



ESTABILIDADE DINÂMICA DE TRELIÇAS PLANAS

Kaio César B. Benedetti

Frederico M. A. Silva

kaio.civil@gmail.com

silvafma@ufg.br

Universidade Federal de Goiás

Av. Universitária, no. 1488, 74605-220, Goiânia, Goiás, Brasil

Resumo. A aplicação de treliças planas na engenharia estrutural ocorre nas mais diferentes aplicações, sendo a cobertura de grandes espaços, ou colunas treliçadas, algumas de suas aplicações. Neste tipo de aplicação, as treliças apresentam uma resposta altamente não linear na presença de cargas estáticas e dinâmicas, mesmo para baixos níveis de carregamento. Neste trabalho apresenta-se uma formulação analítica não linear para uma treliça plana. Analisa-se a perda de estabilidade e as vibrações não lineares destas estruturas sob cargas estáticas e dinâmicas. Diversas estratégias numéricas são traçadas para a obtenção das respostas no tempo e planos fase, diagramas de bifurcação e bacias de atração. Os resultados mostram a importância da não linearidade geométrica na dinâmica e na estabilidade desta classe de estruturas.

Palavras-chaves: treliça, dinâmica, estabilidade, análise não linear.

1 INTRODUÇÃO

Os colapsos de estruturas de engenharia civil se enquadram em duas categorias. O primeiro tipo, lecionado em disciplinas de resistência dos materiais e mecânica estrutural, consiste na avaliação da ruptura dos materiais das estruturas. É estudado de forma independente da geometria, sendo as equações de equilíbrio escritas na configuração indeformada. O segundo tipo, em contraste com o primeiro, consiste em avaliar a estabilidade estrutural. A geometria e o tamanho da estrutura são considerados de forma independente da resistência dos materiais. São requeridas equações de equilíbrio na posição deformada da estrutura, e como esta configuração é geralmente desconhecida, mas dependente das equações de deflexão da estrutura, sua solução é em princípio não linear (Bažant; Cedolin, 2010).

Flambagem de sistemas treliçados ou pórticos é, sem dúvida alguma, um problema de grande importância para engenharia civil e estrutural, sendo também encontrado na engenharia mecânica e aeroespacial. Nesses sistemas, a flambagem global implica em flambagem dos membros individuais. A principal dificuldade enfrentada se deve no comportamento conjunto, onde a carga axial de um membro influencia não apenas sua carga crítica, mas também dos membros adjacentes. Tal problema é frequentemente subestimado devido a sua dificuldade, o que leva a erros graves na análise da estabilidade estrutural (Bažant; Cedolin, 2010).

Toklu (2004) observa que o princípio de mínima energia potencial determina que a configuração de equilíbrio estável implica em um mínimo local do potencial de energia. Apesar de ser abordado em praticamente todos os livros de análise estrutural, não é muito explorado exceto em casos particulares. Dessa forma Toklu (2004) propõe um algoritmo de análise através da energia potencial, mostrando que sua aplicação em treliças é interessante, permitindo a análise antes e após a perda de estabilidade.

Greco e Venturini (2006) apresentam uma alternativa de análise de estabilidade estrutural de estruturas treliçadas, baseada no método dos elementos finitos. Cinco estruturas são estudadas como exemplo, identificando cargas críticas, pontos limites e caminhos de deslocamento *versus* carregamento. Tal formulação pode ser utilizada para analisar casos de grave comportamento não-linear geométrico, incluindo problemas de estruturas após a flambagem.

A mudança do equilíbrio do caminho primário quando este cruza outro caminho, ou seja, a partir da carga crítica, é chamada bifurcação (Croll e Walker, 1972). Introduzido por Poincaré em 1885, este termo refere-se a mudança qualitativa da estrutura topológica do retrato de fases de um sistema dinâmico. Bifurcações são classificadas pela sua codimensão: quantidade de parâmetros a serem analisados. Para sistemas de codimensão um, quatro bifurcações locais podem ocorrer: sela-nó, transcritical, forquilha e Hopf. Duas outras bifurcações globais existem: homoclínica e heteroclínica, onde trajetórias são completamente destruídas (Monteiro, 2011).

Um tipo de instabilidade importante pode ocorrer devido a uma bifurcação global. Tal comportamento é denominado salto dinâmico, característico de arcos e cascas. O valor crítico é aqui denominado de ponto limite, a partir do qual a estrutura “salta” para outra configuração, geralmente distante da anterior (Bažant, 2000). A nomenclatura “bifurcação global” se justifica pela impossibilidade de prever tais comportamentos por análises locais como o cálculo de autovalores (Monteiro, 2011). Nesse caso, outros métodos são requisitados, como o método de Melnikov (Monteiro, 2011).

Diversos autores estudaram a resposta dinâmica de uma treliça de Von Mises. Kwasniewski (2009) obteve os caminhos de equilíbrio de diversas configurações iniciais, comparando resultados de sistemas abatidos e de altura elevada. Constatou-se que, além do caminho primário de equilíbrio, podem existir dois ou três caminhos secundários, sendo os últimos todos instáveis, descrevendo deslocamentos assimétricos da treliça. Kassimali e Bidhendi (1987) investigaram a estabilidade de uma treliça com dois elementos e um domo geodésico, bem como suas deformações, sujeitos a três tipos de cargas dinâmicas: degrau, triangular e cargas sinusoidais. Curvas carga *versus* deformação foram traçadas, comparando o efeito dinâmico sobre a carga crítica.

Savi *et al.* (2002) estudaram treliças de Von Mises compostas por materiais com memória de forma, sujeitas a gradientes de temperatura, investigando vibrações livres e forçadas. Diagramas de bifurcação foram construídos e atratores estranhos foram observados, constatando a riqueza de comportamentos dinâmicos. Em baixas temperaturas a não linearidade do material se sobressai, enquanto que em altas temperaturas a não linearidade cinemática prevalece.

Savi *et al.* (2002) explicam também que a análise de treliças de Von Mises é essencial para definir as características de estabilidade principais de pórticos, arcos, treliças ou qualquer outro fenômeno físico associado à bifurcação por flambagem. A generalização dessa treliça, permitindo uma estrutura não simétrica com barras diferentes entre si, permite que fenômenos não lineares estejam ainda mais presentes. Serão descritas as equações de movimento da treliça (Fig. 1), sendo realizada uma extensa análise paramétrica de estabilidade dinâmica. Caminhos pós críticos, diagramas de bifurcação e bacias de atração serão apresentados para duas condições de geometria distintas, identificando similaridades ou divergências entre as respostas encontradas.

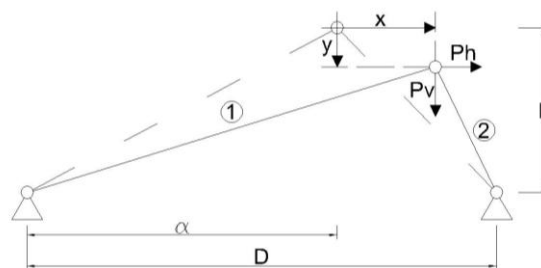


Figura 1. Treliça de Von Mises generalizada

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A treliça de Von Mises analisada consiste em duas barras de diferentes rigidez, em geometria não simétrica, sujeita a uma carga pontual no nó deslocável (Fig. 1). A energia potencial (Π) do sistema é definida em termos da energia de deformação interna (U) e do trabalho das cargas externas (V), como apresentado na Eq. (1). É então estabelecido a variação da energia potencial como sendo a diferença entre a energia estática e dinâmica, apresentado na Eq. (2).

$$\Pi = U - V \quad (1)$$

$$\Delta\Pi = \Pi_d - \Pi_e \quad (2)$$

Estabelece-se o lagrangeano (3) como a diferença entre a variação da energia cinética (ΔT) e a variação da energia potencial total ($\Delta\Pi$). Pode-se então aplicar a equação de Euler-Lagrange (4) para a definição das equações de movimento do sistema não conservativo.

$$L = \Delta T - \Delta\Pi \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -Q_j \quad (4)$$

Onde q_j representa as coordenadas generalizadas e Q_j é uma força não conservativa. Para o estudo da treliça q_j representará as coordenadas do sistema e Q_j será considerado como um amortecimento viscoso.

Para treliças planas, a energia interna U pode ser considerada função apenas das deformações axiais, enquanto que o trabalho das cargas externas é resultante da multiplicação da carga pelo deslocamento no sentido desse carregamento. As equações de energia interna e trabalho externo são então definidas em (5):

$$U = \sum_{j=1}^2 \frac{E_j A_j}{2l_j} \delta_j^2; V = P_v \cdot y + P_h \cdot x \quad (5)$$

Onde E_j , A_j , l_j e δ_j são, respectivamente, o módulo de elasticidade, a área da seção transversal, o comprimento inicial e o alongamento axial da j -ésima barra. Chega-se então a energia potencial total do sistema:

$$\Pi = \frac{E_1 A_1}{2l_1} \delta_1^2 + \frac{E_2 A_2}{2l_2} \delta_2^2 - P_v \cdot y - P_h \cdot x \quad (6)$$

Onde l_1 e l_2 são definidos em (7), e δ_1 e δ_2 são definidos em termos da posição do nó deslocável em (8):

$$l_1 = \sqrt{\alpha^2 + h^2}; l_2 = \sqrt{(D - \alpha)^2 + h^2} \quad (7)$$

$$\delta_1 = l_{1f} - l_1 = \sqrt{(\alpha + x)^2 + (h - y)^2} - \sqrt{\alpha^2 + h^2}; \quad (8)$$

$$\delta_2 = l_{2f} - l_2 = \sqrt{(D - \alpha - x)^2 + (h - y)^2} - \sqrt{(D - \alpha)^2 + h^2}$$

Partindo para a análise do comportamento dinâmico do sistema, as variáveis são então definidas abaixo:

$$\begin{aligned} x_{\text{estático}} &= x_e; \quad y_{\text{estático}} = y_e; \\ x_{\text{dinâmico}} &= x_e + x_d(t); \quad y_{\text{dinâmico}} = y_e + y_d(t) \end{aligned} \quad (9)$$

A massa m nodal corresponde à metade da massa total das barras. A variação da energia cinética é definida para esse sistema em (10):

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2) \quad (10)$$

Prossegue-se com a formulação do lagrangeano a partir das Eq. (10) e (2):

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2) - \{\Pi_d - \Pi_e\} \quad (11)$$

Segue a definição do termo Q_j como o amortecimento viscoso do sistema, sendo ζ a taxa de amortecimento e ω_j as frequências naturais de vibração:

$$Q_j = 2\zeta m \omega_j \quad (12)$$

Finaliza-se a formulação das equações de equilíbrio da treliça de Von Mises substituindo-se as Eq. (11) e (12) na Eq. (12), obtendo-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_d(t) + 2\zeta \omega_1 \dot{x}_d(t) \\ & - \frac{E_1 A_1}{m} \left[\frac{l_1 - \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}}{l_1 \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}} \right] (\alpha + x_e + x_d(t)) \\ & - \frac{E_2 A_2}{m} \left[\frac{l_2 - \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}}{l_2 \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}} \right] (D - \alpha - x_e - x_d(t)) = \frac{Ph}{m} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{y}_d(t) + 2\zeta \omega_2 \dot{y}_d(t) \\ & - \frac{E_1 A_1}{m} \left[\frac{l_1 - \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}}{l_1 \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}} \right] (y_e + y_d(t) - h) \\ & - \frac{E_2 A_2}{m} \left[\frac{l_2 - \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}}{l_2 \sqrt{(\alpha + x_e + x_d(t))^2 + (h - (y_e + y_d(t)))^2}} \right] (y_e + y_d(t) - h) = \frac{Pv}{m} \end{aligned} \quad (14)$$

O conjunto das Eq. (13) e (14) representa o sistema bidimensional (Fig. 1). Este sistema é dissipativo de acordo com a Eq. (4) e apresenta parâmetros constantes. Pode ser autônomo ou não, dependendo dos carregamentos Ph e Pv analisados. Percebe-se a não-linearidade geométrica do sistema devido aos termos que descrevem os deslocamentos da estrutura estarem associados as raízes quadradas.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados aqui apresentados representam a treliça (Fig. 1) com as propriedades físicas e geométricas definidas em (15). Dois valores de α foram analisados: 0.5D (caso simétrico) e 0.8D (caso assimétrico), constatando a variação da estabilidade dinâmica com a geometria da estrutura.

$$\begin{aligned} & D = 5; h = 1; E_1 = 1; E_2 = 1; A_1 = 1; A_2 = 1; \\ & l_1 = \sqrt{\alpha^2 + 1}; l_2 = \sqrt{(5 - \alpha)^2 + 1}; \zeta = 0.1; m = 1; Ph = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

3.1 Caminho de carregamento estático e fronteiras de estabilidade

O sistema em estudo apresenta bifurcações globais sob carregamento vertical estático. Ao se elevar a carga P_v , o sistema se deforma até que seja atingido um ponto crítico, a partir do qual o fenômeno do salto dinâmico é observado. Tal comportamento é comum a cascas e estruturas arqueadas, implicando em destruição de trajetórias homoclínicas (Monteiro, 2011). A Fig. 2(a) representa o caminho de carga com o deslocamento vertical de ambos os casos de geometria estudados.

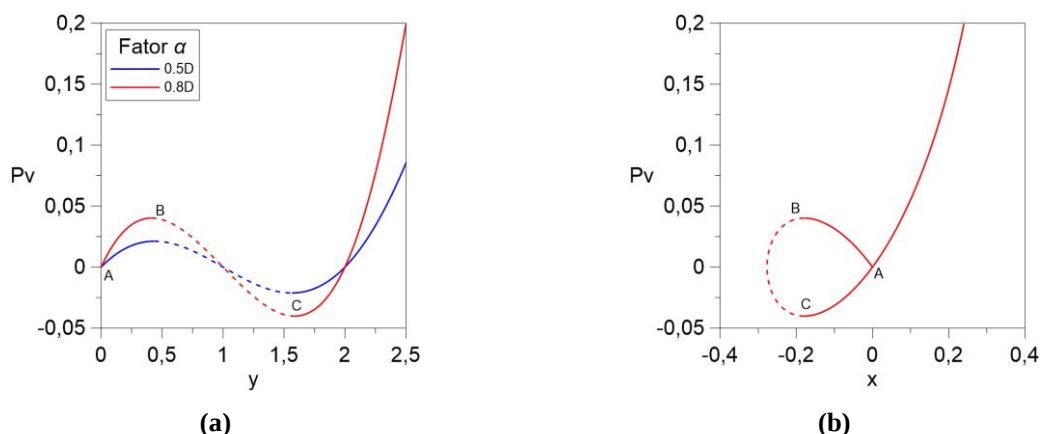


Figura 2. (a) Deslocamento vertical da estrutura para diferentes geometrias e (b) Deslocamento horizontal da estrutura para $\alpha = 0.8D$

Deslocamentos horizontais não foram observados no sistema simétrico. Portanto a Fig. 2b apresenta somente o caminho de carga com o deslocamento horizontal da estrutura assimétrica.

Conhecido o comportamento estático da estrutura parte-se para a análise dinâmica. Dado um pré carregamento estático nulo, ambos os sistemas foram estudados sujeitos a uma força harmônica, possuindo amplitude (λ) e frequência (Ω) de vibração (parametrizada). De acordo com Orlando (2010), uma maneira de se obter uma primeira visão a respeito da segurança de uma estrutura consiste em determinar as fronteiras de estabilidade no espaço dos parâmetros da excitação harmônica. Tal proposta sinalizou como frequência de estudo $\Omega = 1.226$, como sendo a frequência associada ao vale secundário de estabilidade do sistema simétrico, sendo escolhidas duas amplitudes, $\lambda = 0.01$ e $\lambda = 0.04$.

3.2 Análise dinâmica de estabilidade

Diagramas de bifurcação são a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas em função de um parâmetro de controle. Sua análise permite a identificação de soluções de equilíbrio, órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas do sistema em estudo, além de fornecer os pontos de bifurcação (Orlando, 2010). A Figura 3 representa os diagramas de bifurcação, no plano amplitude de carga *versus* deslocamento vertical, dos dois sistemas para uma frequência de excitação $\Omega = 1.226$. Nota-se que a diferença geométrica é suficiente para mudar significativamente o comportamento do sistema.

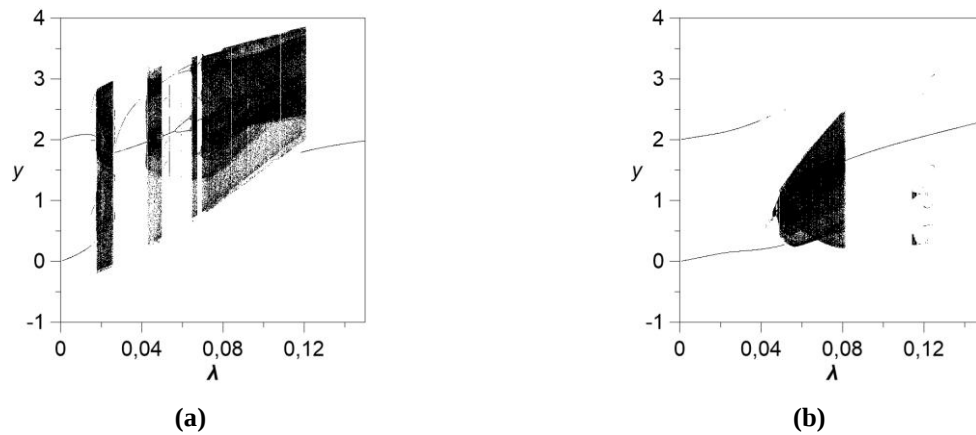


Figura 3. Diagramas de bifurcação para (a) $\alpha = 0.5D$ e (b) $\alpha = 0.8D$

A análise subsequente consistiu em determinar para uma dada amplitude de carregamento as bacias de atração de ambos os sistemas. De acordo com Gonçalves e Santee (2008), bacias de atração de um sistema periódico são os conjuntos de todas as condições iniciais que levam a um determinado atrator com a evolução do tempo. Sua evolução permite investigar a integridade dinâmica do sistema, sendo que a sua erosão significa a falha ou catástrofe da estrutura.

Dois estudos foram realizados, com duas amplitudes de carregamento distintas. No primeiro estudo fixou-se $\lambda = 0.01$, anterior à primeira bifurcação do caso simétrico. As Figuras 4(a), 5(a) e 5(b) representam as bacias de atração, enquanto que as Fig. 4(b) e 5(c) representam os respectivos planos fases dos sistemas. Nota-se que a bacia do sistema simétrico, com $\alpha = 0.5D$, possui regiões de alta fractalidade, onde uma pequena perturbação nas condições iniciais é suficiente para alterar a resposta do sistema.

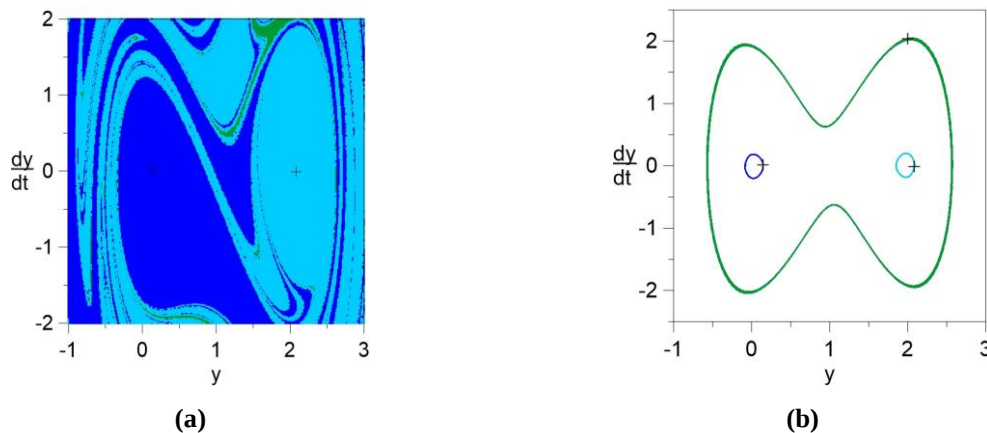


Figura 4. (a) Bacia de atração e (b) plano fase para $\alpha = 0.5D$, com $\lambda = 0.01$

O sistema assimétrico, todavia, apresenta solução mais comportada em relação ao anterior devido ao carregamento estar distante da primeira bifurcação. Duas bacias foram elaboradas: a Fig. 5(a) possui um deslocamento e velocidade horizontais iniciais iguais a -0.03 , enquanto que a Fig. 5(b) partiu-se de valores próximos de zero. Constatou-se então a influência do deslocamento horizontal na resposta do sistema. Notam-se duas regiões bem

definidas, com grande área de resposta, de acordo com as Figs. 5(a) e 5(b). Seus respectivos planos fases e atratores se encontram na Fig. 5(c).

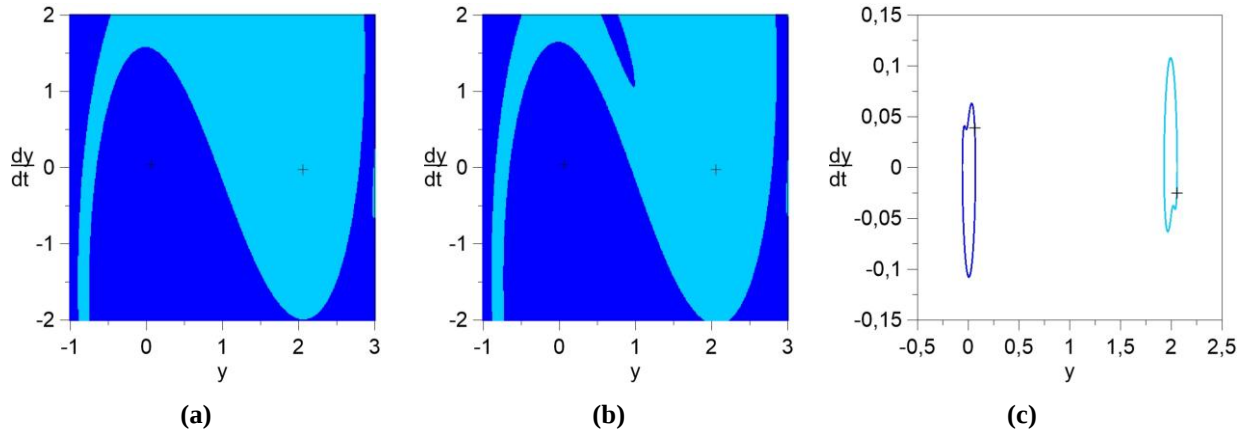


Figura 5. Bacias de atração (a) com $(x,dx) = (-0.03;-0.03)$, (b) com $(x,dx) = (0;0)$ e (c) plano fase para $\alpha = 0.8D$, com $\lambda = 0.0110010$

A seguir consta o segundo estudo, com amplitude de carga $\lambda = 0.04$. Notam-se os mesmos comportamentos encontrados na análise anterior: uma bacia possui alta fractalidade (sistema simétrico) enquanto outra apresenta dois atratores distintos. A Figura 6 representa a bacia de atração (a) e o plano fase (b) encontrado para o sistema simétrico. Percebe-se uma grande região na Fig. 6(a), com um atrator distinto.

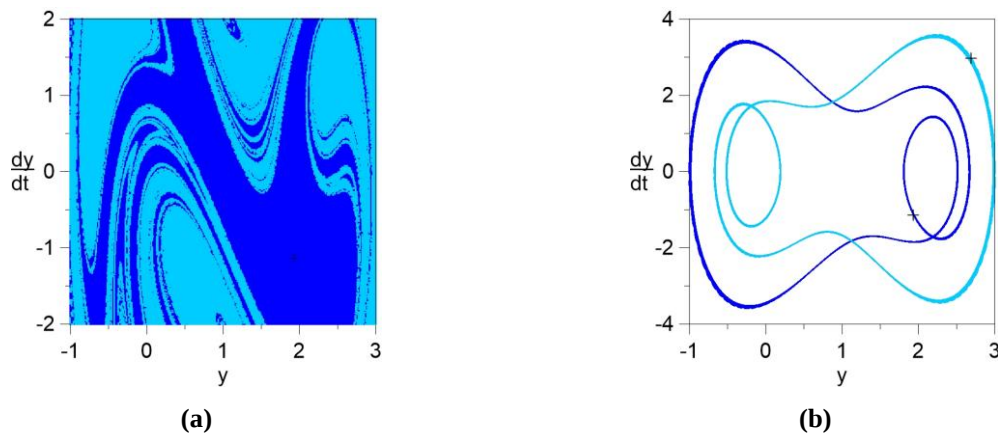


Figura 6. (a) Bacia de atração e (b) plano fase para $\alpha = 0.5D$, com $\lambda = 0.04$

A Figura 7(a) e 7(b), assim como no estudo anterior, apresenta duas regiões distintas, com dois atratores equivalentes. Duas bacias foram elaboradas para mostrar a influência do deslocamento horizontal: a Fig. 7(a) o deslocamento e velocidade horizontais iniciais são iguais a 0.042 e -0.375, respectivamente; enquanto que a Fig 7(b) tais valores são próximos de zero. Os atratores e planos fases são identificados na Fig. 7(c).

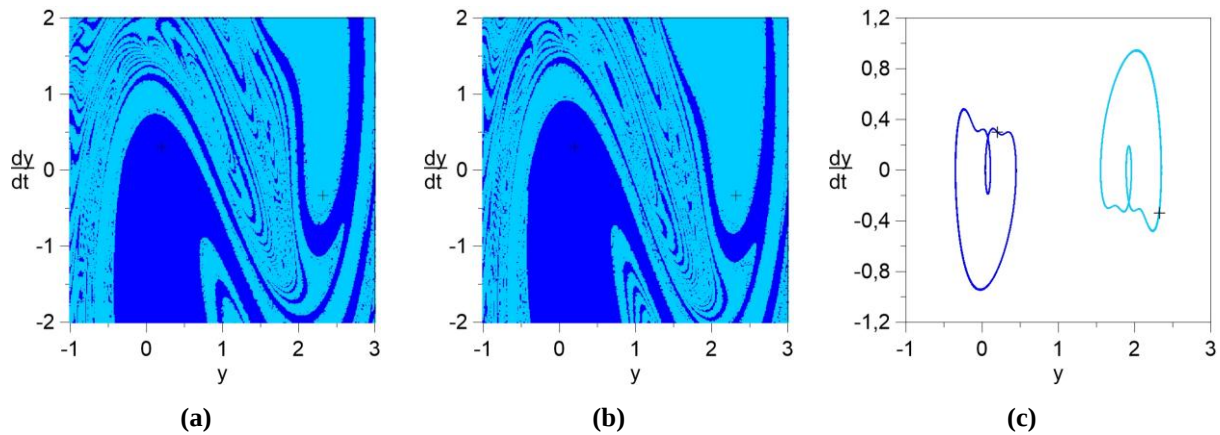


Figura 7. Bacias de atração (a) com $(x, dx) = (-0.05; -0.2)$, (b) com $(x, dx) = (0; 0)$ e (c) plano fase para $\alpha = 0.8D$, com $\lambda = 0.04$

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram estudadas duas treliças de Von Mises, com geometria simétrica e assimétrica. As equações de movimento da treliça foram obtidas a partir do desenvolvimento das equações de Euler-Lagrange em conjunto com a elaboração da energia cinética e potencial total do sistema, chegando-se a um sistema de duas equações não-lineares de segunda ordem, que pode ser autônomo ou não em função dos carregamentos. A análise de estabilidade desse sistema mostrou que a primeira bifurcação, para um dado carregamento dinâmico, da treliça assimétrica ocorre com uma amplitude de carga muito maior quando comparado com a bifurcação da treliça simétrica. Para amplitudes de carga próximas às bifurcações, estudadas no caso simétrico, foram observadas bacias de atração de comportamento fractal. Planos-fases com órbitas de período simples e período duplo foram identificados ao longo do diagrama de bifurcação. Em contraponto a treliça simétrica, a treliça assimétrica apresentou bacias de atração sem fractalidade, mostrando duas regiões bem definidas para os dois casos de carregamentos avaliados, e acoplamento dos deslocamentos horizontais aos deslocamentos verticais.

REFERÊNCIAS

- Bažant, Z. P. Structural stability. *International journal of solids and structures*, vol 37, i. 1-2, pp. 55-67, 2000. ISSN 0020-7683.
- Bažant, Z. P.; Cedolin, L. *Stability of structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage theories*. 1. ed. reimp. Singapore: WSP, 2010. 1011 pp.
- Croll, J. G. A.; Walker, A. C. *Elements of structural stability*. 1. ed. New York: Wiley, 1972. 223 pp.
- Gonçalves, P. B., Santee, D. M. Influence of Uncertainties on the Dynamic Buckling Loads of Structures Liable to Asymmetric Postbuckling Behavior. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2008, Article ID 490137, 24 p., 2008. doi:10.1155/2008/490137
- Greco, M.; Venturin, W.S. . Stability analysis of three-dimensional trusses. *Latin American Journal of Solids and Structures, an ABCM Journal*, [S.l.], 2006, pp. 325-344, ISSN 1679-7825.

- Kassimali, A.; Bidhendi, E. Stability of trusses under dynamic loads. *Computers & Structures*, vol. 29, i. 3, 1988, pp. 381-392, ISSN 0045-7949.
- Kwasniewski, L. Complete equilibrium paths for Mises trusses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 44, i.1, 2009, p. 19-26, ISSN 0020-7462.
- Monteiro, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 670 p.
- Orlando, D. *Dinâmica não-linear, instabilidade e controle de sistemas estruturais com interação modal*. 2010. 300 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- Savi, M. A.; Pacheco, P. M. C. L.; Braga, A. M. B. Chaos in a shape memory two-bar truss. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol 37, i. 8, 2002, pp. 1387-1395, ISSN 0020-7462.
- Toklu, Y. C. Nonlinear analysis of trusses through energy minimization. *Computers & Structures*, vol.82, i. 20-21, 2004, pp. 1581-1589, ISSN 0045-7949.