



ANÁLISE DO FATOR DE INTEGRIDADE DINÂMICO DE UM SISTEMA MECÂNICO SUJEITO A FLAMBAGEM INSTÁVEL

Michael D. Silva

Frederico M. A. Silva

Zenón J. G. N. Del Prado

eng.michaeldowglas@gmail.com

silvafma@ufg.br

zenon@ufg.br

Universidade Federal de Goiás

Av. Universitária, no. 1488, 74605-220, Goiânia, GO, Brasil

Paulo B. Gonçalves

paulo@puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Av. Marquês de São Vicente, no. 255, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Abstract. Os sistemas estruturais esbeltos susceptíveis a flambagem instável geralmente perdem a estabilidade para níveis de carga mais baixos do que a carga de flambagem linear da estrutura perfeita. Isto se deve, principalmente, às imperfeições geométricas presentes em estruturas reais. A sensibilidade imperfeição de estruturas sob carga estática é bem estudados na literatura, mas pouco se sabe sobre a sensibilidade destas estruturas em condições dinâmicas. Em um ambiente dinâmico não apenas imperfeições geométricas, mas também as condições iniciais (distúrbios) influenciam o cenário de bifurcação e das bacias de atração. O objetivo deste trabalho é determinar a integridade e a estabilidade dinâmica das soluções de um sistema mecânico sujeito a flambagem instável. Para ilustrar a sensibilidade do sistema, um modelo discreto de um grau de liberdade é empregado. Especial atenção é dada à influência do carregamento nas bacias de atração do sistema e, conseqüentemente, sobre as medidas de integridade do sistema forçado. Perfis de erosão com base em diferentes medidas de integridade são avaliados como possíveis ferramentas para obter limites inferiores e de confiança para o projeto.

Palavras-chaves: flambagem, instável, dinâmica, análise não linear, fator de integridade.

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos engenheiros e pesquisadores tem sido solicitados, cada vez com mais frequência, a estudar e projetar estruturas com um grau maior de complexidade. Com isso os efeitos não lineares se tornam cada vez maiores e difíceis de serem controlados. Fenômenos não lineares são, entretanto, indesejáveis. Evitam-se estes tipos de problemas projetando-se estruturas de tal modo que elas trabalhem em regime linear, isso porque tanto a análise estática quanto a dinâmica de sistemas não lineares apresentam nas áreas de matemática e mecânica aplicada uma variedade de problemas de difícil solução.

Millon (1991) estudou a correlação entre as bifurcações e as oscilações não lineares de um sistema mecânico discreto com diferentes comportamento pós-críticos, através de uma detalhada análise paramétrica. Para os vários tipos de bifurcação estudou-se, como o comportamento dinâmico varia com o nível de carregamento estático, com os parâmetros que caracterizam o carregamento dinâmico e com os parâmetros que caracterizam a rigidez do sistema estrutural. No presente trabalho, tem-se o mesmo modelo mecânico apresentado em Millon (1991), que é uma adaptação de um modelo barra rígida-mola já utilizado anteriormente no estudo da estabilidade elástica de sistemas estáticos.

Segundo Millon (1991) diversos elementos estruturais, tais como colunas, pórticos, cascas, placas e arcos, dentre outros, quando submetidos a cargas compressivas, estão sujeitos ao fenômeno de flambagem, quer através de bifurcações, quer através da existência de pontos limites ao longo de um caminho de equilíbrio não linear. No seu trabalho são analisados os três pontos de bifurcações mais comuns em sistemas estruturais: bifurcação simétrica estável, bifurcação simétrica instável e bifurcação assimétrica. Neste trabalho, analisa-se as duas particularidades da bifurcação: a simétrica instável e a bifurcação assimétrica, que é a bifurcação do tipo *Butterfly* e *Swallowtail*, respectivamente.

A avaliação da segurança e da integridade de um sistema dinâmico não-linear é um assunto de muita importância em engenharia e não depende exclusivamente da estabilidade das soluções pós-crítica. Um método para se estudar a integridade de um sistema dinâmico é através da análise da evolução das bacias de atração de várias soluções. Essa questão foi abordado pela primeira vez por Thompson (1989) e tem recebido atenção recentemente para a determinação de duas importantes medidas de segurança das bacias de atração: o fator de integridade local (FIL) e o fator de integridade global (FIG), que medem a máxima região segura e contínua da bacia de atração em torno de um dos atratores da resposta dinâmica (Rega e Lenci, 2005). Essas medidas de segurança tem sido aplicada a diversos sistemas mecânicos ou contínuos (Lenci e Rega, 2003; Rega e Lenci, 2008; Gonçalves et al., 2011; Silva e Gonçalves, 2015)

Silva e Gonçalves (2015) investigam a influência das incertezas dos sistemas reais e ruído da carga dinâmica na integridade e estabilidade das suas soluções em um sistema dinâmico. Para ilustrar a sensibilidade do sistema, um modelo discreto de sistemas susceptíveis a flambagem instável é usado. É dada especial atenção à influência de incertezas e do ruído aleatório sobre as bacias de atração do sistema e, conseqüentemente, nas medidas de integridade do sistema forçada e não forçada

Seguindo a mesma linha de pesquisa Silva, Brazão e Gonçalves (2015) investigam a influência de incertezas nos parâmetros físicos e geométricos para a determinação da carga de instabilidade paramétrica de uma casca cilíndrica excitada axialmente, utilizando o método de Galerkin Estocástico juntamente com o polinômio de Hermite-Caos. A incerteza é considerada inicialmente em apenas um de seus parâmetros: no módulo de elasticidade, na

espessura e na amplitude da imperfeição geométrica inicial. Em seguida é analisado a influência de aleatoriedades em dois parâmetros simultaneamente, sendo eles: a espessura e o módulo de elasticidade. Diferentemente de Silva e Gonçalves (2015), a incerteza foi considerada com um função de densidade de probabilidade definida e as incertezas são incorporadas diretamente como um parâmetro da equação diferencial de equilíbrio.

O objetivo deste trabalho é determinar as medidas de integridade, juntamente com a estabilidade das soluções pós-críticas de um sistema mecânico sujeito a flambagem simétrica instável e a bifurcação assimétrica, utilizando um modelo discreto de um grau de liberdade. O enfoque será dado à influência do nível de carregamento estático e de incertezas nos parâmetros de rigidez das bacias de atração estáticas do sistema e, conseqüentemente, sobre as medidas de integridade do sistema.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O modelo representado na Fig. 1 consiste numa barra rígida de peso desprezível, comprimento L , presa por duas molas: uma mola vertical de rigidez linear k_1 e uma mola de rigidez $\bar{k}_2$ que pode ser linear se η for igual a zero e não linear caso η seja igual a um, (ver eq.1) e uma massa concentrada M fixa no ponto A. Segundo Millon (1991) modelos semelhantes a esse têm sido frequentemente usados para representar e estudar de maneira simplificada o comportamento de elementos estruturais tais como colunas, arcos, cascas e placas.

A formulação aqui proposta segue a formulação apresentada por Millon (1991), sendo os principais passos mostrados a seguir.

A rigidez $\bar{k}_2$ é representada pela seguinte equação:

$$\bar{k}_2 = k_2 \left[1 + \eta (\alpha Q_{20} + \beta Q_{20}^2 + \gamma Q_{20}^3 + \delta Q_{20}^4) \right] \quad (1)$$

Esta equação será utilizada para exemplificar os vários tipos de comportamento pós-crítico que ocorrem em vários sistemas estruturais. Serão estudados dois casos específicos: Butterfly e Swallowtail, que possuem parâmetros diferentes que regem a não linearidade da mola $\bar{k}_2$.

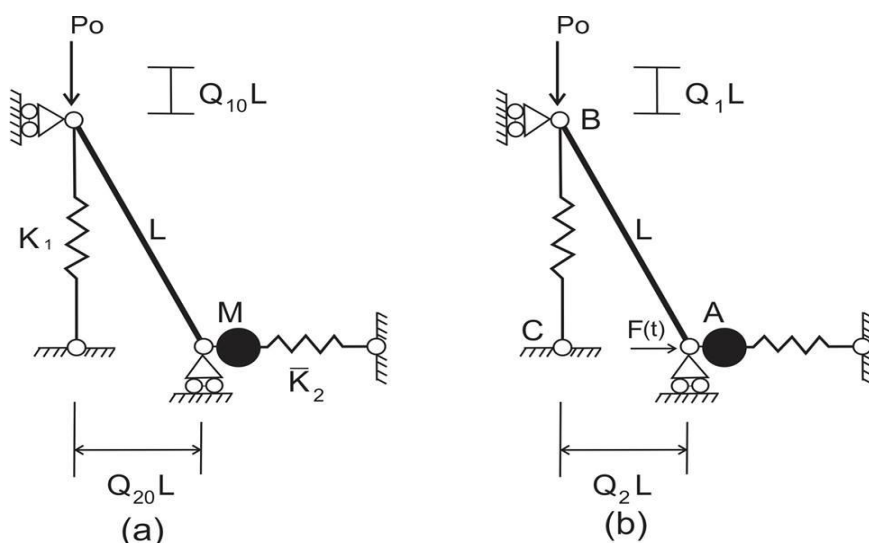


Figura 1. Sistema massa-mola-barra rígida com um grau de liberdade: (a) Estático (b) Dinâmico

A equação da variação da energia potencial total do sistema é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = \Delta U - \Delta W_e = & \frac{1}{2} k_1 L^2 \left[\left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{2t} + \frac{2}{4} \beta Q_{2t}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{2t}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{2t}^4 \right) \right] Q_{2t}^2 \\ & - \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 \\ & - \overline{P}_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right) + \overline{P}_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) - F(t) Q_2 L \end{aligned} \quad (2)$$

onde $Q_{2t} = Q_2(t) + Q_{20}$ representa o deslocamento total do sistema.

A variação da energia cinética é obtida por:

$$\Delta T = \frac{1}{2} M v^2 \quad (3)$$

$$\text{Sendo: } v = \frac{d\Delta h_t}{dQ_{2t}} \cdot \frac{dQ_{2t}}{dt} \quad (4)$$

Através das equações (2) e (3) obtêm-se a função de Lagrange:

$$\begin{aligned} \Delta L = \Delta T - \Delta \Pi = & \frac{1}{2} M (\dot{Q}_2 L)^2 - \frac{1}{2} k_1 L^2 \left[\left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{2t} + \frac{2}{4} \beta Q_{2t}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{2t}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{2t}^4 \right) \right] Q_{2t}^2 \\ & + \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 \\ & - \overline{P}_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right) + \overline{P}_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) - F(t) Q_2 L \end{aligned} \quad (5)$$

Atribuindo as seguintes variáveis auxiliares:

$$\Omega_n^2 = \frac{k_2}{M} ; \lambda \Omega_n^2 = \frac{k_1}{k_2} ; 2\xi \Omega_n = \frac{c}{LM} ; P_0 \Omega_n^2 = \frac{\overline{P}_0}{LM} ; f(t) \Omega_n^2 = \frac{F(t)}{LM} + \frac{F_0}{LM} \quad (6)$$

e colocando a equação em termos de um tempo τ adimensional, sendo $t = \frac{\tau}{\Omega_n}$ e portanto:

$$\begin{aligned} d\tau &= \Omega_n dt \\ d\tau^2 &= \Omega_n^2 d^2 t \end{aligned} \quad (7)$$

A partir da equação de Lagrange e da aplicação do princípio de Hamilton, obtém-se a seguinte equação de movimento do sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_2}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dQ_2}{d\tau} + [\lambda - P_0] \left(\frac{Q_{2t}}{\sqrt{1 - Q_{2t}^2}} \right) + [1 - \lambda] Q_{2t} + \\ \eta (\alpha Q_{2t}^2 + \beta Q_{2t}^3 + \gamma Q_{2t}^4 + \delta Q_{2t}^5) = f(\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

Para se estudar a bifurcação do tipo “Butterfly”, simplifica-se a eq. (8) adotando os seguintes parâmetros: $\lambda = 4, \beta = -6, \delta = 4, \alpha = 0$ e $\gamma = 0$. Sendo assim o caminho pós crítico para esse caso regido a partir da seguinte equação:

$$P_0 = \sqrt{1 - Q_{20}^2} \left(4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + (1 - 6Q_{20}^2 + 4Q_{20}^4) \right) \quad (9)$$

Já para se estudar a bifurcação do tipo “Swallowtail” é necessário tornar os termos α e/ou γ diferentes de zero. Simplificando-se a eq. (8) e adotando os seguintes parâmetro: $\lambda = 4, \beta = 0, \delta = 0, \alpha = -3$ e $\gamma = 0$, tem-se que o caminho pós crítico é dado por:

$$P_0 = \sqrt{1 - Q_{20}^2} \left(4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + (1 - 3Q_{20}) \right) \quad (10)$$

Faz-se a expansão das eq. (8) em série de Taylor, obtêm-se a equação de movimento linearizada em torno de uma dada configuração de equilíbrio estático. Para o caso de molas não lineares a expressão da frequência natural relativa ao estado fundamental de equilíbrio é:

$$\varpi_0 = \sqrt{1 - P_0} \quad (11)$$

Para $Q_{20} \neq 0$, ou seja, no caminho pós-crítico, obtêm-se a seguinte equação para frequência natural em função do carregamento estático:

$$\varpi_0 = \left\{ [\lambda - P_0] \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - Q_{20}^2)^3}} \right) + [1 - \lambda] + (2\alpha Q_{20} + 3\beta Q_{20}^2 + 4\gamma Q_{20}^3 + 5\delta Q_{20}^4) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste trabalho serão considerados incertezas na ordem de 10% nos parâmetros determinísticos dos dois casos estudados. No caso da bifurcação do tipo “Butterfly” serão considerados os resultados para as seguintes incertezas nos parâmetros da mola não linear: $\beta = -5.4, \beta = -6.6, \delta = 3.6, \delta = 4.4$. Já para o caso da bifurcação do tipo “Swallowtail” serão considerados as seguintes incertezas nos parâmetros da mola não linear: $\alpha = -2.7$ e $\alpha = -3.3$.

Nas Figs. 2a e 3a são representados respectivamente, os caminhos pós críticos para a bifurcação do tipo “Butterfly” e “Swallowtail”, considerando toda a variabilidade dos parâmetros numéricos de cada caso. Observa-se nestas figuras que em ambas as bifurcações o caminho pós-crítico inicial é instável, podendo ser simétrico no caso da bifurcação “Butterfly” ou assimétrico no caso da bifurcação “Swallowtail”. A incerteza proposta nos parâmetros de rigidez das molas não modifica o tipo de bifurcação e o valor da carga crítica, apenas o valor do mínimo pós-crítico dos diagramas de bifurcação.

As Figs. 2b e 3b ilustram respectivamente, a relação ϖ_0^2 vs $\overline{P_0}$ para os casos “Butterfly” e “Swallowtail” obtidas a partir da eq. (12) apenas para os valores nominais dos parâmetros numéricos. Nota-se nestas figuras exatamente os trechos do caminho pós-críticos que apresentam frequência natural imaginária, indicando os trechos instáveis da solução não linear do problema.

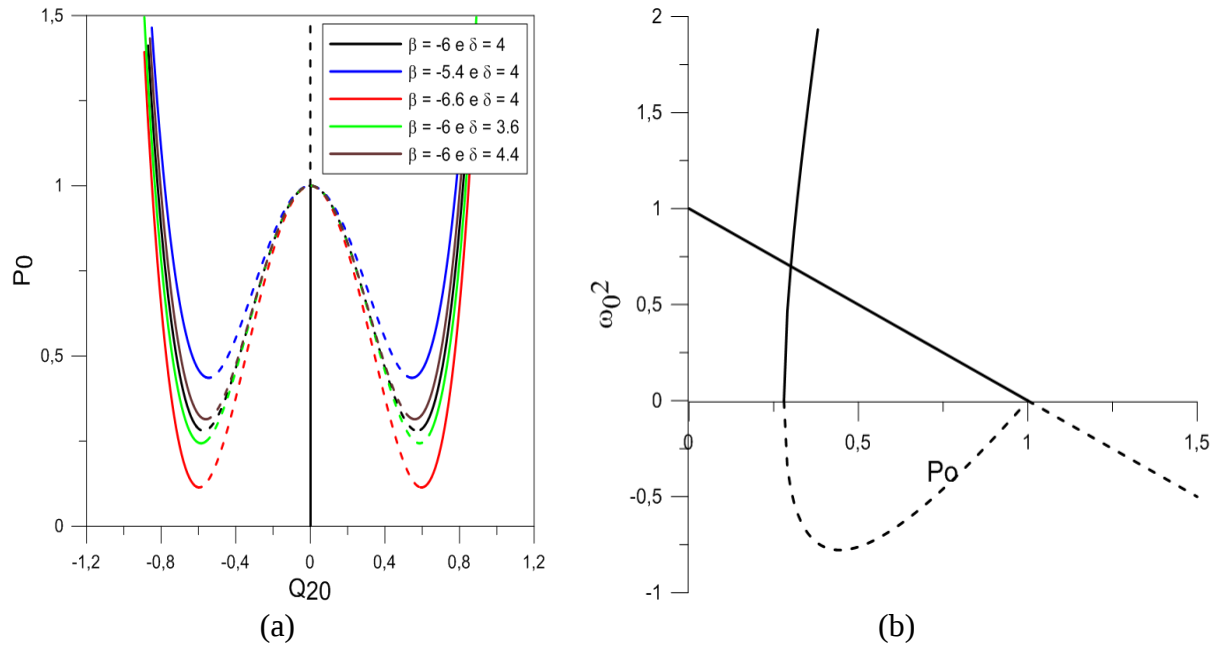


Figura 2. (a) Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo Butterfly considerando a incerteza em seus parâmetros e (b) e relação ω_0^2 versus $\overline{P_0}$ para $\lambda = 4$, $\beta = -6$, $\delta = 4$, $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$.

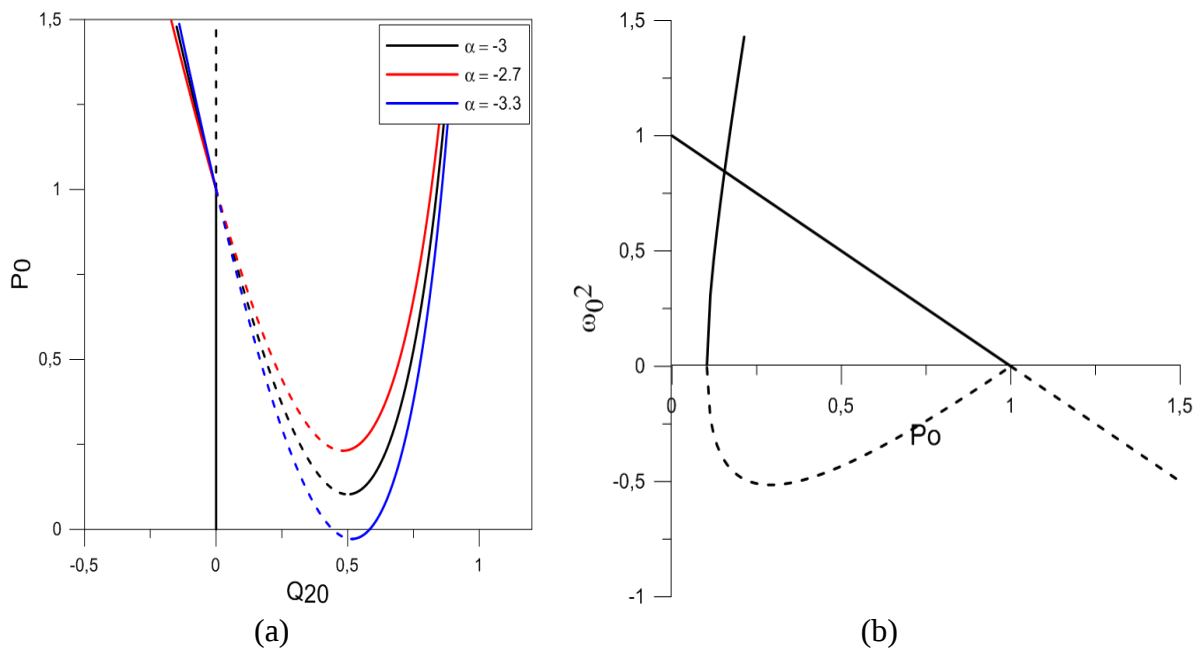


Figura 3. (a) Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo Swallowtail considerando a incerteza em seus parâmetros e (b) e relação ω_0^2 versus $\overline{P_0}$ para $\lambda = 4$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\alpha = -3$ e $\gamma = 0$.

Em seguida foram obtidas as bacias de atração estáticas, $F(t) = 0$, para os dois casos de bifurcação avaliados neste trabalho, considerando-se as incertezas na ordem de 10% nos parâmetros determinísticos. Nas Figs. 4 e 5 estão representadas, respectivamente, as bacias de atrações considerando-se as incertezas no parâmetro β e δ para a bifurcação do tipo *Butterfly* além de se avaliar vários níveis de carregamento estático. Para esse tipo de bifurcação o nível de carregamento estático $P_0 = 0.5$ e $P_0 = 0.9$ apresentam três soluções estáveis, sendo uma delas trivial, conforme ilustra a Fig. 2a. Já para $P_0 = 1.2$, que é um valor acima da carga crítica, a solução trivial passa a ser instável e o sistema passa a apresentar apenas duas soluções estáveis, como apresentado na Fig. 2a.

Nota-se que à medida que aumenta-se o carregamento, independentemente do valor da incerteza, maior é a tendência das condições iniciais da bacia de atração se estabilizar no foco esquerdo (região de cor preta) ou direito (região de cor amarela), minimizando a região do foco central (região de cor azul), como esperado.

Foram estudados os fatores de integridades locais e globais do sistema com bifurcação *Butterfly*. O fator de integridade local é a maior circunferência centrada no atrator da bacia de atração que pode ser obtida de tal forma a garantir o maior conjunto de condições iniciais que convertem para o referido atrator. Já o fator de integridade global é a maior circunferência centrada em uma determinada condição inicial da bacia de atração que pode ser obtida de tal forma a garantir o maior conjunto de condições iniciais que convertem para o mesmo atrator da condição inicial que está no centro da circunferência. Os fatores de integridades estão apresentados pelas regiões delimitada pelos círculos nas bacias das Figs. 4 e 5. O fator de integridade local está representado pela circunferência de cor branca para o foco esquerdo, pela circunferência de cor verde para o foco central e, por fim, pela circunferência de cor vermelha para o foco direito. Já o fator de integridade global está representada pelas circunferências de cores cinza, marrom e roxa para os focos esquerdo, central e direito, respectivamente. O valor dos fatores de integridade (raio da circunferência), local e global, com os parâmetros analisados para a bifurcação do tipo *Butterfly* estão relacionados na Tabela 1, sendo AC (atrator central) e AE (atrator esquerdo). Não foram apresentados os fatores de integridade local e global AD (atrator direito) já que a solução pós-crítica é simétrica para este caso de bifurcação.

Tabela 1. Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*.

Parâmetros		P_0											
β	δ	0.5				0.9				1.2			
		Local		Global		Local		Global		Local		Global	
		AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE
-5.4	4	0,26	0,10	0,26	0,12	0,05	0,14	0,05	0,41	0,0	0,17	0,0	0,44
-6	4	0,23	0,13	0,23	0,22	0,06	0,16	0,06	0,37	0,0	0,14	0,0	0,46
-6.6	4	0,21	0,14	0,21	0,27	0,05	0,14	0,05	0,41	0,0	0,13	0,0	0,46
-6	3.6	0,22	0,14	0,22	0,25	0,06	0,15	0,06	0,39	0,0	0,13	0,0	0,46
-6	4.4	0,24	0,12	0,24	0,18	0,06	0,15	0,06	0,37	0,0	0,16	0,0	0,44

Observa-se a partir da Tab. 1 que o fator de integridade, local e global, do atrator central (solução trivial), para um mesmo do valor β e δ , diminui com o incremento da carga estática

P_0 , tornando-se nula para qualquer valor de carregamento superior ao valor da carga crítica (Figs. 6a e 7a). Já para o atrator esquerdo (solução pós-crítica) ocorre o aumento do fator de integridade, local e global, com o incremento de P_0 , para um mesmo do valor β e δ , como apresentado nas Figs. 6b e 7b.

Ainda a partir da Tab. 1 e das Figs. 6 e 7, observa-se que o fator de integridade, local e global, para uma carga estática, P_0 , próxima do valor mínimo pós-crítico, sofre uma significativa variação quando se considera uma incerteza nos parâmetro β e δ , sendo essa variação menos significativa para valores elevados de carga estática.

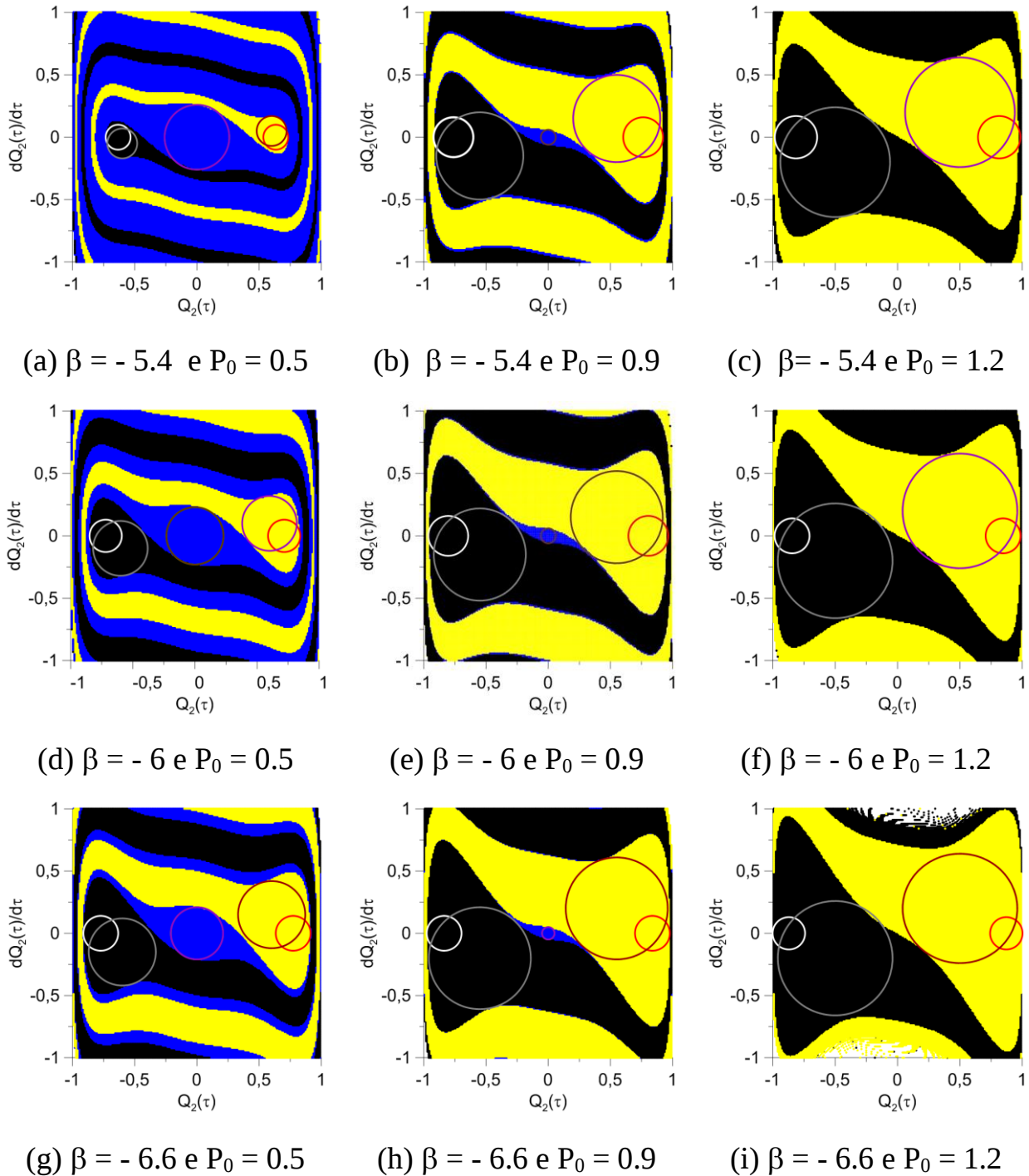


Figura 4. Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza no parâmetro β . $\delta = 4$.

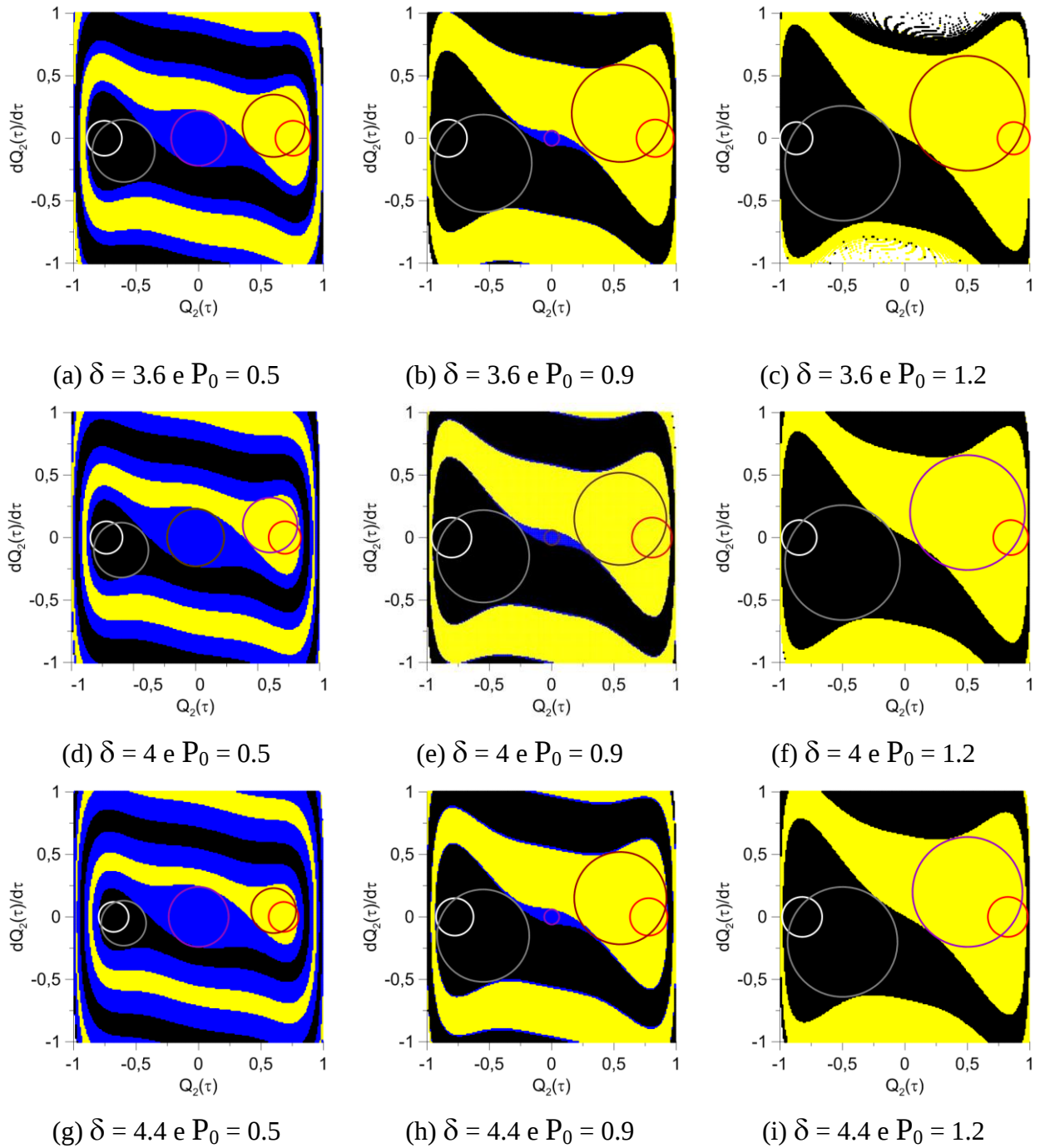


Figura 5. Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza no parâmetro δ . $\beta = -6$.

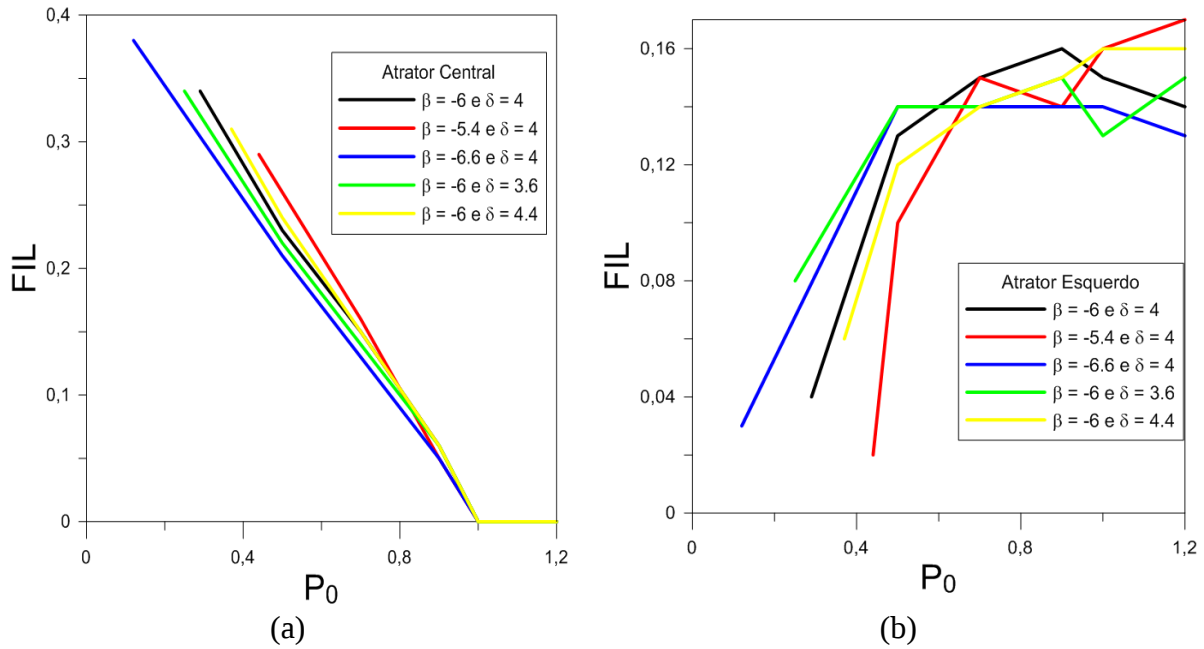


Figura 6. Fator de integridade local para a bifurcação do tipo *Butterfly*: (a) Atrator central (b) Atrator Esquerdo

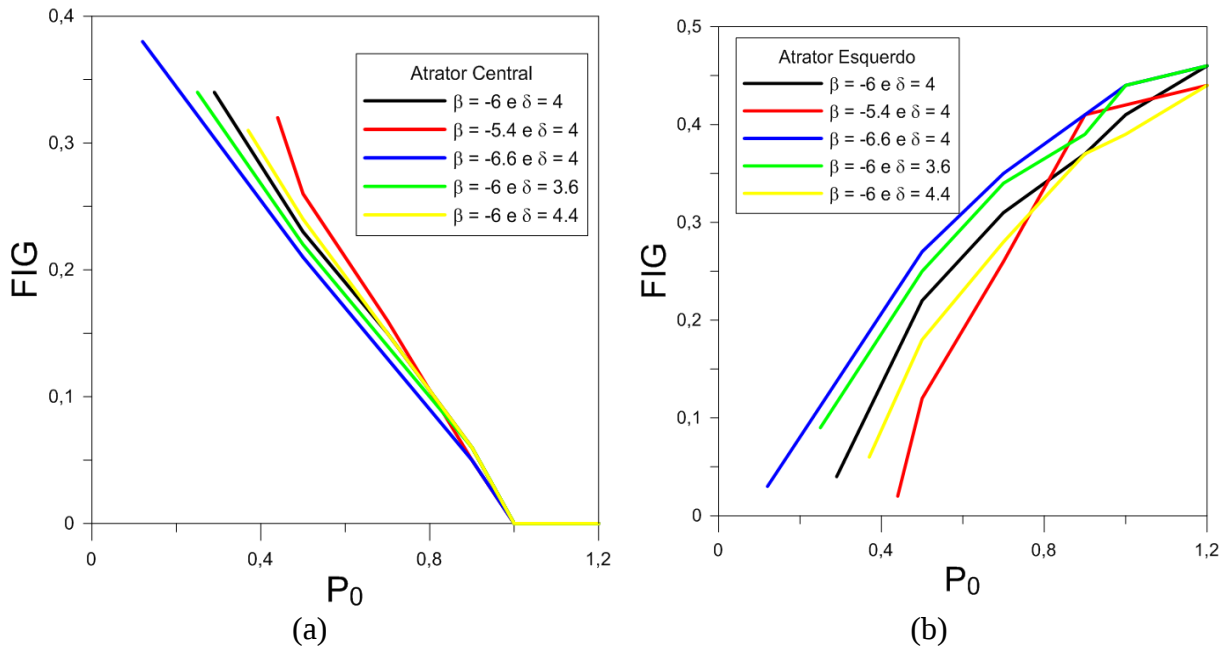


Figura 7. Fator de integridade global para a bifurcação do tipo *Butterfly*: (a) Atrator central (b) Atrator Esquerdo

Já na Fig. 8 estão representadas as bacias de atrações estáticas sem a consideração da incerteza ($\alpha = -3$) e com as incertezas no parâmetro α , com o $\alpha = -2.7$ e -3.3 , para a bifurcação do tipo *Swallowtail* e considerando vários níveis de carregamento. Nela pode-se observar o atrator que cada condição inicial irá convergir. Foram obtidas as bacias de atração para três níveis de carregamento, notou-se que à medida que incrementa-se o carregamento, maior é a tendência das condições iniciais se estabilizarem no foco direito. A região preta da bacia representam as condições iniciais que se estabilizam no foco central (solução trivial – Fig.3a), quando o carregamento é abaixo da carga crítica ($P_{cr} = 1$), ou no foco esquerdo (atrator

negativo – Fig. 3a), quando o carregamento é acima da carga crítica. Já a região azul da bacia representam as condições iniciais que se estabilizam no foco direito (atrator positivo – Fig. 3a), independentemente do nível de carregamento estático aplicado.

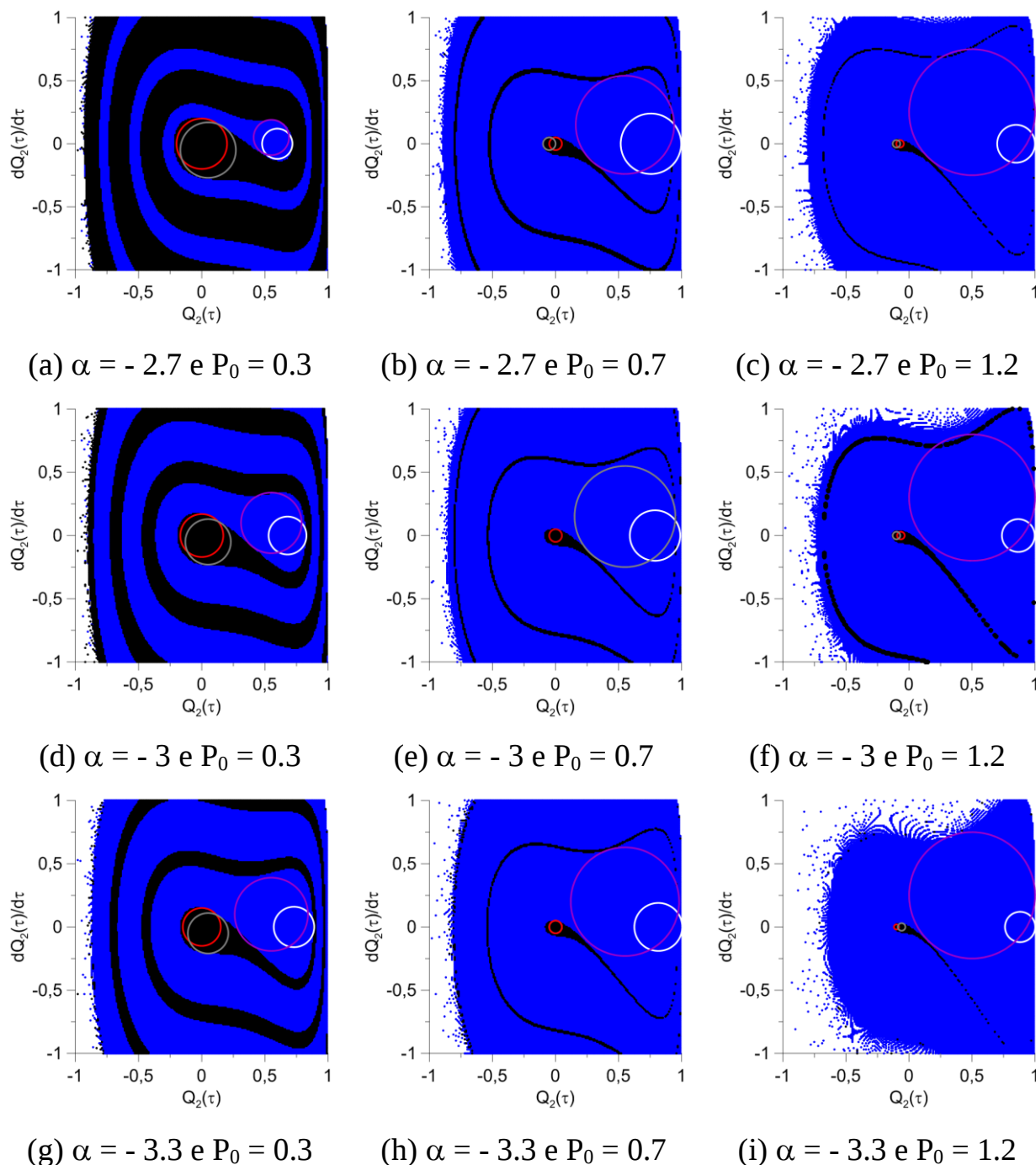


Figura 8. Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza no parâmetro α

O fator de integridade local das bacias de atração estática da Fig. 8 está representado pela circunferência de cor branca para o foco direito e pela circunferência de cor vermelha para o foco central, quando $P_0 \leq P_{cr}$ ou esquerdo para $P_0 > P_{cr}$. Já o fator de integridade global está

representada pela circunferência de cor cinza para o foco central, quando $P_0 \leq P_{cr}$ e esquerdo para $P_0 > P_{cr}$ e pela circunferência de cor roxa para o foco direito. A variação dos fatores de integridade, local e global, com os parâmetros analisados para a bifurcação do tipo *Swallowtail* estão relacionados na Tabela 2, sendo AC (atrator central) AD (atrator direito) e AE (atrator esquerdo).

Tabela 2. Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*.

Parâmetro	P_0											
α	0.3				0.7				1.2			
	Local		Global		Local		Global		Local		Global	
	AC	AD	AC	AD	AC	AD	AC	AD	AE	AD	AE	AD
-2.7	0,20	0,12	0,22	0,14	0,05	0,24	0,05	0,39	0,03	0,15	0,03	0,50
-3	0,17	0,15	0,18	0,24	0,05	0,20	0,05	0,40	0,03	0,13	0,03	0,50
-3.3	0,15	0,16	0,16	0,29	0,05	0,19	0,05	0,43	0,03	0,12	0,02	0,50

A partir da Tab. 2 observa-se que, para um mesmo valor de α , os fatores de integridade, local e global, do atrator central (solução trivial) diminui com o incremento da carga estática, como ilustram as Figs. 9a e 10a, enquanto os fatores de integridade, local e global, do atrator a direita aumenta, dado pelas Figs 9b e 10b. Após a carga crítica, o atrator central (solução trivial) torna-se instável e as soluções passam a convergir para as soluções pós-críticas localizadas a esquerda ou à direita da solução trivial.

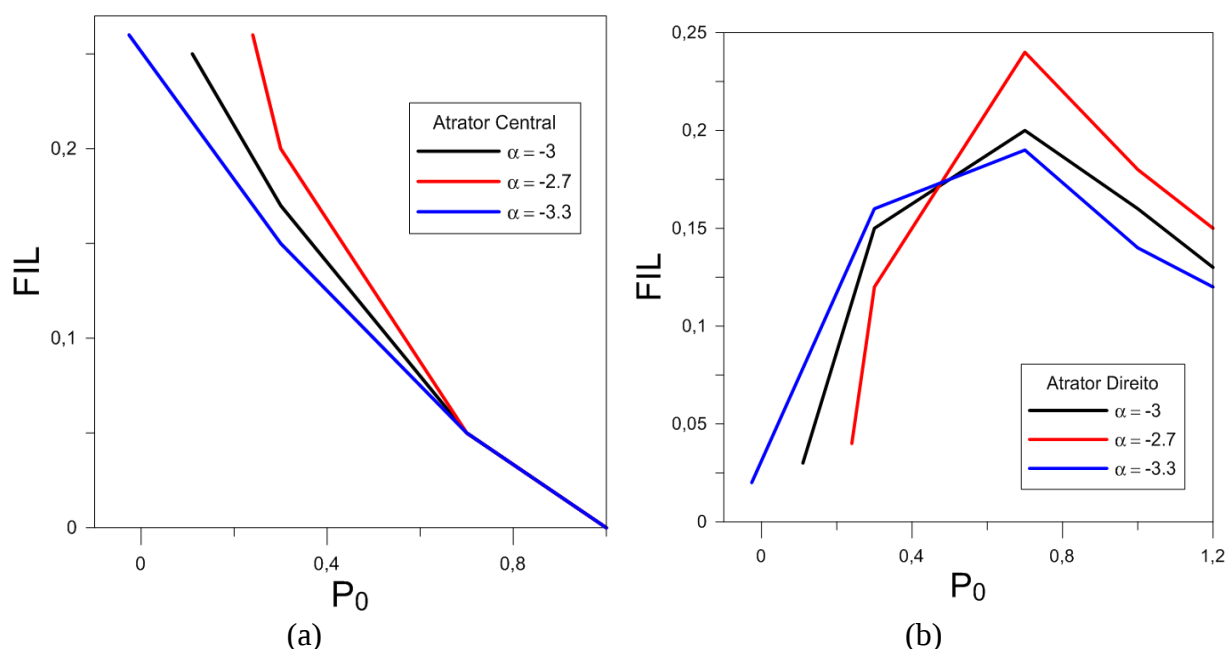


Figura 9. Fator de integridade local para a bifurcação do tipo *Swallowtail*: (a) Atrator central (b) Atrator Direito

Quando se considera uma incerteza no parâmetro α , os fatores de integridade, local e global, são severamente modificados, principalmente para valores de carregamento inferiores ao valor da carga crítica, como apresentado na Tab. 2 e nas Figs. 9 e 10. Isso é esperado, pois a dispersão dos resultados para $P \leq P_{cr}$ é maior, como ilustrado na Fig. 3a.

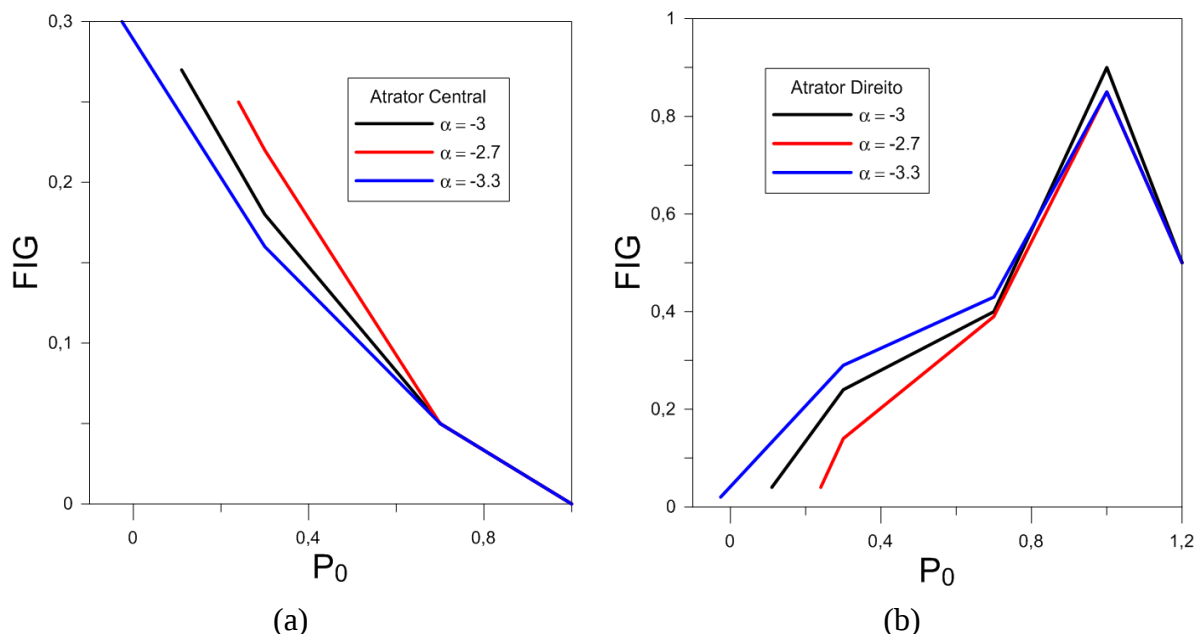


Figura 10. Fator de integridade global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*: (a) Atrator central (b) Atrator Direito

CONCLUSÕES

Neste trabalho, avaliou-se, para um sistema mecânico discreto susceptível a flambagem, a influência de incertezas nos parâmetros de rigidez do sistema nos fatores de integridade local e global. Quanto a rigidez do sistema discreto, dependendo dos valores iniciais da mola não linear é possível obter repostas pós-críticas com diferentes topologias, que neste trabalho foram consideradas: a bifurcação simétrica instável e a bifurcação assimétrica. Foram traçadas diversas bacias de atração para diferentes valores de carregamento estático e com incerteza nos parâmetro de rigidez da mola não linear, verificando o comportamento pós-crítico e a mudança das bacias de atração e das medidas de segurança com o carregamento estático e a incerteza. Os resultados apresentaram a erosão da bacia de atração e o decréscimo dos fatores de integridade, local e global, para as soluções triviais com o incremento do carregamento estático, para ambos os casos de bifurcação investigados. Já para as soluções pós-críticas, os resultados ilustraram que os fatores de integridade, local e global, aumentaram com o incremento do carregamento estático. Quanto a incerteza nos parâmetros de rigidez, observou-se que a maior variabilidade detectada nas soluções pós-críticas de ambos os casos de bifurcação ocorreu para valores de carregamento entre o mínimo pós-crítico e a carga crítica, consequentemente, os fatores de integridade, global e local, apresentaram maior dispersão nos seus valores para esta região. A análise das incertezas nos parâmetros de rigidez foram feitas de forma determinística. Esse trabalho encontra-se em desenvolvimento, sendo a incorporação

das incertezas na equação de equilíbrio do sistema, permitindo uma análise não determinística, e a análise da instabilidade dinâmica as próximas etapas.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível graças ao apoio do Ministério da Educação - CAPES, CNPq, FAPERJ-CNE e FAPEG.

REFERÊNCIAS

- Gonçalves, Paulo B., Silva, Frederico M. A., Rega, G., Lenci, S., 2011. Global dynamics and integrity of a two-dof model of a parametrically excited cylindrical shell. *Nonlinear Dynamics*, vol. 63, pp. 61-82.
- Lenci, S., Rega, G., 2003. Optimal control of nonregular dynamics in a Duffing oscillator. *Nonlinear Dynamics*, vol. 33, pp. 71–86.
- Millon, S. L. J., 1991. *Técnicas gráficas e computacionais para a análise de oscilações não lineares e caos em sistemas estruturais suscetíveis à flambagem*. 232 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Rega, G., Lenci, S., 2008. Dynamical integrity and control of nonlinear mechanical oscillators. *J. Vib. Control*, vol. 14, pp. 159–179.
- Rega, G., Lenci, S., 2005. Identifying, evaluating and controlling dynamical integrity measures in non-linear mechanical oscillators. *Nonlinear Anal.*, vol. 63, pp. 902–914.
- Silva, F. M. A., Brazão, A. F., Gonçalves, P. B., 2015. “Influence of physical and geometrical uncertainties in the parametric instability load of an axially excited cylindrical shell”. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, Article ID 758959, pp. 1-18.
- Silva, F. M. A., Gonçalves, P. B., 2011. The influence of uncertainties and random noise on the dynamic integrity analysis of a system liable to unstable buckling. *Nonlinear Dynamics*, vol. 66, pp. 303-333.
- Thompson, J.M.T., 1989. Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well. *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 421, pp. 195–225.