica em função do seu respectivo modo fundamental de vibração. Já o modelo com um grau de liberdade é obtido escrevendo-se a amplitude de vibração de todos os modos, linear e não linear, de cada campo de deslocamento em função do modo fundamental de vibração transversal da casca cilíndrica. A teoria não linear de Sanders é empregada nos estudos das vibrações livres não lineares. Para resolver as equações diferenciais parciais de equilíbrio, aplica-se o método de Galerkin utilizando-se, para cada modelo de baixa dimensão proposto, os modos lineares de vibração, criando um sistema de equações algébricas não lineares que, por sua vez, é resolvido com o emprego o método de Newton-Raphson. Diversas geometrias de cascas cilíndricas são utilizadas para avaliar a aplicabilidade dos modelos de baixa dimensão propostos neste trabalho.

Palavras chaves. Sanders, modelos de baixa dimensão, cascas cilíndricas.

1 INTRODUÇÃO

As cascas cilíndricas são elementos estruturais comumente utilizadas em diversos tipos de construções: naval, civil, mecânica, aeronáutica e petroquímica, sendo especialmente eficientes quanto ao suporte de cargas axiais e pressões laterais devido à sua configuração geométrica e a interação entre os esforços internos de membrana e de flexão. Como exemplos de aplicações têm-se as torres de resfriamento de usina nucleares, os silos de armazenamento e os reservatórios elevados de água. Estas estruturas podem apresentar geometria simples, todavia quando submetidas a excitações externas a casca cilíndrica apresenta um comportamento não linear bastante complexo.

Diversas teorias foram desenvolvidas a fim de descrever as equações diferenciais não lineares que representam as deformações da casca. A teoria de Sanders é a que será abordada para o desenvolvimento dos modelos reduzidos de baixa dimensão deste trabalho, sendo uma teoria não linear mais refinada em relação à teoria não linear de Donnell, propondo um campo de deformações mais complexo capaz de descrever o comportamento de cascas espessas e sendo considerada mais precisa para análises não lineares (Gonçalves, 1987).

Amabili e Païdoussis (2003) e Alijani e Amabili (2014) fazem uma ampla revisão bibliográfica de pesquisas sobre vibrações não lineares de cascas cilíndricas, abrangendo vários estudos teóricos, numéricos e experimentais abordando problemas particulares dinâmicos que envolvem vibrações paramétricas, estabilidade, deformação dinâmica, vibrações não estacionárias e vibrações caóticas. Além disso, vários aspectos de vibrações não lineares de cascas cilíndricas, incluindo as interações fluido-estrutura, as imperfeições geométricas, efeito da geometria e condições de contorno, cargas térmicas e elétricas, modelos de baixa dimensão, além das técnicas de perturbação, decomposição ortogonal e modos normais não lineares são analisados de forma criteriosa.

Apresentam-se neste trabalho dois modelos de baixa dimensão para a análise das relações frequência amplitude de diversas geometrias de cascas cilíndricas, um modelo com três graus de liberdade e outro com apenas um grau de liberdade. A redução da dimensão, proposta neste trabalho, é obtida a partir da escrita das amplitudes dos modos não lineares de vibração dos campos de deslocamento em função da amplitude do modo linear de vibração. O modelo de baixa dimensão com três graus de liberdade consiste em escrever a amplitude dos modos não lineares de cada campo de deslocamento, axial, circunferencial e transversal, da casca cilíndrica em função do seu respectivo modo fundamental de vibração. Já o modelo com um grau de liberdade é obtido escrevendo-se a amplitude de vibração de todos os modos, linear e não linear, de cada campo de deslocamento em função do modo fundamental de vibração transversal da casca cilíndrica. É importante verificar se os modelos de baixa dimensão não modificam o comportamento não linear da casca cilíndrica devido a consideração incorreta sobre o acoplamento modal, ponto extremamente discutido ao longo dos anos (Chu, 1961; Evensen, 1963, 1967; Nowinski, 1963; Hunt *et al.*, 1986).

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O campo de deformações e mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica, utilizado neste trabalho para a obtenção das equações de equilíbrio não lineares, segue a teoria não linear de Sanders. O material da casca cilíndrica possui comportamento elástico, homogêneo e isotrópico, com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν , densidade ρ , raio R , comprimento L e espessura h . As coordenadas x , θ e z , são associadas,

respectivamente, com os deslocamentos axiais, circunferenciais e laterais da superfície média denotados, respectivamente, por u , v e w conforme a Fig. 1.

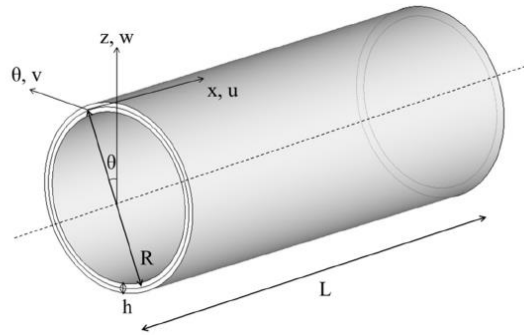


Figura 1: Representação do sistema de coordenadas e geometria da casca cilíndrica

O campo de deformações específicas nas direções axial, circunferencial e a distorção angular de um ponto da superfície média da casca cilíndrica, segundo a teoria não linear de Sanders, é dado por:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2} (w_{,\theta} - v_{,x})^2 \quad (2)$$

$$\gamma_{x\theta} = \varepsilon_{x,\theta} + \varepsilon_{\theta,x} = \frac{1}{R} u_{,\theta} + v_{,x} + \frac{1}{R} w_{,x} (w_{,\theta} - v) \quad (3)$$

As rotações, segundo a teoria não linear de Sanders, são dadas por:

$$\beta_x = -w_{,x} \quad (4)$$

$$\beta_\theta = -\frac{1}{R} (w_{,\theta} - v) \quad (5)$$

Por fim, as mudanças de curvatura, segundo a teoria não linear de Sanders, são dadas por:

$$k_x = -w_{,xx} \quad (6)$$

$$k_\theta = \frac{1}{R^2} (v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}) \quad (7)$$

$$k_{x\theta} = k_{\theta x} = -\frac{w_{,x\theta}}{R} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{R} v_{,x} - \frac{1}{R^2} u_{,\theta} \right) \quad (8)$$

As deformações específicas: axial, circunferencial e a distorção angular, de um ponto qualquer da casca, situado a uma distância z da casca, $-h/2 \leq z \leq h/2$, são dadas por:

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x + z k_x \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + z k_\theta \quad (10)$$

$$\bar{\gamma}_{x\theta} = \gamma_{x\theta} + 2z k_{x\theta} \quad (11)$$

Os esforços de membrana e de flexão são determinados a partir das seguintes integrações:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_x dz, \quad N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_\theta dz \quad \text{e} \quad N_{x\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\tau}_{x\theta} dz \quad (12)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \bar{\sigma}_x dz, \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \bar{\sigma}_\theta dz \quad \text{e} \quad M_{x\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \bar{\tau}_{x\theta} dz \quad (13)$$

sendo $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$ e $\bar{\tau}_{x\theta}$ as tensões: axial, circunferencial e cisalhante, de um ponto qualquer da casca cilíndrica:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_\theta), \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_\theta + \nu \bar{\epsilon}_x) \quad \text{e} \quad \bar{\tau}_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{x\theta} \quad (14)$$

Os esforços de membrana N_x , N_θ e $N_{x\theta}$ e os esforços de flexão, M_x , M_θ e $M_{x\theta}$ em um elemento infinitesimal de uma casca cilíndrica é apresentado na Fig. 2 na sua convenção positiva.

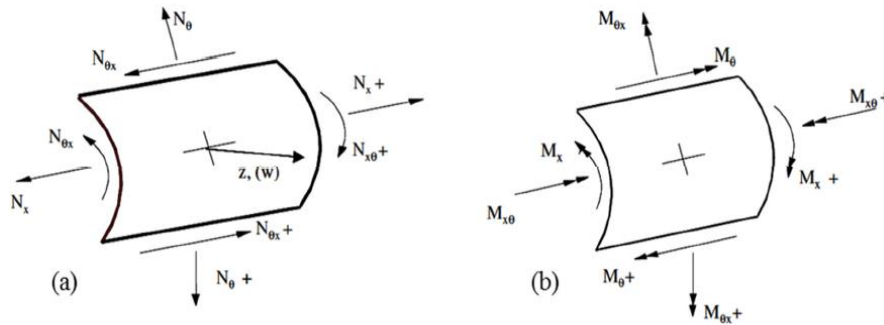


Figura 2: (a) esforços de membrana, (b) esforços de flexão e convenção de sinais na configuração deformada (Silva, 2008)

A partir do somatório de forças e de momentos de um elemento infinitesimal e deformado da casca cilíndrica, obtêm-se as equações não lineares de equilíbrio de uma casca cilíndrica, a saber:

$$N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} - \frac{1}{2R^2} M_{x\theta,\theta} + \rho h \ddot{u} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{R} N_{\theta,\theta} + N_{x\theta,\theta} - \frac{1}{R} (N_\theta \beta_\theta + N_x \beta_x) + \frac{1}{2R} M_{x\theta,x} + \frac{1}{R^2} (M_{\theta,\theta} + R M_{x\theta,x}) - \rho h \ddot{v} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} N_\theta + [N_x \beta_x + N_{x\theta} \beta_\theta]_{,x} + \frac{1}{R} (N_\theta \beta_\theta + N_{x\theta} \beta_x)_{,\theta} - \frac{1}{R} (M_{x\theta,\theta} + R M_{x,x})_{,x} \\ & - \frac{1}{R^2} (M_{\theta,\theta} + R M_{x\theta,\theta})_{,\theta} - \rho h \ddot{w} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Considera-se que a casca cilíndrica apresenta módulo de elasticidade $E = 210$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e densidade $\rho = 7850$ kg/m³. Quanto ao campo de deslocamentos empregado neste trabalho, Gonçalves (1987), a partir da aplicação de técnicas de perturbação, propõe os seguintes campos de deslocamentos (u , v e w) para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada:

$$\begin{aligned} u = & U_0 \cos^2(\omega t) \left(\sin(2q\xi) + \frac{1}{2} \sin(4q\xi) \right) + U_1 \cos(\omega t) \cos(q\xi) \cos(n\theta) \\ & + U_2 \cos^2(\omega t) \cos(2n\theta) \left(\sin(2q\xi) + \frac{1}{2} \sin(4q\xi) \right) + U_3 \cos^3(\omega t) \cos(3q\xi) \cos(n\theta) \\ & + U_4 \cos^5(\omega t) \cos(5q\xi) \cos(n\theta) + U_5 \cos^6(\omega t) \left(\sin(6q\xi) + \frac{3}{4} \sin(8q\xi) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v = & V_1 \cos(\omega t) \sin(q\xi) \sin(n\theta) + V_2 \cos^2(\omega t) \sin(2n\theta) (\cos(2q\xi) - 1) \\ & + V_3 \cos^3(\omega t) \sin(3n\theta) \sin(n\theta) + V_4 \cos^5(\omega t) \sin(5q\xi) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (19)$$

$$w = W_0 \cos^2(\omega t) \left(\cos(2q\xi) - \frac{1}{4} \cos(4q\xi) - \frac{3}{4} \right) + W_1 (\omega t) \sin(q\xi) \cos(n\theta) \quad (20)$$

onde ω representa a frequência natural da casca cilíndrica, $q = m \pi R/L$, $\xi = x/R$ e U_i , $i = (0, \dots, 5)$, V_j , $j = (1, \dots, 4)$ e W_k , $k = (0, 1)$ são as amplitudes modais.

Substituindo-se os campos de deslocamentos u , v e w , Eq. (18)-(20), nas Eq. (12)-(13) chegam-se as resultante dos esforços de membrana e de flexão que, por sua vez, são substituídas no sistema de equações de equilíbrio da casca cilíndrica, Eq. (15)-(17). Em seguida, para a obtenção de um sistema algébrico não linear, aplica-se o método de Galerkin-Urabe na seguinte forma:

$$u_i = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^l E q(17) \cdot \delta u_i \, dx \, d\theta \, dt \quad (21)$$

$$v_j = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^l E q(18) \cdot \delta v_j \, dx \, d\theta \, dt \quad (22)$$

$$w_k = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^l E q(19) \cdot \delta w_k \, dx \, d\theta \, dt \quad (23)$$

onde u_i , v_j e w_k são, respectivamente, as equações não lineares obtidas para cada função peso δu_i , δv_j e δw_k , dada pelo produto das funções harmônicas de cada modo presente no campo de deslocamento.

Por fim, após a aplicação do método de Galerkin-Urabe, têm-se um sistema com doze equações algébricas cuja solução é encontrada a partir do método de Newton-Raphson para se determinar as amplitudes modais e a frequência de vibração não linear do sistema.

Para a determinação da frequência natural de vibração com seu respectivo modo de vibração (m, n), o sistema de equações deve ser linearizado.

Neste trabalho são analisadas nove geometrias diferentes como apresentado na Tab. 1. Percebe-se a partir desta tabela que a frequência natural diminui com o incremento da relação L/R (geometrias de 1 a 5). Já com o decréscimo da relação R/h a frequência natural sofre um acréscimo (geometrias de 6 a 9). Para cada geometria analisada o modo de vibração apresentado, na Tab. 1, será utilizado para a obtenção das relações frequência-amplitude.

Tabela 1: Geometrias analisadas e suas respectivas frequências naturais e modos de vibração

Geometrias	R (m)	L (m)	h (m)	ω (rad/s)	(m, n)
1	0,1	0,025	0,001	50606	(1,6)
2		0,05		25354	(1,9)
3		0,1		12652	(1,7)
4		0,2		6330	(1,5)
5		0,4		3232	(1,4)
6		0,1	0,00025	6253	(1,10)
7			0,00050	8884	(1,8)
8			0,002	18166	(1,6)
9			0,004	25026	(1,4)

A Figura 3 apresenta o espectro de frequências naturais para uma casca cilíndrica de raio $R = 0.1\text{m}$, espessura $h = 0.001\text{m}$ e comprimento $L = 0.2\text{m}$ (Geometria 4). Observa-se a partir desta figura que o modo de vibração associado a frequência natural ocorre para uma semi-onda longitudinal, repetindo a mesma constatação para as demais geometrias.

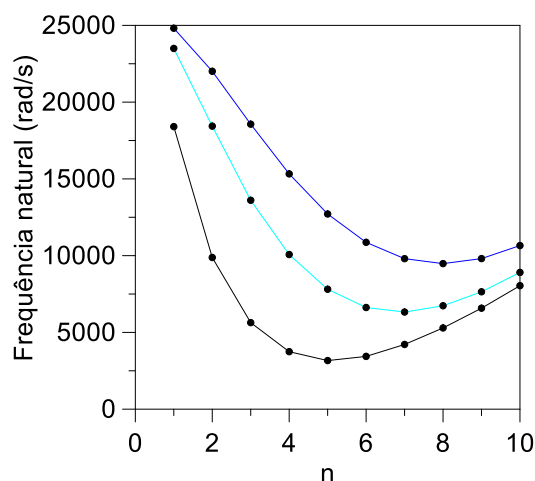


Figura 3: Variação da frequência natural com o modo de flambagem (m, n)

A Figura 4 apresenta a relação frequência-amplitude da casca cilíndrica de raio $R = 0.1\text{m}$, espessura $h = 0.001\text{m}$ e comprimento $L = 0.2\text{m}$ (Geometria 4). No eixo horizontal estão os valores das frequências naturais enquanto no eixo vertical apresentam-se os deslocamentos do ponto de coordenadas $(x, \theta) = (L/2, 0)$ da casca cilíndrica. Nesta figura, a curva de cor preta representa os resultados obtidos a partir da solução do sistema não linear de doze graus de liberdade oriundo da aplicação do método de Galerkin-Urabe. Observa-se, para esta

geometria, que a não linearidade da casca cilíndrica é do tipo *softening*, quando ocorre perda rigidez com o incremento dos deslocamentos.

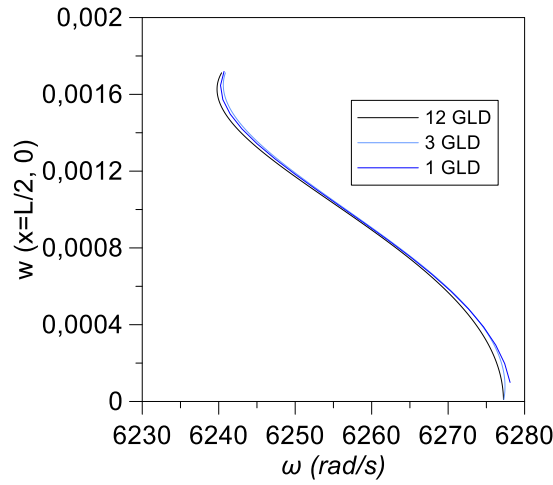


Figura 4: Relação frequência-amplitude. Geometria 4

Observam-se na expansão modal, dada pelas Eq. (18)-(20), que os modos associados às amplitudes U_1 , V_1 e W_1 são os modos lineares de vibração da casca cilíndrica. O modelo de baixa dimensão com três graus de liberdade, propostos neste trabalho, reduz o problema subordinando as amplitudes modais de cada direção: axial circunferencial e transversal, às respectivas amplitudes modais dos modos lineares (Gonçalves, 1987; Silva, 2008). A partir dos resultados encontrados para o sistema com doze graus de liberdade, a subordinação entre as coordenadas é obtida a partir de polinômios interpoladores, a saber:

$$U_0 = 3,31 \cdot 10^5 U_1^3 - 4,56 \cdot 10^2 U_1^2 + 5,17 \cdot 10^{-4} U_1 \quad (24)$$

$$U_2 = 2,127 \cdot 10^5 U_1^3 - 2,637 \cdot 10^2 U_1^2 + 3,266 \cdot 10^{-4} U_1 \quad (25)$$

$$U_3 = 2,115 \cdot 10^6 U_1^3 + 2,454 \cdot 10^1 U_1^2 + 6,206 \cdot 10^{-4} U_1 \quad (26)$$

$$U_4 = 7,76 \cdot 10^8 U_1^4 - 4,442 \cdot 10^5 U_1^3 + 2,895 U_1^2 + 4,271 \cdot 10^{-5} U_1 \quad (27)$$

$$U_5 = -4,489 \cdot 10^8 U_1^4 - 1,2722 \cdot 10^4 U_1^3 - 5,445 \cdot 10^{-1} U_1^2 - 8,427 \cdot 10^{-6} U_1 \quad (28)$$

$$V_2 = 3,553 \cdot 10^2 V_1^3 - 6,851 \cdot 10^1 V_1^2 + 8,598 \cdot 10^{-6} U_1 \quad (29)$$

$$V_3 = -1,3631 \cdot 10^4 V_1^3 + 1,653 \cdot 10^{-2} V_1^2 + 1,619 \cdot 10^{-6} U_1 \quad (30)$$

$$V_4 = 7,825 \cdot 10^3 V_1^3 - 1,244 \cdot 10^{-2} V_1^2 - 1,23 \cdot 10^{-6} U_1 \quad (31)$$

$$W_0 = -1,05 \cdot 10^2 W_1^3 + 3,53 \cdot 10^1 W_1^2 - 5,27 \cdot 10^{-5} W_1 \quad (32)$$

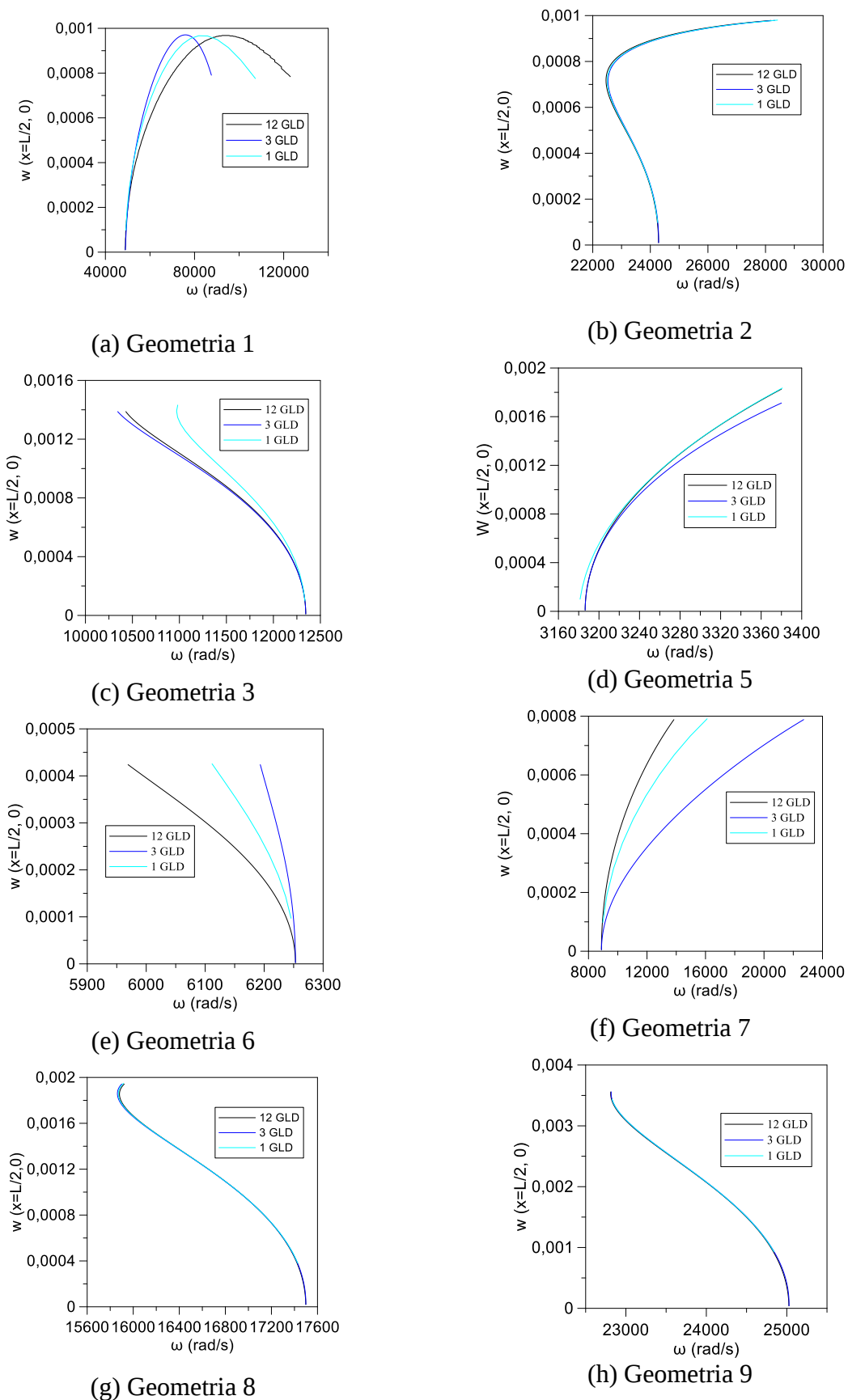


Figura 5: Relações frequência-amplitude para as diversas geometrias analisadas

Já o modelo de baixa dimensão com um grau de liberdade reduz o problema subordinando todas as amplitudes modais à amplitude modal do modo linear dos deslocamentos transversais. Para a Geometria 4, têm-se os seguintes polinômios interpoladores:

$$U_0 = -5,77 W_1^3 - 1,22 W_1^2 + 2,88 \cdot 10^{-6} W_1 \quad (33)$$

$$U_1 = 2,31 \cdot 10^2 W_1^3 - 1,04 \cdot 10^{-3} W_1^2 - 5,04 \cdot 10^{-2} W_1 \quad (34)$$

$$U_2 = 1,07 W_1^3 - 7,08 \cdot 10^{-1} W_1^2 + 6,14 \cdot 10^{-7} W_1 \quad (35)$$

$$U_3 = -2,33 \cdot 10^2 W_1^3 - 3,34 \cdot 10^{-3} W_1^2 + 1,65 \cdot 10^{-6} W_1 \quad (36)$$

$$U_4 = -2,36 \cdot 10^2 W_1^4 + 6,68 \cdot 10^1 W_1^3 - 2,61 \cdot 10^{-4} W_1^2 + 7,17 \cdot 10^{-8} W_1 \quad (37)$$

$$U_5 = -2,17 \cdot 10^3 W_1^4 - 1,24 \cdot 10^{-1} W_1^3 + 1,02 \cdot 10^{-4} W_1^2 - 3,10 \cdot 10^{-8} W_1 \quad (38)$$

$$V_1 = 2,70 \cdot 10^1 W_1^3 - 1,74 \cdot 10^{-3} W_1^2 - 2,03 \cdot 10^{-1} W_1 \quad (39)$$

$$V_2 = -8,81 \cdot 10^{-3} W_1^3 - 2,83 W_1^2 - 1,50 \cdot 10^{-9} W_1 \quad (40)$$

$$V_3 = 1,14 \cdot 10^2 W_1^3 + 1,54 \cdot 10^{-3} W_1^2 - 7,60 \cdot 10^{-7} W_1 \quad (41)$$

$$V_4 = -2,50 \cdot 10^2 W_1^4 - 6,64 \cdot 10^1 W_1^3 + 2,81 \cdot 10^{-4} W_1^2 + 7,73 \cdot 10^{-8} W_1 \quad (42)$$

$$W_0 = -1,05 \cdot 10^2 W_1^3 + 3,53 \cdot 10^1 W_1^2 - 5,27 \cdot 10^{-5} W_1 \quad (43)$$

Após a obtenção dos polinômios interpoladores a aplicação do método de Galerkin-Urabe se restringe a três equações (u_1 , v_1 e w_1 —Eq. (21)-(23)) caso o modelo de baixa de dimensão seja o de três graus de liberdade. Ou a uma única equação, w_1 (Eq.(23)), caso o modelo de baixa dimensão seja o de um grau de liberdade.

A relação frequência-amplitude obtida para a Geometria 4 e para cada modelo de baixa dimensão está ilustrada na Fig. 4, onde a curva azul ilustra o modelo com três graus de liberdade e a curva verde o modelo com um grau de liberdade. Observa-se, a partir da Fig. 4, que a não linearidade da casca cilíndrica é mantida e os resultados são satisfatórios para amplitudes de deslocamentos próximas a espessura da casca cilíndrica.

Para todas as geometrias analisadas foram obtidos os polinômios interpoladores para a determinação dos modelos de baixa dimensão. A Fig. 5 apresenta as relações frequências-amplitudes para as diferentes geometrias analisadas neste trabalho e para os diferentes modelos de baixa dimensão. De modo geral observa-se que o comportamento não linear da casca cilíndrica é mantido independentemente do modelo de baixa dimensão empregado e que os modelos de baixa dimensão apresentam boa precisão quando comparados com o modelo de doze graus de liberdade, a exceção das Fig. 5(e) e Fig. 5(f) que apresentam uma elevada relação R/h .

4 CONCLUSÕES

Este trabalho investigou a aplicabilidade de um modelo de baixa dimensão, com três graus de liberdade e com um grau de liberdade, para a obtenção das relações frequência amplitude de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada. Foram propostos dois modelos de baixa dimensão: um com três graus de liberdade e outro com um grau de liberdade. Ambos os

modelos consistiram em escrever a amplitude dos modos não lineares em função do modo linear de vibração. A casca cilíndrica foi descrita segundo a teoria não linear de Sanders.

Diversas relações frequência-amplitude para diferentes geometrias foram obtidas sendo possível inferir que o método de redução da dimensão do problema apresentou-se bastante fiel ao método convencional – o comportamento não linear e os valores permaneceram bastante próximos para a maioria das geometrias analisadas neste trabalho, indicando que é possível reduzir a dimensão do problema sem afetar o comportamento global.

Este trabalho encontra-se em andamento e trabalhos futuros para avaliar a aplicabilidade do método de coordenadas escravas para o estudo das vibrações forçadas estão em andamento.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível graças ao apoio do Ministério da Educação - CAPES, CNPq e FAPPEG.

REFERÊNCIAS

Alijani, F., Amabili, M., 2014. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 58; pp. 233-257.

Amabili, M., & Paidoussis, M. P., 2003. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shell and panels, with and without fluid-structure interaction. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, pp. 349-381.

Chu, H. N., 1961. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of thin circular cylindrical shells. *Journal of Aerospace Science*, vol. 58, pp. 302-609.

Evensen, D. A., 1963. Some observations on the nonlinear vibrations of thin cylindrical shells. *AIAA Journal*, vol. 1, pp. 2857-2858.

Evensen, D. A., 1967. Nonlinear flexural vibrations of thin-walled circular cylinders. *NASA TN*, D-4090.

Gonçalves, P. B., 1987. *Interação dinâmica não-linear entre fluido e cascas delgadas*. Tese de Doutorado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Hunt, G. W., Williams, K. A. J. & Cowell, R. G., 1986. Hidden symmetry concepts in the elastic buckling of axially-loaded cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 22, pp. 1501-1515.

Nowinski, J. L., 1963. Nonlinear transverse vibration of orthotropic cylindrical shells. *AIAA Journal*, vol. 1, pp. 617-620.

Silva, F. M. A., 2008. *Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não-lineares e estabilidade de cascas cilíndricas*. Tese de Doutorado em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.