



UM NOVO MÉTODO DE RECONSTRUÇÃO DE OBSTÁCULOS

Suelen de S. Rocha

Antonio A. Novotny

suelen@lncc.br

aanovotny@gmail.com

Laboratório Nacional de Computação Científica

Av. Getúlio Vargas, 333, CEP: 25651 – 075, Rio de Janeiro, Petrópolis - Brasil.

Resumo. *Uma diversidade de problemas inversos estão relacionados com a determinação da forma ou topologia de um conjunto imerso em um domínio geométrico conhecido. A localização e caracterização de defeitos ou obstáculos em um meio é de grande importância em vários campos científicos, tais como imagem médica e geofísica. O objetivo deste trabalho é apresentar um novo método de reconstrução de obstáculos. Mais precisamente, dada uma excitação deseja-se obter a solução de um problema inverso de reconstrução consistindo na detecção de furos no interior de um dado domínio geométrico a partir de leituras parciais da resposta à referida excitação. Este problema é escrito na forma de uma equação diferencial parcial sobredeterminada. Essa dificuldade é contornada reescrevendo o problema inverso como um problema de otimização, consistindo na minimização de um funcional de forma que mede a diferença entre o dado lido e o calculado numericamente, utilizando o conceito de derivada topológica. O algoritmo resultante é não-iterativo e robusto a presença de ruído. Alguns exemplos numéricos são apresentados, cujos resultados são obtidos utilizando apenas uma medida.*

Palavras-chave: *Sensibilidade topológica, Derivada topológica, Problema inverso.*

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, introduzimos de forma geral o conceito de problema inverso. Fazemos um breve histórico da derivada topológica e de sua utilização como ferramenta na resolução de algumas classes de problemas inversos apontando alguns trabalhos relacionados. Apresentamos a proposta deste trabalho e o problema tratado mostrando dificuldades, estratégias e métodos utilizados em sua resolução.

2 Problemas Inversos e a Derivada Topológica

Um processo físico é representado por seus dados de entrada, dados de saída e pelos parâmetros do sistema. Em um problema direto tem-se os dados de entrada e os parâmetros do sistema e obtém-se os dados de saída. Em resumo, dada a causa de um processo deseja-se obter o respectivo efeito. Já em um problema inverso são buscados os dados de entrada ou os parâmetros do sistema a partir dos dados de saída. Em linhas gerais, dado o efeito de um processo deseja-se obter a causa.

Problemas inversos dividem-se em duas grandes classes: reconstrução (dado o sistema de parâmetros e observado o efeito encontrar a causa que corresponde ao efeito) e identificação (dadas as causas e o efeito determinar o sistema de parâmetros que relaciona as causas ao efeito). Estes problemas surgem naturalmente em diversas áreas tais como: matemática, engenharia e medicina. Como exemplo citamos a detecção de tumores, o monitoramento de fluidos e a detecção de corrosão em estruturas.

Um problema é dito bem posto no sentido de Hadamard se cumpre as condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados de entrada. Caso um desses requisitos não seja satisfeito o problema é dito mal-posto. Geralmente um problema inverso não possui informação suficiente para descrevê-lo por completo. Podendo faltar informações que garantam a existência, a unicidade ou a dependência contínua dos dados. Desta forma, trabalhar com problema inverso frequentemente significa lidar com um problema mal posto. Se um problema apresenta múltiplas soluções ou as informações são insuficientes para descrevê-lo completamente pode-se obter a existência e a unicidade de solução assumindo algumas hipóteses ou critérios adicionais como por exemplo restrições sobre seu domínio de definição. A estabilidade é um ponto mais delicado já que não pode ser obtida apenas introduzindo hipóteses simplificativas. Pois, dependendo do grau da instabilidade do problema e considerando os efeitos degenerativos de ruído e as limitações dos métodos numéricos utilizados, pode-se obter valores totalmente corrompidos e conseqüentemente distantes da solução real. Assim, não temos como superar essa dificuldade a menos que dispuséssemos de mais informação acerca da solução.

Problemas inversos são amplamente estudados e um número significativo de métodos podem ser utilizados para resolvê-los tais como: inversão direta, decomposição em valores singulares, mínimos quadrados, métodos de regularização, métodos variacionais, molificação, redes neurais, entre outros. A escolha de um método adequado geralmente se dá pela natureza do problema e do operador considerado. Dentre outros, destaca-se o conceito de derivada topológica, introduzida por (Sokołowski & Zochowski, 1999), que tem sido utilizada de forma bem sucedida como ferramenta na resolução de diversos tipos de problemas inversos.

A análise de sensibilidade topológica fornece um desenvolvimento assintótico para um funcional de forma, cujo termo principal é um campo escalar chamado derivada topológica

que mede a sensibilidade de um dado funcional quando uma perturbação singular infinitesimal é introduzida em um ponto do domínio. Entre os problemas inversos já tratados com o uso da derivada topológica citamos: detecção e localização de trincas, problema de fundição eletromagnética que consiste em determinar correntes elétricas e o campo induzido para que um metal líquido assuma um determinado formato, o problema inverso de espalhamento que consiste em determinar as características de um objeto (forma, constituição interna) com base em dados de como ele espalha partículas ou radiação recebida, problema inverso do potencial e o problema de EIT (Electrical Impedance Tomography).

Problemas de reconstrução relacionados a detecção e caracterização de anomalias tais como rachaduras, cavidades ou inclusões tem sido objeto de intensa investigação. Com o intuito de preencher as lacunas existentes no estudo deste tipo de problema várias técnicas matemáticas e numéricas são utilizadas, desenvolvidas e aprimoradas tais como o método level-set, derivada topológica de primeira ordem e a derivada topológica de segunda ordem. O método level-set é um método iterativo, dependente do chute inicial e é o método mais popular. A derivada topológica de primeira ordem não é dependente do chute inicial mas também é iterativo como o método level-set. Já a derivada topológica de segunda ordem tem como vantagens não ser dependente do chute inicial e nem iterativo, mas é um método computacionalmente mais caro.

A derivada topológica de primeira ordem é utilizada para análise assintótica topológica em domínios perturbados de forma singular. Porém, na literatura existente a expansão assintótica topológica é utilizada de forma simplificada com a finalidade de facilitar a análise o que gera uma discrepância na expansão que não pode ser compensada. Logo, a solução obtida pode estar distante da solução real. Desta forma, propomos uma nova abordagem para problemas de reconstrução de obstáculos usando derivada topológica de segunda ordem sem introdução de qualquer simplificação na expansão assintótica do funcional considerado de modo que a solução numérica obtida seja mais acurada em comparação com as existentes na literatura.

3 PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO

Problemas inversos de reconstrução têm despertado grande interesse de pesquisadores das mais diversas áreas nas últimas décadas. Em virtude da sua natureza não linear, problemas inversos deste tipo são muitas vezes tratados por meio de otimização baseada no gradiente (Colton & Monk, 1992), às vezes auxiliado por estimativas de sensibilidade adjunta (Bonnet, 1995) e método level-set (Litman et al., 1998). No entanto, o conhecimento acerca desse tipo de problema ainda apresenta muitas lacunas. Portanto, propomos neste capítulo um novo método para resolver problemas inversos de reconstrução de obstáculo.

3.1 Formulação do Problema

Considere um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira suave. Este domínio possui um furo ω_0 como mostrado na Figura 1(a). Seja ainda o domínio $\Omega^* = \Omega \setminus \overline{\omega}^*$ que possui anomalias (furos) não conhecidas em seu interior que são denotadas por ω^* , conforme a Figura 1(b).

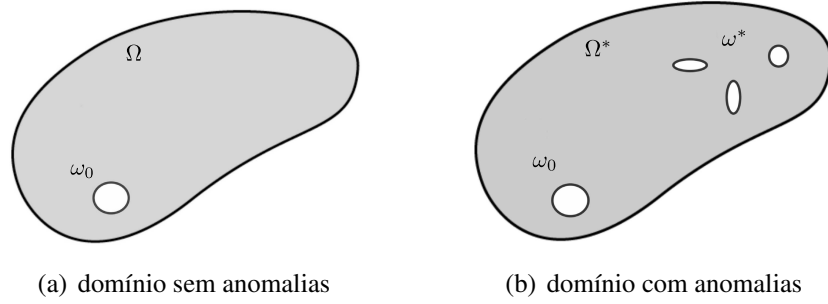


Figure 1: Domínio Ω e Ω*

Considere agora o campo u conhecido na fronteira de Ω . O objetivo é reconstruir Ω^* conhecendo apenas Ω e dados sobre a fronteira exterior de Ω e Ω^* . Considere a fronteira de Ω^* denotada por Γ composta de três partes disjuntas Γ_m , Γ_0 e $\partial\omega^*$, tais que Γ_m denota a fronteira exterior de Ω^* , Γ_0 denota a fronteira de ω_0 e $\partial\omega^*$ denota a fronteira das anomalias ω^* . Portanto, nosso problema consiste em determinar ω^* tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = b & \text{em } \Omega^* = \Omega \setminus \overline{\omega^*} \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 = \partial\omega_0 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\omega^* \\ \left. \begin{array}{l} u = U \\ -\partial_n u = Q \end{array} \right\} & \text{sobre } \Gamma_m. \end{array} \right. \quad (1)$$

Notemos que em (1) temos um problema sobredeterminado já que dados de Dirichlet e Neumann são prescritos sobre a fronteira Γ_m simultaneamente. Fato que dificulta a resolução do problema. A partir daí podemos considerar os seguintes problemas inversos:

- Dada a excitação de Neumann Q sobre Γ_m podemos observar U sobre Γ_m para obter ω^* .
- Dada a excitação de Dirichlet U sobre Γ_m podemos observar Q sobre Γ_m para encontrar ω^* .

Podemos tratar o problema das duas formas apresentadas de maneira análoga. Escolhemos a primeira maneira, ou seja, um fluxo Q será imposto sobre Γ_m e a partir da leitura de U desejamos obter a topologia do domínio de definição do problema. Para obtenção de resultados melhores várias medidas são tomadas, ou seja, consideraremos que vários fluxos Q^k , $k = 1, \dots, M$, são impostos e para cada fluxo Q^k imposto uma leitura U^k é obtida.

3.2 Reformulação do Problema

O problema considerado é mal posto e está escrito na forma de uma equação diferencial parcial sobredeterminada. Para contornar essa dificuldade reescrevemos o problema inverso (1) na forma de um problema de otimização.

Considere o seguinte funcional de forma:

$$\psi(\Omega) = \sum_{k=1}^M \int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k)^2, \quad (2)$$

onde M é o número total de medidas tomadas e para cada medida k tem-se u_0^k solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_0^k = b & \text{em } \Omega \\ u_0^k = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ -\partial_n u_0^k = Q^k & \text{sobre } \Gamma_m \end{cases} \quad (3)$$

onde U^k é a leitura feita a partir da excitação imposta Q^k .

Afirmamos que minimizar o funcional (2) significa solucionar (1), de fato,

Proposição 1 *Seja u_0^k solução do problema variacional (3). Então, se $\Omega = \Omega^*$, onde Ω^* é uma solução do problema inverso (1), tem-se que $u_0^k = U^k$ sobre Γ_m para todo k e portanto o funcional (2) atinge um mínimo sobre Γ_m .*

A Proposição 1 garante que sobre a solução do problema inverso (1) o funcional (2) atinge o seu valor mínimo sobre Γ_m . Assim, obter o mínimo do funcional (2) é equivalente a resolver o problema (1), ou seja, é equivalente a encontrar o conjunto de anomalias desconhecidas no interior de Ω . Desta forma, com a intenção de resolver (1) atacaremos o problema de minimizar o funcional (2).

4 DERIVADA TOPOLÓGICA

A derivada topológica é definida como o primeiro termo de correção da expansão assintótica de um funcional de forma em relação a uma perturbação (furo, inclusão, termo fonte ou rachadura) infinitesimal em um ponto arbitrário do domínio. Como mencionado anteriormente a derivada topológica foi introduzida em 1999 por Sokolowski e Zochowski. Desde então, é utilizada de forma bem sucedida em uma grande variedade de problemas tais como: otimização topológica (Amstutz & Andrä, 2006), evolução do dano (Allaire et al., 2011), análise inversa (Hintermüller & Laurain, 2008).

Esta seção tem o objetivo de apresentar alguns resultados e definições em relação a derivada topológica que são utilizados no decorrer do trabalho.

4.1 Conceito de Derivada Topológica

A derivada topológica mede a sensibilidade de um dado funcional quando uma perturbação regular ou singular infinitesimal é introduzida em um ponto do domínio. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, um domínio aberto e limitado. Seja $\hat{x}$ um ponto arbitrário de Ω e ω um domínio fixo de $\mathbb{R}^d$. Introduz-se uma perturbação não suave delimitada em uma região $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon\omega$ com $\overline{\omega_\varepsilon} \subset \Omega$. Observe a Figura 2.

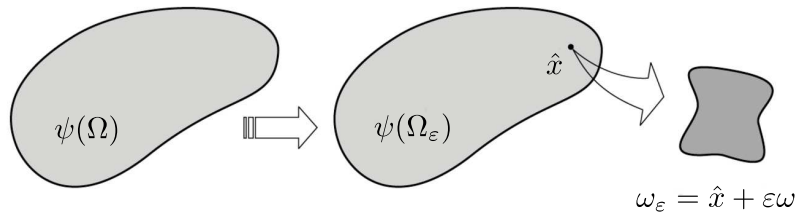


Figure 2: Derivada Topológica

Assuma que um dado funcional de forma $\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x}))$ associado ao domínio topologicamente perturbado $\Omega_\varepsilon(\hat{x}) = \Omega \setminus \overline{w_\varepsilon(\hat{x})}$ admite a seguinte expansão assintótica

$$\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\Omega) + f(\varepsilon)D_T\psi(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)) \quad (4)$$

onde $\psi(\Omega)$ é o funcional de forma associado ao domínio não perturbado Ω , $f(\varepsilon)$ é uma função regular positiva e $o(f(\varepsilon))$ é tal que $\frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A função $\hat{x} \mapsto D_T\psi(\hat{x})$ é chamada de derivada topológica de ψ em $\hat{x}$. Rearranjando a equação (4) e passando ao limite obtemos a seguinte expressão para a derivada topológica:

$$D_T\psi(\hat{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\Omega)}{f(\varepsilon)}. \quad (5)$$

A expansão assintótica indica o sinal que a derivada deve possuir para que o funcional de forma ψ diminua a medida que o domínio Ω é perturbado. Como a função $f(\varepsilon)$ é positiva a fim de minimizar o funcional de forma deve-se buscar regiões onde a derivada topológica torna-se negativa. Assim, a derivada topológica indica a direção de descida do funcional, e portanto, é uma boa ferramenta de otimização.

Notemos que o cálculo da derivada através do limite (5) não é trivial, pois os funcionais $\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x}))$ e $\psi(\Omega)$ dependendo do tipo de perturbação (nucleação de furos) realizada podem estar definidos em domínios topologicamente diferentes. Supondo que o funcional de forma tratado admite a expansão assintótica dada em (4) a utilização desta expansão depende muito da expressão obtida para a função $\hat{x} \rightarrow D_T\psi(\hat{x})$.

A fim de utilizar a informação da melhor forma possível é preciso calcular a derivada topológica de maneira a obter uma fórmula explícita que possa ser usada diretamente em métodos numéricos de otimização de forma ou de topologia. Assim, torna-se necessário uma análise assintótica do funcional de forma $\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x}))$ em relação ao parâmetro pequeno ε . Mas vale salientar que perturbações regulares também podem ser consideradas como por exemplo nucleação de inclusões que do ponto de vista matemático é bem mais simples de ser tratada.

Considere agora que o funcional de forma associado ao domínio perturbado $\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x}))$ admite a seguinte expansão

$$\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\Omega) + f(\varepsilon)D_T\psi(\hat{x}) + f_2(\varepsilon)D_T^2\psi(\hat{x}) + R(f_2(\varepsilon)) \quad (6)$$

onde $D_T\psi$ e $D_T^2\psi$ são chamadas derivadas topológicas do funcional de forma ψ de primeira e segunda ordem respectivamente.

A função $f_2(\varepsilon)$ é positiva, monótona e $f_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_2(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R(f_2(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0. \quad (7)$$

Rearranjando a equação (6) e passando ao limite obtemos a seguinte expressão para a derivada topológica de segunda ordem:

$$D_T^2\psi(\hat{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\Omega) - f(\varepsilon)D_T\psi(\hat{x})}{f_2(\varepsilon)}. \quad (8)$$

5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Para minimizar o funcional (2) faremos uma análise de sensibilidade no que diz respeito a inserção de furos infinitesimais no domínio Ω . A partir de informações obtidas dessa análise fazemos modificações na topologia inicial Ω com a finalidade de obter um resultado o mais próximo possível do domínio procurado Ω^* . Assim, introduzimos uma perturbação singular no domínio conhecido Ω . O domínio perturbado é dado por $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B_i}$, onde $B_{\varepsilon_i} = B(x_i, \varepsilon_i) \subseteq \Omega$ é a bola de centro em x_i e raio ε_i , com $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Considere agora o funcional de forma associado ao domínio perturbado Ω_ε , dado por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \sum_{k=1}^M \int_{\Gamma_m} (u_\varepsilon^k - U^k)^2. \quad (9)$$

onde u_ε^k é a solução do seguinte problema perturbado

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon^k = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^k = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ -\partial_n u_\varepsilon^k = Q^k & \text{sobre } \Gamma_m \\ u_\varepsilon^k = 0 & \text{sobre } \partial B_i, i = 1, \dots, N, \end{cases}, \quad (10)$$

onde $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\} \in \mathbb{R}_+^N$.

Com o intuito de minimizar (9) uma análise assintótica de u_ε^k com respeito a ε faz-se necessária. Para tal propomos a seguinte expansão para solução do problema (10)

$$u_\varepsilon^k(x) = u_0^k(x) + \sum_{j=1}^N \varphi_{\varepsilon_j}^k(x) + \tilde{u}_\varepsilon^k(x). \quad (11)$$

onde $\varphi_{\varepsilon_j}^k(x) = \alpha_j^k(\varepsilon_j)G_j(x)$ e N é o número de anomalias existentes no domínio Ω^* . Note que N também é uma das incógnitas do problema.

A função $G_j(x)$ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta G_j = \delta_j & \text{em } \Omega \\ \partial_n G_j = 0 & \text{sobre } \Gamma_m, \\ G_j = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases} \quad (12)$$

com $\delta_j := \delta(x - x_j)$, logo $G_j(x) = G_j(x; x_j)$.

Por meio da solução fundamental para o Laplaciano temos que G_j admite na vizinhança de $x_j \in \Omega$ a seguinte representação

$$G_j(x) = \phi_j(x) - g_j(x), \quad (13)$$

com $\phi_j(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln ||x - x_j||$ e $g_j(x)$ solução do seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta g_j = 0 & \text{em } \Omega \\ \partial_n g_j = \partial_n \phi_j & \text{sobre } \Gamma_m, \\ g_j = \phi_j & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases} \quad (14)$$

Nota-se também que $g_j(x) = g_j(x; x_j)$, desde que $\phi_j(x) = \phi_j(x; x_j)$.

Expandindo u_0^k em série de Taylor para $x \in B_i$ temos que

$$u_0^k(x) = u_0^k(x_i) + \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot (x - x_i) \quad (15)$$

com ξ_i entre x e x_i . Logo, substituindo a expansão (15) em (11) obtemos

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^k(x) &= u_0^k(x_i) + \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot (x - x_i) + \sum_{j=1}^N \varphi_{\varepsilon_j}^k(x) + \tilde{u}_\varepsilon^k(x) \\ &= u_0^k(x_i) + \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot (x - x_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) G_j(x) + \tilde{u}_\varepsilon^k(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Por (13) temos que

$$u_\varepsilon^k(x) = u_0^k(x_i) + \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot (x - x_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) (\phi_j(x) - g_j(x)) + \tilde{u}_\varepsilon^k(x). \quad (17)$$

Pela regularidade da função g_j na vizinhança de x_j podemos expandi-la em série de Taylor e, portanto, a expansão para u_ε^k pode ser dada por

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^k(x) &= u_0^k(x_i) + \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot (x - x_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) (\phi_j(x) - g_j(x_i) \\ &\quad + \nabla g_j(\zeta_i) \cdot (x - x_i)) + \tilde{u}_\varepsilon^k(x) \end{aligned} \quad (18)$$

onde ζ_i é um ponto entre x e x_i .

Lembrando que $u_\varepsilon^k|_{\partial B_i} = 0$ e sabendo que $x|_{\partial B_i} = x_i - \varepsilon_i n_i$, onde n_i é a normal unitária que aponta para fora da bola $B_{\varepsilon_i}(x_i)$. Temos que a expansão para u_ε^k na fronteira de B_i é dada por:

$$\begin{aligned} 0 = u_\varepsilon^k|_{\partial B_i} &= u_0^k(x_i) - \varepsilon_i \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot n_i - \alpha_i^k(\varepsilon_i) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon_i + g_i(x_i) - \varepsilon_i \nabla g_i(\zeta_i) \cdot n_i \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - \varepsilon_i n_i - x_j\| + g_j(x_i) - \varepsilon_i \nabla g_j(\zeta_i) \cdot n_i \right) + \tilde{u}_\varepsilon^k(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Somando e subtraindo o seguinte termo

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \ln \|x_i - x_j\| \quad (20)$$

em (19) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= u_0^k(x_i) - \alpha_i^k(\varepsilon_i) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon_i + g_i(x_i) \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - x_j\| + g_j(x_i) \right) - \varepsilon_i \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot n_i \\ &\quad + \varepsilon_i \alpha_i^k(\varepsilon_i) \nabla g_i(\zeta_i) \cdot n_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - \varepsilon_i n_i - x_j\| - \frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - x_j\| \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_i \nabla g_j(\zeta_i) \cdot n_i + \tilde{u}_\varepsilon^k(x) \right) \quad \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_i}. \end{aligned} \quad (21)$$

com $0 < \tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_i$.

A função $\tilde{u}_\varepsilon^k$ é construída de forma que a discrepância introduzida pelos termos de mais alta ordem em ε_i seja compensada. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\varepsilon^k(x) &= \varepsilon_i \nabla u_0^k(\xi_i) \cdot n_i - \varepsilon_i \alpha_i^k(\varepsilon_i) \nabla g_i(\zeta_i) \cdot n_i \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - \varepsilon_i n_i - x_j\| - \frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - x_j\| - \varepsilon_i \nabla g_j(\zeta_i) \cdot n_i \right) \end{aligned} \quad (22)$$

sobre ∂B_i .

Logo, por (21) e (22) temos que

$$u_0^k(x_i) - \alpha_i^k(\varepsilon_i) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon_i + g_i(x_i) \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|x_i - x_j\| + g_j(x_i) \right) = 0. \quad (23)$$

Por fim, constroi-se a função $\tilde{u}_\varepsilon^k$ de tal forma que a diferença introduzida pelos termos da expansão para u_ε^k seja compensada, ou seja, $\tilde{u}_\varepsilon^k$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_\varepsilon^k = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{u}_\varepsilon^k = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_n \tilde{u}_\varepsilon^k = 0 & \text{sobre } \Gamma_m \\ \tilde{u}_\varepsilon^k = h_i & \text{sobre } \partial B_i, i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (24)$$

com

$$\begin{aligned} h_i &= \varepsilon_i (\nabla u_0^k(\xi_i) - \alpha_i^k(\varepsilon_i) \nabla g_i(\xi_i)) \cdot n_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) \left(\frac{1}{2\pi} \ln ||x_i - \varepsilon_i n_i - x_j|| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \ln ||x_i - x_j|| - \varepsilon_i \nabla g_j(\xi_i) \right) \cdot n_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo (11) em (9) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^M \left[\int_{\Gamma_m} \left(u_0^k + \sum_{j=1}^N \varphi_{\varepsilon_j}^k + \tilde{u}_\varepsilon^k - U^k \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^M \left[\int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k)^2 + 2 \int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k) \sum_{j=1}^N \varphi_{\varepsilon_j}^k + \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{j=1}^N \varphi_{\varepsilon_j}^k \right)^2 + \mathcal{E}(\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{Com } \mathcal{E}(\varepsilon) = 2 \int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k) \tilde{u}_\varepsilon^k + 2 \int_{\Gamma_m} \tilde{u}_\varepsilon^k \sum_{j=1}^N \varphi_{\varepsilon_j}^k + \int_{\Gamma_m} (\tilde{u}_\varepsilon^k)^2.$$

Lembrando que $\varphi_{\varepsilon_j}^k = \alpha_j^k(\varepsilon_j) G_j(x)$ temos que

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^M \left[\int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k)^2 + 2 \int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k) \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) G_j \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) G_j \right)^2 + \mathcal{E}(\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Agora, introduzimos a seguinte quantidade

$$\Psi_\rho(\alpha^k(\varepsilon_j)) = \sum_{k=1}^M \left[2 \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k) \alpha_j^k(\varepsilon_j) G_j + \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^k(\varepsilon_j) G_j \right)^2 \right], \quad (27)$$

onde $\rho = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

Sejam o vetor d_k cujas entradas são dadas por $(d_k)_i = d_i^k$ com

$$d_i^k = -2 \int_{\Gamma_m} (u_0^k - U^k) G_i \quad (28)$$

a matriz H com entradas dadas por

$$(H)_{ij} = 2 \int_{\Gamma_m} G_i G_j \quad (29)$$

e $\alpha_k = \{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_N^k\}$. Assim, a quantidade Ψ_ρ pode ser reescrita da seguinte forma

$$\Psi_\rho(\alpha_k(\varepsilon_j)) = \sum_{k=1}^M \left[-\alpha_k \cdot d_k + \frac{1}{2} H \alpha_k \cdot \alpha_k \right], \quad (30)$$

Quer-se minimizar a equação (30) em relação a α_k . Para tal derivamos (30) em relação a cada α_k e igualamos a zero, ou seja,

$$\langle D_{\alpha^1} \Psi_\rho(\alpha_k), \beta \rangle = -d_1 \cdot \beta + H \alpha_1^* \cdot \beta = 0 \quad \forall \beta. \quad (31)$$

$$\langle D_{\alpha^2} \Psi_\rho(\alpha_k), \beta \rangle = -d_2 \cdot \beta + H \alpha_2^* \cdot \beta = 0 \quad \forall \beta. \quad (32)$$

$\vdots$

$$\langle D_{\alpha^M} \Psi_\rho(\alpha_k), \beta \rangle = -d_M \cdot \beta + H \alpha_M^* \cdot \beta = 0 \quad \forall \beta. \quad (33)$$

onde $\alpha_k^* = \alpha_k^*(x)$ é o α_k que zera a derivada de (30) em relação a α_k . Logo, pelas expressões acima temos que $H \alpha_k^* = d_k$ para cada $k = 1, \dots, M$. Assim,

$$\Psi_\rho(\alpha_k^*(x)) = \sum_{k=1}^M -\alpha_k^* \cdot d + \frac{1}{2} d \cdot \alpha_k^* = \sum_{k=1}^M -\frac{1}{2} \alpha_k^* \cdot d. \quad (34)$$

Logo, as localizações ótimas das anomalias x^* são obtidas simplesmente buscando os pontos que fornecem os menores valores para $\Psi_\rho(\alpha_k^*(x))$, ou seja,

$$x^* = \arg \min_{\rho \in \Omega} \Psi_\rho(\alpha_k^*(x)). \quad (35)$$

Assim, obtemos a localização das anomalias. O próximo passo é a obtenção do raio de cada uma dessas anomalias.

Para encontrar os tamanhos das anomalias precisamos considerar dois casos: (1) usando apenas uma medida; e (2) usando mais de uma medida. Notemos que para o primeiro caso o raio ε_i ótimo de cada anomalia é obtido substituindo os valores encontrados para α_k^* e as localizações ótimas x^* na expressão dada em (23). Já para o caso com mais de uma medida o problema torna-se mais complexo, pois a fim de encontrar o raio ótimo de cada anomalia devemos isolar $\alpha_i^k(\varepsilon_i)$ em (23) donde obtemos um sistema de equações transcendentais e tal sistema não pode ser resolvido trivialmente. Logo, adicionar medidas na tentativa de obter uma melhor solução aumenta significativamente a complexidade do problema. É importante evidenciar que essa dificuldade é uma peculiaridade deste problema visto que a adição de medida em problemas similares é realizada trivialmente.

5.1 Descrição do Algoritmo

O algoritmo tem a finalidade de obter as localizações ótimas das anomalias e seus respectivos raios baseado nos resultados da seção anterior.

Os dados de entrada do algoritmo são os seguintes:

- Número de anomalias a serem detectadas, denotado por N ;
- Número de medidas utilizadas, denotado por M . Consideramos nos resultados numéricos deste trabalho $M=1$;
- O vetor $d \in \mathbb{R}^N$ e a matriz $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$, cujas entradas são dadas por

$$d_i = -2 \int_{\Gamma_m} (u_0 - U) G_i, \quad H_{ij} = 2 \int_{\Gamma_m} G_i G_j;$$

- O tamanho do grid dado por m no qual os sistemas são resolvidos.

Os dados de saída do algoritmo são os seguintes:

- Os valores ótimos obtidos para α^* que minimizam o funcional (2).
- As localizações ótimas obtidas das anomalias existentes dada em $x^* \in \mathbb{R}^N$
- O valor mínimo do funcional (2) obtido dado por $S^* \in \mathbb{R}$.
- Os raios ótimos $\varepsilon^* \in \mathbb{R}^N$ para cada anomalia.

E considere ainda

$$\varepsilon^* = \tau(\alpha^*, x^*) = \exp \left[\frac{-2\pi}{\alpha_i^*} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^* \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|x_i^* - x_j^*\| + g_j(x_i^*) \right) + \alpha_i^* g_i(x_i^*) - u_0(x_i^*) \right) \right]. \quad (36)$$

Inicia-se o algoritmo com o domínio conhecido Ω , o número de anomalias a serem detectadas N e o número de pontos do grid m . A ordem do sistema a ser solucionado depende do número de anomalias a serem detectadas N . Com a finalidade de encontrar o conjunto de pontos que minimiza o funcional (2) faz-se uma busca combinatória em todo o grid. Assim, dois conjuntos de pontos são obtidos: o conjunto que corresponde as localizações ótimas das anomalias x^* e o conjunto α^* . A partir daí os raios ótimos correspondentes a cada anomalia são obtidos utilizando (36).

Finalmente, apresentamos o algoritmo utilizado:

Algoritmo 1: Pseudocódigo**Input:** $m, N, M, d_i(x_i), H_{ij}(x_i)$ **Output:** $S^*, \alpha^*, x^*, \varepsilon^*$

```

1  $S^* \leftarrow \infty; \alpha^* \leftarrow 0; x^* \leftarrow 0;$ 
2 for  $i_1 \leftarrow 1$  to  $m$  do
3   for  $i_2 \leftarrow i_1 + 1$  to  $m$  do
4      $\vdots$ 
5     for  $i_m \leftarrow i_{m-1} + 1$  to  $m$  do
6        $\mathbf{d} \leftarrow [d_1(x_1) \ d_2(x_2) \ \cdots \ d_N(x_N)]^T;$ 
7        $\mathbf{H} \leftarrow \begin{bmatrix} H_{11}(x_1) & H_{12}(x_2) & \cdots & H_{1N}(i_N) \\ H_{21}(x_1) & H_{22}(x_2) & \cdots & H_{2N}(i_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(i_1) & H_{N2}(i_2) & \cdots & H_{NN}(i_N) \end{bmatrix};$ 
8        $\alpha \leftarrow \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d};$ 
9        $S \leftarrow -\frac{1}{2} \mathbf{d} \cdot \alpha;$ 
10      if  $S < S^*$  then
11         $S^* \leftarrow S;$ 
12         $\alpha^* \leftarrow \alpha;$ 
13         $x^* \leftarrow [x_1, x_2, \dots, x_N];$ 
14      end
15    end
16  end
17  $\varepsilon^* \leftarrow \tau(\alpha^*, x^*).$ 
18 return  $S^*, \alpha^*, x^*, \varepsilon^*.$ 

```

Os resultados numéricos apresentados no próximo capítulo são obtidos usando esse algoritmo que utiliza uma medida e é não iterativo. Os resultados são bastante satisfatórios mesmo com presença de ruído.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção objetiva-se apresentar alguns experimentos numéricos que representam as resoluções do problema de otimização correspondente ao problema inverso que estamos tratando. Mostraremos vários experimentos considerando uma e três anomalias.

A resolução numérica dos problemas é realizada utilizando o método dos elementos finitos considerando elementos triangulares lineares. Vale salientar que o método numérico utilizado não exerce influência sobre os resultados obtidos. Além disso, os experimentos são realizados com o intuito de verificação dos resultados obtidos no decorrer do trabalho.

6.1 Experimentos

Nos experimentos apresentados consideraremos o domínio Ω dado por uma circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1 que possui um furo de centro em $(-0.5, 0)$ e raio 0.3, como mostrado na Figura 3).

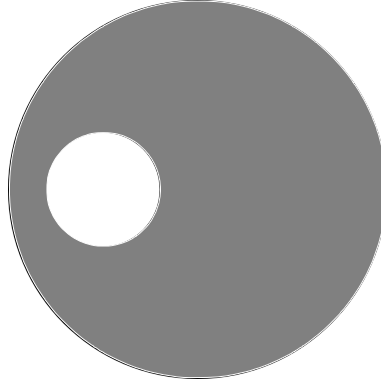


Figure 3: Domínio inicial Ω

Deseja-se obter a localização e tamanho de alguma anomalia (furo) adicional no interior do domínio Ω . Para tal inicialmente precisamos de uma medida realizada na fronteira do domínio considerado. Obtemos tal dado de maneira sintética, ou seja, criamos computacionalmente o domínio procurado Ω^* e a medida é obtida impondo um fluxo Q e o campo U é lido na fronteira Γ_m de Ω^* . Neste trabalho, para os experimentos consideramos apenas uma medida $Q = 1$ em cada um dos exemplos apresentados. Com o emprego do Algoritmo 1 deseja-se reconstruir os domínios apresentados abaixo:

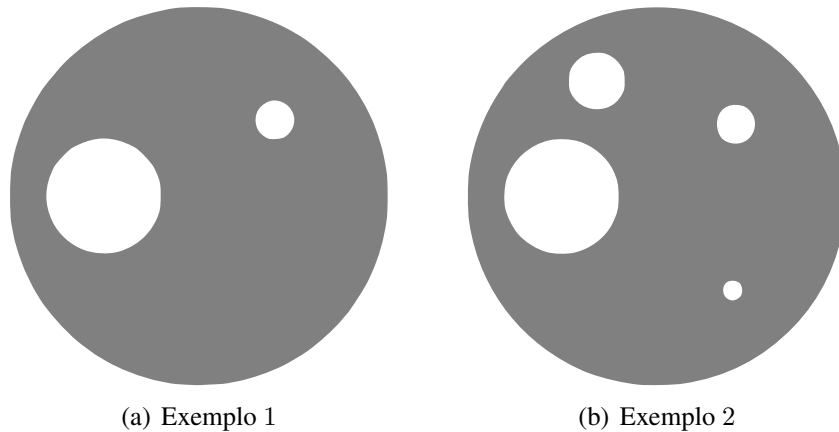


Figure 4: Experimentos

6.2 Exemplo 1

Nesta seção pretendemos analisar a sensibilidade em relação ao grid. Com esse intuito geramos inicialmente uma malha grossa e de tal forma que o centro da anomalia não coincida com um ponto do grid. Além disso, para que os experimentos desta seção não apresente outro tipo de interferência não inserimos ruído na leitura realizada.

Para isso utilizamos o Exemplo 4(a) que apresenta uma anomalia localizada no ponto $x^* = (0.4, 0.4)$ com raio $\varepsilon^* = 0.1$. Nosso objetivo é obter a localização e raio da anomalia, ou seja, reconstruir Ω^* representado na Figura 4(a) usando o algoritmo apresentado no capítulo anterior. Primeiramente, uma malha inicial é gerada com 197 pontos e o resultado é apresentado na Figura 5(a) onde a marcação em vermelho representa o resultado procurado e a marcação em azul representa o resultado obtido. Posteriormente, é realizado um refino da malha inicial e a malha resultante apresenta 734 pontos e o resultado pode ser observado na Figura 5(b). Por fim, é realizado mais um refino obtendo uma malha resultante com 2828 pontos e o resultado pode ser observado na Figura 5(c). Além disso, para efeito de comparação é gerada uma malha de 734 pontos de maneira que um dos pontos do grid coincida com o centro da anomalia e o resultado obtido é apresentado na Figura 5(d). É possível verificar que os centros da anomalia obtidos nos três primeiros casos são os pontos do grid que estão mais próximos do centro real. E o erro do raio obtido dar-se pelo erro obtido do centro da anomalia e evidentemente devido ao truncamento da expansão do funcional de forma.

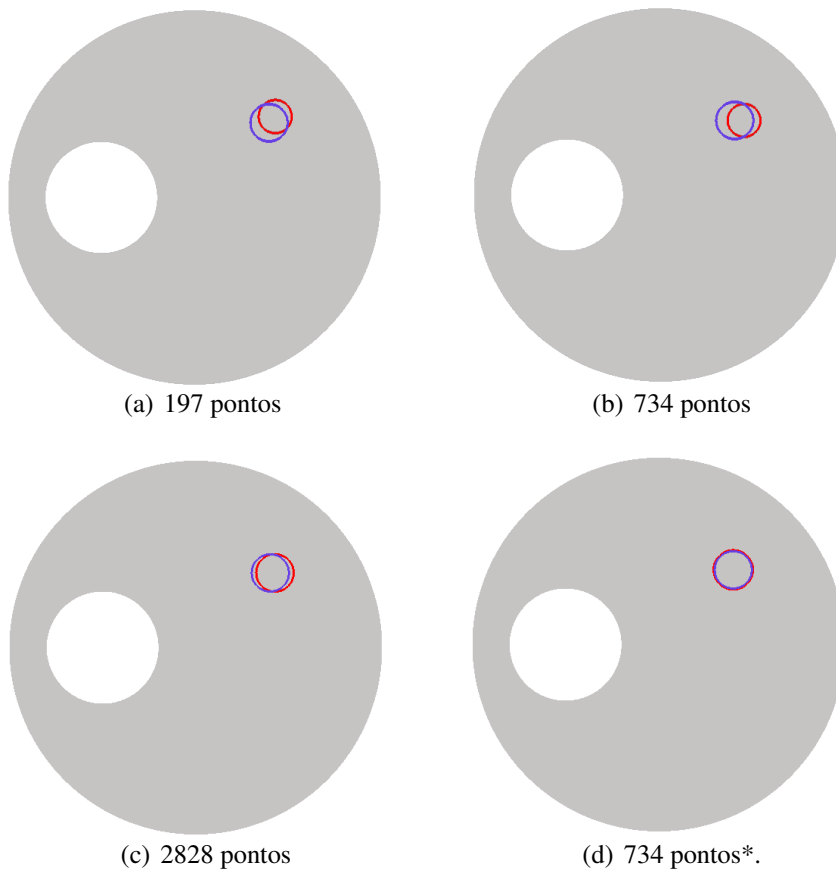


Figure 5: Exemplo 1. Resultados obtidos para diferentes tamanhos de grid. *Em (d) o centro da anomalia coincide com ponto do grid.

Notemos que pelos três primeiros experimentos temos uma tendência a convergência para o centro da anomalia. Na Figura 5(d) é obtida a localização exata da anomalia pois existe um ponto do grid que coincide com o centro da anomalia. Desse modo, para um resultado mais preciso basta refinar a malha até que uma condição de parada seja satisfeita tendo em mente que

o resultado não será exato a menos que aja coincidência entre centro da anomalia e ponto do grid. Assim, pelos resultados obtidos é possível verificar a validade do método e do algoritmo. Portanto, para efeito de verificação em todos os exemplos apresentados no restante do trabalho faremos apenas um refino da malha inicial e manteremos o centro da anomalia coincidindo com um ponto do grid com o intuito de observar outras características do método, bem como sua robustez em relação a ruído.

Observa-se ainda que as discrepâncias apresentadas pela forma simplificada adotada amplamente na literatura são corrigidas, de forma que o funcional associado ao problema perturbado atinge seu mínimo exatamente no centro da anomalia. Vale salientar que os resultados apresentados foram obtidos em apenas uma iteração. Para uma análise quantitativa observe a Tabela 1 abaixo.

Table 1: Exemplo 1. Resultados obtidos para diferentes tamanhos de grid.

	x^*	ε^*
Figura 5(a)	(0.433, 0.433)	0.089
Figura 5(b)	(0.450, 0.400)	0.088
Figura 5(c)	(0.425, 0.400)	0.101
Figura 5(d)	(0.400, 0.400)	0.106

6.3 Exemplo 2

Considere o Exemplo 2 mostrado na Figura 4(b) que apresenta três anomalias de tamanhos diferentes localizadas nos pontos $x^* = \{(0.4, 0.4), (0.4, -0.4), (-0.4, 0.6)\}$ com raios iguais a $\varepsilon^* = \{0.1, 0.05, 0.15\}$ respectivamente (Veja Tabela 2). Deseja-se obter as localizações e raios das anomalias, ou seja, reconstruir Ω^* representado na Figura 4(b) usando o algoritmo apresentado no capítulo anterior com a inserção de ruído $\mu = 0\%, 1\%, 5\%, 10\%$. Apesar da dificuldade da interferência entre três anomalias os resultados obtidos são bons. Com efeito, nas Figuras 6(a), 6(b) e 6(c) pode-se observar resultados muito satisfatórios. Na Figura 6(d) resultado um pouco degradado é verificado.

Na Figura 6 mostramos os resultados obtidos para $\mu = 0\%, 1\%, 5\%, 10\%$ de ruído. E para

Table 2: Exemplo 2. Target

	Primeira Anomalia	Segunda Anomalia	Terceira Anomalia
x^*	(0.400, 0.400)	(0.400, -0.400)	(-0.400, 0.600)
ε^*	0.100	0.050	0.150

uma comparação quantitativa dos resultados obtidos observe as Tabelas 3, 4, 5, 6.

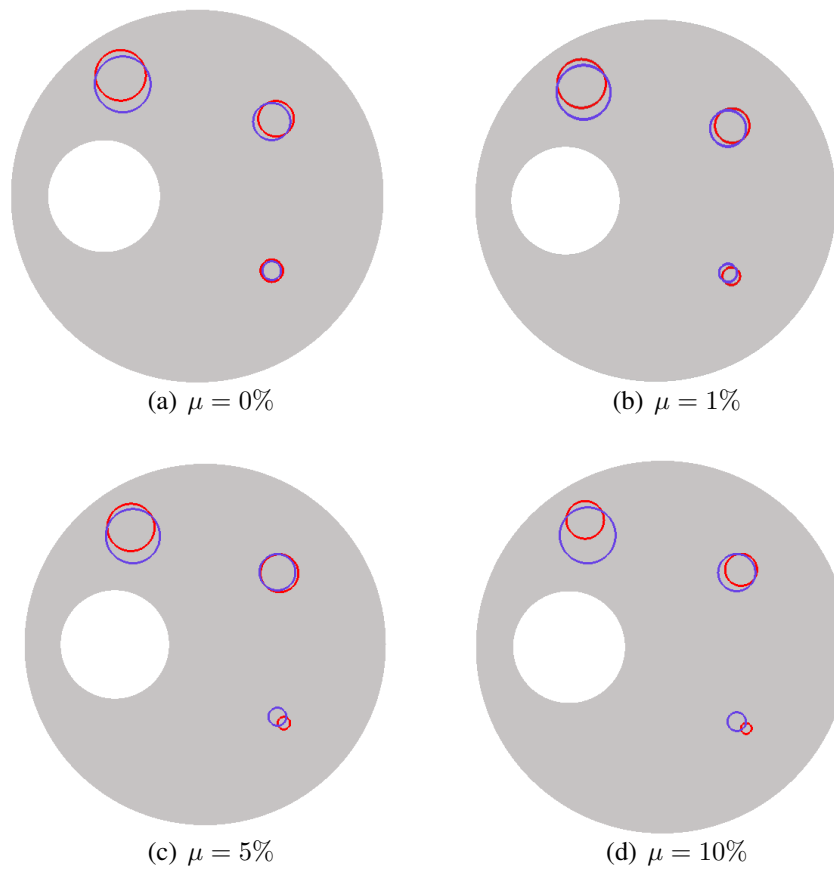


Figure 6: Exemplo 2. Resultados obtidos para diferentes níveis de ruído.

Table 3: Exemplo 2. Resultado obtido para $\mu = 0\%$

	Primeira Anomalia	Segunda Anomalia	Terceira Anomalia
x^*	(0.423, 0.415)	(0.400, -0.400)	(-0.411, 0.648)
ε^*	0.096	0.061	0.136

Table 4: Exemplo 2. Resultado obtido para $\mu = 1\%$

	Primeira Anomalia	Segunda Anomalia	Terceira Anomalia
x^*	(0.423, 0.415)	(0.418, -0.418)	(-0.411, 0.648)
ε^*	0.095	0.049	0.135

Table 5: Exemplo 2. Resultado obtido para $\mu = 5\%$

	Primeira Anomalia	Segunda Anomalia	Terceira Anomalia
x^*	(0.411, 0.394)	(0.435, -0.435)	(-0.411, 0.648)
ε^*	0.105	0.035	0.131

Table 6: Exemplo 2. Resultado obtido para $\mu = 10\%$

	Primeira Anomalia	Segunda Anomalia	Terceira Anomalia
x^*	(0.423, 0.415)	(0.451, -0.436)	(-0.414, 0.683)
ε^*	0.086	0.029	0.131

7 CONCLUSÃO

O intuito do trabalho foi resolver um problema inverso de reconstrução consistindo na detecção de furos a partir de leituras parciais obtidas em parte da fronteira do corpo. Tal problema foi reescrito na forma de um problema de otimização consistindo na minimização de um funcional de forma que mede a diferença entre o dado lido e o calculado numericamente. Uma expansão para a solução com dois termos foi adotada. A resolução do problema resultante consiste na busca de solução de dois problemas triviais de otimização, onde o primeiro fornece o tamanho ótimo do furo, enquanto que o segundo fornece a sua localização ótima. O método resultante é não iterativo e conduz a uma boa aproximação da solução.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio financeiro fornecido pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e pela FAPERJ (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro).

REFERÊNCIAS

- Allaire, G., Jouve, F., & Van Goethem, N. (2011). Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *Journal of Computational Physics*, 230(12), 5010–5044.
- Amstutz, S. & Andrä, H. (2006). A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216(2), 573–588.
- Bonnet, M. (1995). Bie and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15, 121–136.

- Colton, D. & Monk, P. (1992). The numerical solution of an inverse scattering problem for acoustic waves. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 49, 163–184.
- Hintermüller, M. & Laurain, A. (2008). Electrical impedance tomography: from topology to shape. *Control and Cybernetics*, 37(4), 913–933.
- Litman, A., Lesselier, D., & Santosa, F. (1998). Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of level-set. *Inverse Problems*, 14, 685–706.
- Sokołowski, J. & Zochowski, A. (1999). Topological derivative for optimal control problems. *Control and Cybernetics*, 28(3), 611–626.