



DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE MÁQUINAS E MECANISMOS ATRAVÉS DO MEF CONSIDERANDO LIGAÇÕES DESLIZANTES

Tiago Morkis Siqueira

morkis@usp.br

Humberto Breves Coda

hbcoda@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo

Avenida Trabalhador São Carlense 400, 13566-590, São Paulo, São Carlos, Brasil

Resumo. Neste trabalho é desenvolvida uma formulação lagrangeana total do método dos elementos finitos para análise dinâmica de estruturas reticuladas planas contendo ligações deslizantes. Estas são introduzidas ao sistema mecânico por meio de multiplicadores de Lagrange, permitindo sua utilização na simulação de diversos tipos de estruturas, máquinas e mecanismos. Também serão consideradas rótulas na estrutura por meio da compatibilidade cinemática dos graus de liberdade dos nós comuns. A formulação do método dos elementos finitos adotada utiliza como parâmetros nodais as posições e os giros de modo desacoplado. Assim, pode-se utilizar a cinemática exata para barras de Reissner na análise de grandes deslocamentos e rotações da estrutura. Adota-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona a medida de deformação objetiva de Green-Lagrange com o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. O equilíbrio dinâmico do sistema é obtido pelo princípio da energia potencial total estacionária e a solução do sistema não linear de equações resultante é feita pelo método de Newton-Raphson. A integração temporal é realizada pelo método de Newmark. Serão apresentados exemplos para validação da formulação desenvolvida, os quais serão comparados com soluções analíticas de modo a evidenciar as possibilidades de aplicação da formulação proposta.

Palavras-chave: Dinâmica não linear, Método dos elementos finitos posicional, Ligações deslizantes, Multiplicadores de Lagrange.

1 INTRODUÇÃO

A análise dinâmica linear de estruturas é um tema tradicional e de grande importância na engenharia. Entretanto, quando rotações ou deslocamentos finitos são inerentes ao comportamento da estrutura, as diferenças entre a configuração inicial e atual dos corpos não podem ser desprezadas na formulação do problema, como é o caso de aplicações voltadas a máquinas e mecanismos.

Além disso, a evolução da tecnologia dos materiais permite, a utilização de estruturas com maior esbeltez e flexibilidade impondo a necessidade de modelos mais precisos motivando a realização de análises em âmbito não linear geométrico.

Uma maneira de aperfeiçoar os códigos computacionais existentes de análise de estruturas reticuladas planas flexíveis é por meio da consideração de rótulas e ligações deslizantes internas entre os componentes do sistema. O uso desses tipos de conexões entre os corpos, conjuntamente a uma análise dinâmica na qual sejam considerados grandes deslocamentos e rotações, abre caminho para modelagem de diversas aplicações aproximando o modelo numérico da realidade.

Neste trabalho, é dado enfoque sobre a análise numérica de estruturas aporticadas planas que possuem rótulas e ligações deslizantes entre seus componentes, realizada por meio do método dos elementos finitos.

No que diz respeito à consideração da não linearidade geométrica dos corpos, será utilizada uma formulação do método dos elementos finitos baseada em posições em uma versão lagrangeana total. Utiliza-se a cinemática de Reissner para os elementos finitos de pórtico plano tal como em Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

Nesta formulação do método dos elementos finitos as equações de movimento são obtidas a partir da estacionariedade do funcional de energia potencial total e o sistema não linear de equações resultante é resolvido utilizando-se o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson. Já a integração temporal é obtida a partir do método de Newmark β tendo em vista ser a formulação lagrangeana total.

Conforme mencionado, serão consideradas neste trabalho restrições no movimento entre os membros estruturais na forma de rótulas e ligações deslizantes especialmente formuladas para o elemento finito utilizado.

As rótulas são introduzidas no sistema de equações através da compatibilidade cinemática dos nós comuns aos elementos conectados por meio de uma renumeração dos graus de liberdade nodais, conforme procedimento análogo ao descrito em Greco e Coda (2006). Já as ligações deslizantes são consideradas através da restrição do funcional de energia por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange, tendo seu equacionamento apresentado de forma original para a formulação lagrangeana total adotada neste trabalho.

O campo de aplicação da formulação para rótulas e ligações deslizantes é vasto. Estas podem ser utilizadas para modelar sistemas utilizados na indústria aeroespacial tais como aeronaves de asas rotativas (Bauchau e Bottasso, 2001; Bauchau, Bottasso e Nikishkov, 2001), sistemas desdobráveis como antenas de satélites, radiotelescópios e outros apêndices flexíveis (Bauchau, 2000; Mitsugi *et al.*, 2000; Géradin e Cardona, 2001; Ambrosio, Neto e Leal, 2007; Kiper e Söylemez, 2009; Dai, Guan e Guest, 2014).

De modo geral, em sistemas mecânicos essas conexões podem ser notadas em mecanismos articulados como os utilizados em pistões de automóveis, mecanismos de retorno rápido utilizados em máquinas de conformação, braços robóticos, e em maquinários diversos como retroescavadeiras (Bauchau, 2000; Bauchau e Bottasso, 2001; Garcia-Vallejo *et al.*, 2003; Greco e Coda, 2006; Yoo *et al.*, 2007; Hong e Ren, 2011; Moon *et al.*, 2014).

Neste trabalho serão apresentados exemplos para validação do equacionamento desenvolvido, os quais serão comparados com soluções analíticas de modo a evidenciar a consistência da formulação proposta.

2 CINEMÁTICA DO ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO

A cinemática de Reissner foi escolhida para o elemento finito de pórtico plano, o qual tem como parâmetros nodais as posições dos nós, e não os deslocamentos como encontrado tradicionalmente na literatura, além do ângulo da seção transversal, tal como nos trabalhos de Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

2.1 Configuração inicial

Para consideração da não linearidade geométrica, é necessário mapear o elemento finito em duas configurações distintas: a inicial e a atual. O mapeamento da configuração inicial, Fig. 1, inicia-se pela aproximação da linha de referência da barra de acordo com a seguinte expressão:

$$f_{0i}^m(\xi) = x_i^m(\xi) = \phi_\ell(\xi) X_{i\ell}^m, \quad (1)$$

nesta, i indica a direção (1 ou 2), m se refere à linha de referência e ℓ designa somatório (notação indicial) sobre as funções de forma $\phi_\ell(\xi)$ e as coordenadas $X_{i\ell}^m$ dos nós sobre a linha de referência.

Na Fig. 1 se ilustra o mapeamento para um elemento cúbico, entretanto, tanto na formulação apresentada quanto no código desenvolvido pode-se escolher qualquer quantidade de nós ou aproximação desejada. Adotam-se como funções de forma os polinômios de Lagrange.

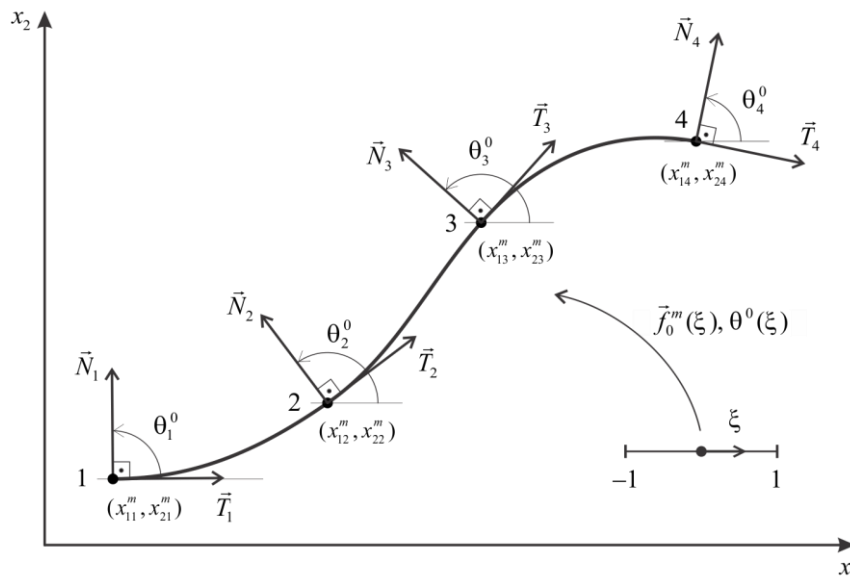


Figura 1 – Parametrização da linha de referência para a configuração inicial de um elemento com aproximação cúbica

O mapeamento da linha de referência a partir do espaço adimensional da variável ξ , Eq. (1) é chamado $\vec{f}_0^m(\xi)$. A posição inicial da seção transversal de cada nó do elemento é definida pelo ângulo θ_k^0 medido a partir da direção horizontal (eixo x_1), Fig. 1, que para a

configuração inicial é considerado ortogonal à linha de referência. Os ângulos iniciais dos nós são dados pela Eq. (2) a partir do vetor N_{ik} , normal à linha de referência. Nesta fórmula os parênteses repetidos indicam não haver soma.

$$\theta_k^0 = \arctg(N_{2(k)} / N_{1(k)}), \quad (2)$$

sendo, $N_{1(k)} = -T_{2k} / \|\vec{T}\|$ e $N_{2(k)} = T_{1k} / \|\vec{T}\|$, e o vetor T_{ik} , tangente à linha de referência, obtido por $T_{ik} = x_{i,\xi}(\xi_k) = \phi_{i,\xi}(\xi_k) X_{il}^m$.

Conhecidos os ângulos que definem a seção transversal para os nós do elemento é possível utilizar-se das mesmas funções de forma para aproximar um ângulo $\theta^0(\xi)$ ao longo da configuração inicial da barra como:

$$\theta^0(\xi) = \phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0 \quad (3)$$

De posse dessas informações é possível determinar a posição de qualquer ponto no interior da barra utilizando-se do vetor $g_i^0(\xi, \eta)$, Fig. 2, normal a um ponto da linha de referência na configuração inicial. Considera-se para isto a existência de uma variável adimensional a mais, η , ortogonal a ξ e que descreve a altura da barra no espaço real. Assim, um ponto genérico é expresso por:

$$x_i(\xi, \eta) = x_i^m(\xi) + g_i^0(\xi, \eta) \quad (4)$$

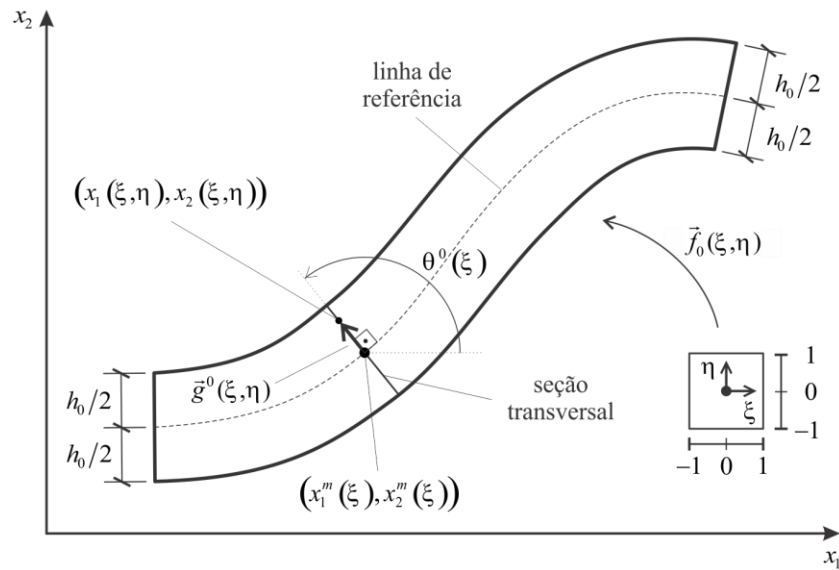


Figura 2 – Ponto P genérico na configuração inicial da barra

Adotando-se altura h_0 e base b_0 constantes para toda a barra, já que é tomado coeficiente de Poisson nulo, como explicado posteriormente, a linha de referência coincide com a linha média e pode-se determinar $g_i^0(\xi, \eta)$ em função do ângulo e da altura da seção transversal como:

$$g_1^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad \text{e} \quad g_2^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (5)$$

Substituindo-se as Eq. (1) e (5) na expressão (4) obtêm-se o mapeamento completo do elemento de pórtico na configuração inicial como:

$$f_{01}(\xi, \eta) = x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi) X_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (6)$$

$$f_{02}(\xi, \eta) = x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi) X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (7)$$

2.2 Configuração atual

As informações necessárias para que seja determinada a configuração inicial incluem as coordenadas da linha de referência, a altura e a base da seção transversal. A configuração atual é obtida por um processo iterativo não linear, de modo que, nesse momento, se escreve a configuração atual analogamente à inicial, imaginando-se que as variáveis incógnitas são conhecidas como tentativa no processo numérico de solução. Assim, a função de mapeamento da configuração atual $f_{1i}(\xi, \eta)$ é dada por:

$$f_{11}(\xi, \eta) = y_1(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \quad (8)$$

$$f_{12}(\xi, \eta) = y_2(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \quad (9)$$

Nestas expressões y_i representa as coordenadas atuais de um ponto genérico dentro da barra, $Y_{i\ell}^m$ são as coordenadas atuais dos nós do elemento e θ_ℓ são os ângulos atuais da seção transversal. A partir da Fig. 3 e da Eq. (8) e da Eq. (9) nota-se que as seções transversais permanecem planas, mas não mais ortogonais à linha de referência. Portanto, caracterizando a cinemática de Reissner, na qual se consideram os efeitos do cisalhamento. Além disso, a altura de referência da seção continua constante, já que na lei constitutiva a ser adotada impõe-se coeficiente de Poisson nulo.

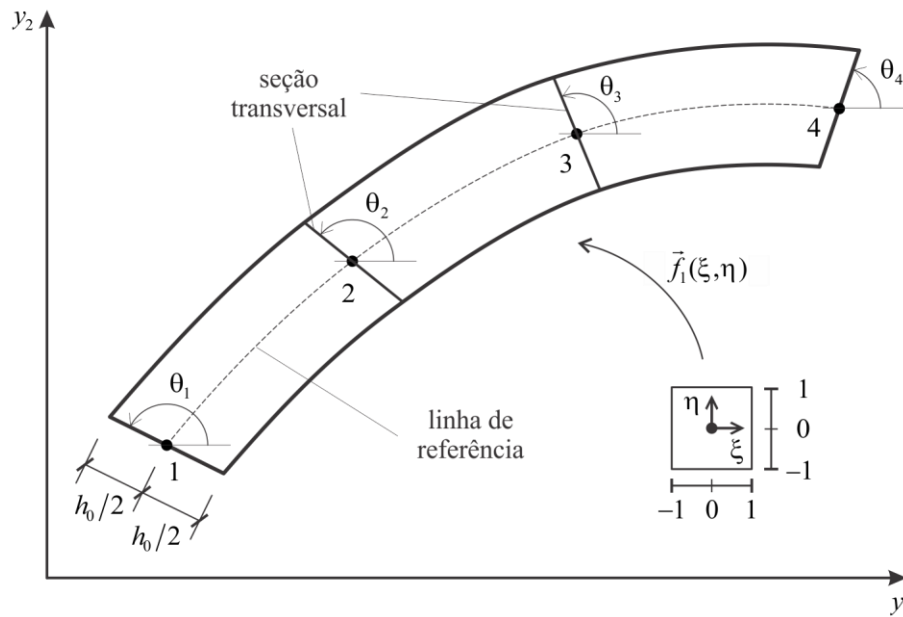


Figura 3 – Mapeamento da configuração atual – detalhe para os ângulos

2.3 Mudança de configuração e gradiente

Definidos os mapeamentos do espaço adimensional para as configurações inicial e atual pode-se descrever a mudança de configuração do corpo analisado. Isto é feito reunindo os mapeamentos da Fig. 2 e da Fig. 3 em uma única representação, Fig. 4, na qual a

função $\vec{f}$ descreve a mudança de configuração do estado inicial (B_0) para o estado atual (B). Esta função pode ser escrita como a composição entre os mapeamentos $\vec{f}_0$ e $\vec{f}_1$ como:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \quad (10)$$

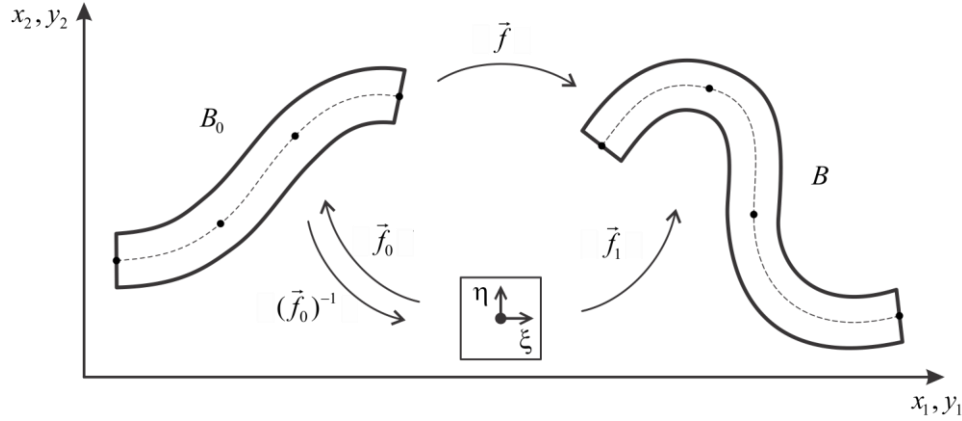


Figura 4 – Mudança de configuração – mapeamento posicional

O gradiente de $\vec{f}$, chamado de $\mathbf{A}$, que é um tensor de segunda ordem, é escrito a partir dos gradientes dos mapeamentos $\vec{f}_0$ e $\vec{f}_1$ por (Bonet *et al.*, 2000; Coda, 2003):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (11)$$

Os gradientes para os mapeamentos inicial e atual são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Os elementos destes são obtidos diretamente das expressões (6), (7), (8) e (9) para serem avaliados em pontos de integração nas coordenadas ξ e η . Após a substituição os gradientes resultam em:

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,\xi}(\xi) X_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k^0 & \frac{h_0}{2} \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \\ \phi_{\ell,\xi}(\xi) X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k^0 & \frac{h_0}{2} \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,\xi}(\xi) Y_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k & \frac{h_0}{2} \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \\ \phi_{\ell,\xi}(\xi) Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k & \frac{h_0}{2} \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

A medida de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}$, que é objetiva (Ogden, 1984), é adotada para desenvolver o elemento finito, sendo calculada por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki} A_{kj} - \delta_{ij}) \quad (15)$$

Nesta, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem e $\mathbf{C}$ é o alongamento de Cauchy-Green à direita.

3 ELASTODINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA APLICADA AO MEF POSICIONAL

3.1 Energia de deformação do elemento de pórtico

A energia específica de deformação de Saint-Venant-Kirchhoff é adotada neste trabalho para relacionar a deformação de Green ($\mathbf{E}$) ao segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$). Para um material homogêneo e isotrópico ela é dada por meio da seguinte expressão:

$$u_e = \frac{\mathbb{E}}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + \mathbb{G} (E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad \text{ou} \quad u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad (16)$$

Nesta, o coeficiente $\mathbb{E}$ se confunde com o módulo de elasticidade longitudinal para o caso de pequenas deformações e $\mathbb{G} = \mathbb{E}/[2(1+\nu)]$ com o módulo de elasticidade transversal, sendo ν o coeficiente de Poisson. O tensor de deformações de Green em notação indicial é escrito como E_{ij} e em notação diádica como $\mathbf{E}$. O tensor constitutivo elástico, em notação diádica, é indicado por $\mathfrak{C}$.

A expressão (16) evita o travamento por efeito Poisson (travamento volumétrico) ao desconsiderar a contração ou expansão do material quando adotado coeficiente de Poisson nulo. O travamento por cisalhamento é evitado pela alta ordem de aproximação utilizada na direção longitudinal, além disso, permite-se a variação do módulo de elasticidade transversal.

Como a deformação de Green foi escrita em função das posições nodais, a energia de deformação acumulada nos elementos estruturais é também função das posições. Esta é escrita como:

$$U_e(\vec{Y}) = \int_{V_0} u_e(\vec{Y}) dV_0 \quad (17)$$

Na qual V_0 é o volume inicial da estrutura analisada (Coda e Greco, 2004; Coda, 2009).

3.2 Energia potencial total e equilíbrio elastodinâmico

A energia potencial total do sistema mecânico $\Pi(\vec{Y})$ é dada pelo somatório da energia de deformação de todos os elementos de pórtico, da energia potencial das cargas externas concentradas (forças e momentos), da energia potencial das cargas distribuídas e da energia cinética, resultando em:

$$\Pi(\vec{Y}) = \int_{V_0} u_e(\vec{Y}) dV_0 - \vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \vec{y}^m dS_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} dV_0 \quad (18)$$

Nesta expressão $\vec{F}$ é o vetor de forças externas nodais (incluindo os momentos), $\vec{q}$ é o vetor de forças externas distribuídas, escrito em função dos valores nodais como $q_i = \phi_i(\xi) Q_{\xi i}$, ρ_0 é a massa específica associada à configuração inicial, $\dot{\vec{y}}$ é a velocidade de um ponto genérico dentro do domínio, $\vec{y}^m$ é a posição atual da linha de referência dos elementos de pórticos (Eq. (8) e Eq. (9)) e dS_0 é o comprimento infinitesimal inicial da linha de referência do elemento de pórtico curvo.

De modo a obter se obter a configuração de equilíbrio aplica-se o princípio da energia potencial estacionária sobre a expressão (18) utilizando como parâmetros as posições nodais:

$$\delta\mathcal{I}(\vec{Y}) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \frac{\partial(\vec{F} \cdot \vec{Y})}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \frac{\partial(\vec{q} \cdot \vec{y}^m)}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial(\dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}})}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0} \quad (19)$$

Sabendo que a energia específica de deformação é escrita em função das posições nodais por meio da deformação de Green, $u_e = u_e(\mathbf{E}(\vec{Y}))$, e que as forças são conservativas (independem da posição atual da estrutura), pode-se reescrever a expressão (19) como:

$$\delta\mathcal{I}(\vec{Y}) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial \vec{y}^m}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \frac{\partial(\dot{\vec{y}})}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0} \quad (20)$$

Do princípio do conjugado energético, nota-se que o primeiro termo da primeira integral é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$).

A posição atual da linha de referência pode ser obtida como $\vec{y}^m = \vec{\phi} \cdot \vec{Y}$, portanto sua derivada resulta em $\partial \vec{y}^m / \partial \vec{Y} = \vec{\phi}$. Utilizando-se, de modo simplificado, uma relação análoga para a velocidade de qualquer ponto do domínio $\dot{\vec{y}}$, pode-se descrever a última integral da Eq. (20) em função das velocidades nodais $\dot{\vec{Y}}$ e das funções de forma $\vec{\phi}$ pela expressão $\dot{\vec{y}} = \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}}$, resultando em:

$$\delta\mathcal{I}(\vec{Y}) = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \otimes \vec{\phi} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{Y}}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0} \quad (21)$$

onde o símbolo $\otimes$ representa o produto tensorial do espaço das direções associado à $\vec{q}$ com o espaço dos nós associado a $\vec{\phi}$, ou entre ambos espaços dos nós.

É importante ressaltar que esta simplificação para $\dot{\vec{y}}$ implica em se desprezar a inércia rotacional da barra. Todavia neste trabalho se lida com barras relativamente esbeltas para as quais a inércia de rotação pode ser desprezada (Coda e Greco, 2004).

A derivada de $\dot{\vec{Y}}$ pelas posições nodais $\vec{Y}$, presente na última integral da expressão (21), pode ser desenvolvida em notação indicial, como:

$$\frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Y_j} = \frac{d\dot{Y}_i}{dY_{(i)}} = \frac{d\dot{Y}_i}{dt} \frac{dt}{dY_{(i)}} = \frac{d\dot{Y}_i}{dt} \left(\frac{dY_{(i)}}{dt} \right)^{-1} = \ddot{Y}_i \frac{1}{\dot{Y}_{(i)}} \quad (22)$$

nesta fórmula os parênteses indicam que não há soma na variável i .

As passagens acima só são possíveis, pois as derivadas são unidimensionais, ou seja, cada componente de velocidade só depende de sua componente de posição. Substituindo a relação da Eq. (22) na Eq. (21) obtém-se:

$$\delta\mathcal{I}(\vec{Y}) = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \otimes \vec{\phi} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \ddot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0} \quad (23)$$

De modo a simplificar o entendimento físico do procedimento não linear apresentado a seguir, pode-se reescrever a Eq. (23) como:

$$\delta\mathcal{I}(\vec{Y}) = \vec{F}^{\text{int}} \cdot \delta \vec{Y} - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \mathbf{L} \cdot \vec{Q} \cdot \delta \vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} = \vec{0} \quad (24)$$

Nesta, $\vec{F}^{\text{int}}$ representa o vetor de forças nodais internas, $\mathbf{L}$ é a matriz que transforma as cargas distribuídas em cargas nodais equivalentes, $\mathbf{M}$ é a matriz de massa (constante) e $\mathbf{D}$ é a matriz de amortecimento proporcional à massa introduzida ao sistema (Lanczos, 1970; Coda e Paccola, 2009; 2011). Dada à arbitrariedade de $\delta \vec{Y}$, a expressão (24) representa a equação do movimento (equilíbrio dinâmico não linear geométrico):

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} - \mathbf{L} \cdot \vec{Q} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (25)$$

3.3 Tensor de Piola-Kirchhoff e derivada da deformação de Green

O tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie $\mathbf{S}$ presente na Eq. (23) é obtido a partir da Eq. (16) e é escrito como:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} E_{11} & 2\mathbb{G} E_{12} \\ 2\mathbb{G} E_{12} & \mathbb{E} E_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

A derivada da deformação de Green em relação às posições nodais é obtida utilizando-se das Eq. (11) e (15) por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} [(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Nota-se que como $\partial (\mathbf{A}^1)^t / \partial \vec{Y} = (\partial \mathbf{A}^1 / \partial \vec{Y})^t$ a primeira parcela da soma é a transposta da segunda, o que é interessante em termos de implementação computacional.

Conhecido $\mathbf{A}^1$ a partir da Eq. (14), sua derivada para os graus de liberdade Y_α^β , sendo α a direção (1, 2 ou 3, para o ângulo) e β o nó do elemento, é escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_1^\beta} = \begin{bmatrix} \phi'_\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_2^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi'_\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_3^\beta} = \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \theta_\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta (\phi'_k \theta_k) - \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi'_\beta & -\frac{h_0}{2} \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \\ -\frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta (\phi'_k \theta_k) + \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi'_\beta & \frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \end{bmatrix} \quad (29)$$

com somatório sobre os nós ℓ e k do elemento (notação indicial).

Assim, a partir destas expressões é possível calcular as forças internas $\vec{F}^{\text{int}}$ do elemento, conforme as Eq. (19) a (25), como:

$$\vec{F}^{\text{int}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \quad (30)$$

Neste trabalho a integral acima foi avaliada por meio de integração numérica com o uso da quadratura de Gauss-Legendre pela expressão:

$$\vec{F}^{\text{int}} = b_0 w_{ig} w_{jg} \mathbf{S}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \det \mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (31)$$

na qual w_{ig} e w_{jg} são os pesos de Gauss para os pontos de integração ξ_{ig} e η_{jg} , respectivamente, e ig e jg indicam soma para a quantidade de pontos escolhida em cada direção.

4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR E INTEGRAÇÃO TEMPORAL

Utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson para solução do sistema não linear de equações e as expressões do método de Newmark para integração temporal. A Eq. (25) é reescrita, juntando-se as forças externas conservativas em um único vetor $\vec{F}$, como:

$$\vec{g} = \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (32)$$

Nesta expressão $\vec{g}$ é um vetor nulo quando a posição tentativa $\vec{Y}$ é a solução correta do problema ao se calcular as forças internas $\vec{F}^{\text{int}}$, caso contrário, este vetor representa o desbalanceamento mecânico do sistema. A expressão (32) representa a equação de equilíbrio dinâmico para qualquer instante de tempo. De modo a resolvê-la inicialmente se escreve este equilíbrio para um instante de tempo t_{s+1} como:

$$\vec{g}|_{s+1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \bigg|_{s+1} = \frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} \bigg|_{s+1} - \vec{F}_{s+1} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} = \vec{0} \quad (33)$$

As aproximações de Newmark (1959) são dadas pelas expressões abaixo, sendo β e γ os seus parâmetros usuais e Δt o incremento de tempo.

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \Delta t \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s + \beta \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \right] \quad (34)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \quad (35)$$

Substituindo as expressões (34) e (35) na Eq. (33), tem-se:

$$\vec{g}|_{s+1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \bigg|_{s+1} = \frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} \bigg|_{s+1} - \vec{F}_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{T}_s + \mathbf{D} \cdot \vec{R}_s + \frac{\gamma \mathbf{D}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \gamma \Delta t \mathbf{D} \cdot \vec{T}_s = \vec{0} \quad (36)$$

Na qual os vetores $\vec{T}_s$ e $\vec{R}_s$ apresentam as contribuições do instante de tempo passado t_s e são escritas como:

$$\vec{T}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \quad \text{e} \quad \vec{R}_s = \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \quad (37)$$

A Eq. (36) pode ser entendida simplesmente como $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \vec{0}$ e é claramente não linear em relação à $\vec{Y}_{s+1}$. De modo a se expandir esta equação em série de Taylor escreve-se a segunda derivada da energia potencial total como:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \bigg|_{s+1} = \mathbf{H} = \nabla \vec{g} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \bigg|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{D}}{\beta \Delta t} \quad (38)$$

A expansão de primeira ordem resulta em:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) \cong \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) + \nabla \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta \vec{Y}_{s+1} = \vec{0} \quad (39)$$

Desta última expressão escreve-se o procedimento de Newton-Raphson para solução do sistema não linear como:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y}_{s+1} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad \text{e} \quad \Delta \vec{Y}_{s+1} = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (40)$$

No qual $\vec{Y}_{s+1}^0$ é uma posição tentativa (usualmente a posição de equilíbrio do corpo no instante anterior) para o cálculo de $\vec{Y}_{s+1}$ utilizado na Eq. (36). Determinando-se $\Delta \vec{Y}_{s+1}$ pode-se calcular a nova posição tentativa para $\vec{Y}_{s+1}$ como:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_{s+1}^0 + \Delta \vec{Y}_{s+1} \quad (41)$$

Em cada iteração a velocidade é corrigida pela expressão (35) e a aceleração pela expressão abaixo:

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1} - \vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} - \vec{T}_s \quad (42)$$

O critério de parada para uma dada tolerância TOL é satisfeito quando:

$$\frac{\|\vec{g}(\vec{Y}_{S+1})\|}{\|\vec{F}\|} \leq TOL \quad \text{e} \quad \frac{\|\Delta \vec{Y}_{S+1}\|}{\|\vec{X}\|} \leq TOL \quad (43)$$

sendo $\vec{X}$ a posição inicial da estrutura.

4.1 Hessiana do elemento de pórtico plano

A hessiana $\mathbf{H}$ do elemento é necessária ao processo de solução do sistema não linear de equações como indicado na Eq. (40). Ela é dada para o caso dinâmico pela Eq. (38). Como se considera que a função da energia específica de deformação u_e é contínua e finita no domínio V_0 do elemento e seu intervalo de integração possui valores constantes, a primeira parcela da Eq. (38) pode ser desenvolvida como:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right) dV_0 \quad (44)$$

Nesta última integral, a derivada do tensor de Piola-Kirchhoff $\partial \mathbf{S} / \partial \vec{Y}$ para as incógnitas nodais é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \begin{bmatrix} \mathbb{E} E_{11} & 2G E_{12} \\ 2G E_{21} & \mathbb{E} E_{22} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

sendo as derivadas da deformação de Green conhecidas do cálculo da força interna $\vec{F}^{\text{int}}$.

Ainda é necessário calcular a segunda derivada da deformação de Green dada por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \left[2(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \mathbf{O} + \mathbf{O}^t \right], \quad (46)$$

com,

$$\mathbf{O} = (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (47)$$

Nestas expressões todos os termos são conhecidos, exceto $\partial^2 \mathbf{A}^1 / \partial \vec{Y} \partial \vec{Y}$, entretanto este assume valores não nulos somente para os graus de liberdade de giro (direção 3) resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial Y_3^\beta \partial Y_3^\zeta} &= \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial \theta_\beta \partial \theta_\zeta} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} \eta \left\{ \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta (\phi'_k \theta_k) - \cos(\phi_\ell \theta_\ell) [\phi_\beta \phi'_\zeta + \phi'_\beta \phi_\zeta] \right\} & -\frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta \\ -\frac{h_0}{2} \eta \left\{ \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta (\phi'_k \theta_k) + \sin(\phi_\ell \theta_\ell) [\phi_\beta \phi'_\zeta + \phi'_\beta \phi_\zeta] \right\} & -\frac{h_0}{2} \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta \end{bmatrix}, \quad (48) \end{aligned}$$

sendo β e ζ os nós do elemento e com somatório sobre os nós ℓ e k do elemento (notação indicial).

A integração da segunda derivada da energia de deformação foi realizada numericamente com o uso da quadratura de Gauss-Legendre pela expressão:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = b_0 w_{ig} w_{jg} \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) + \mathbf{S}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \right] \det \mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (49)$$

na qual w_{ig} e w_{jg} são os pesos de Gauss para os pontos de integração ξ_{ig} e η_{jg} , respectivamente, e ig e jg indicam soma para a quantidade de pontos escolhida em cada direção.

A matriz de massa, Eq. (23), é calculada numericamente de modo análogo como:

$$\mathbf{M} = \rho_0 b_0 w_{ig} w_{jg} \vec{\phi}(\xi_{ig}) \otimes \vec{\phi}(\eta_{jg}) \det \mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (50)$$

e a matriz de amortecimento é obtida por um fator de proporcionalidade λ_D como $\mathbf{D} = \lambda_D \mathbf{M}$ (amortecimento de Rayleigh).

5 INTRODUÇÃO DE LIGAÇÕES DESLIZANTES

A introdução das ligações deslizantes, seja na forma de uma junta prismática ou cilíndrica, nos elementos finitos de pórtico plano é realizada por meio da introdução de multiplicadores de Lagrange ao funcional de energia de maneira a restringir a posição, e/ou o giro, de um nó pertencente a um elemento finito às coordenadas geradas no interior de outro elemento finito qualquer, considerando a movimentação concomitante de todos os nós do problema estudado. Esta técnica é amplamente utilizada na modelagem de juntas entre corpos flexíveis e pode ser encontrada em diversos trabalhos tais como de Cardona, Geradin e Doan (1991), Bauchau (2000), Bauchau e Bottasso (2001), G eradin e Cardona (2001), Garcia-Vallejo *et al.* (2003), Sugiyama, Escalona e Shabana (2003) e Lee *et al.* (2008). Entretanto, é aplicada originalmente neste trabalho para a formulação lagrangeana total em elementos finitos considerando a cinemática de Reissner baseada em posições.

Sua maior vantagem é a simplicidade com a qual é possível aplicar condições auxiliares ao elemento finito já existente por meio de restrições no movimento dos nós que possuem a ligação deslizante.

5.1 Restrições cinemáticas

A introdução das ligações deslizantes entre elementos finitos de pórtico plano é realizada por meio da consideração de um elemento denominado deslizante. Este possui um nó restringido a se deslocar sobre outros elementos. O grupo de elementos sobre os quais a ligação deslizante tem liberdade de movimento é designado de trajetória da ligação.

A Fig. 5 exemplifica um conjunto que inclui um elemento deslizante e a trajetória da ligação com aproximação cúbica. Apesar dessa ilustração, a formulação desenvolvida a   aplicável a elementos finitos com qualquer número de nós.

Nos itens que seguem, utiliza-se a not  a $(\bar{\bullet})$ para o elemento da trajetória e $(\hat{\bullet})$ para o elemento deslizante.

Os parâmetros nodais (posição e ângulo) do nó com a ligação deslizante, denominado n  deslizante, e referido pelo  ndice P, podem ser descritos em função dos parâmetros nodais do elemento da trajetória e da variável $s_p = s(\xi_p)$. Esta indica a localização do nó deslizante sobre o comprimento da sua trajetória a partir de um ponto arbitrário nela. Já a coordenada ξ_p localiza o nó deslizante no espaço adimensional da linha de referência de um determinado elemento da trajetória.

A cinemática da ligação deslizante para uma junta prismática  , então, escrita por meio das relações:

$$\hat{Y}_i^P(s_p, \bar{Y}_i^\ell) = \phi_\ell(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} \quad (51)$$

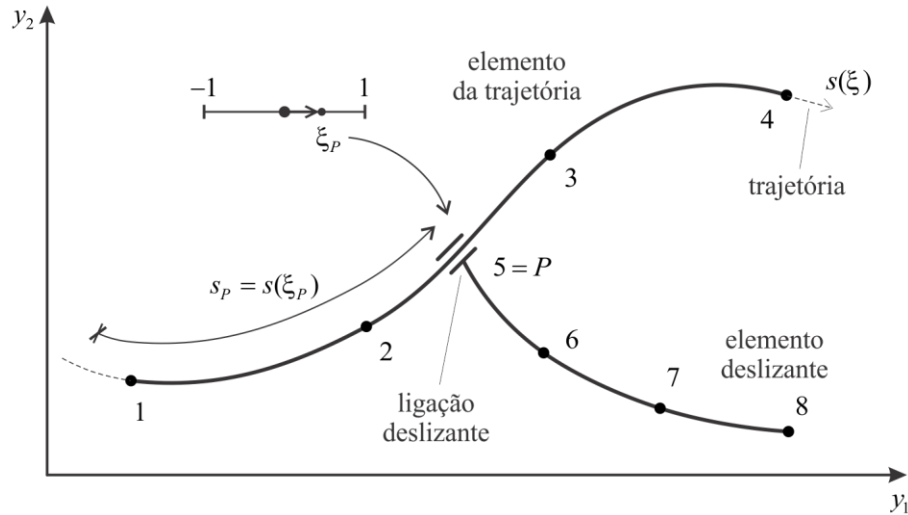


Figura 5 – Ligação deslizante em um conjunto de elementos com aproximação cúbica

Nesta expressão: i indica a direção (1, 2 ou 3, para o ângulo); ℓ se refere aos nós do elemento da trajetória (notação indicial); $\hat{Y}_i^P$ e $\bar{Y}_i^\ell$ referem-se às posições e ao ângulo do nó deslizante e dos nós do elemento mestre, respectivamente; $\Delta\theta_p^0$ é a diferença, na configuração inicial, entre o ângulo do nó deslizante e o ângulo do elemento da trajetória no mesmo ponto P; e δ_{i3} é o operador delta de Kronecker, igual à unidade quando a direção se referir ao ângulo e nulo caso contrário.

Para modelagem de uma junta cilíndrica utiliza-se da mesma hipótese representada pela Eq. (51), entretanto, é liberado o giro. Isso é possível simplesmente desconsiderando-se a restrição cinemática para o ângulo ($i = 3$).

A presença de $\Delta\theta_p^0$ na Eq. (51) se deve ao fato do ângulo ser medido a partir do eixo horizontal no sentido positivo (de y_1 para y_2) até o vetor normal de um ponto da linha de referência, fazendo com que seu valor dependa da disposição e orientação dos nós do elemento finito no plano. Isso leva a diferença existente no valor do ângulo do nó deslizante e um ângulo medido no elemento da trajetória no ponto P, que, apesar de localizarem-se no mesmo ponto do plano, pertencem a elementos distintos.

Conforme se observa na Fig. 6, pode-se expressar a diferença entre ângulos como $\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \bar{\theta}_p^0$. O valor do ângulo medido no elemento da trajetória $\bar{\theta}_p^0$ é obtido pela interpolação dos demais ângulos desse elemento com as funções de forma. Assim, chega-se à expressão:

$$\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \phi_\ell(\xi_p)\bar{\theta}_\ell^0 \quad (52)$$

Ressalta-se que pelo próprio caráter da junta prismática (engaste móvel) essa diferença se mantém constante durante o tempo, portanto seu valor obtido na configuração inicial não se altera com as mudanças de configuração do corpo.

5.2 Alteração na equação do movimento

A inclusão das condições auxiliares dadas pelas Eq. (51) é realizada pela introdução de multiplicadores de Lagrange λ_i para cada uma das três direções i (Lanczos, 1970). Escreve-se um funcional de energia restrito $\Pi_L(\vec{Y}_L)$ a partir do funcional da Eq. (18) como:

$$\Pi_L(\vec{Y}_L) = \Pi(\vec{Y}) + \mathbb{L}(\vec{Y}_L), \quad (53)$$

com $\mathbb{L}(\vec{Y}_L) = \lambda_i \left[\hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_P^0 \delta_{i3} \right]$.

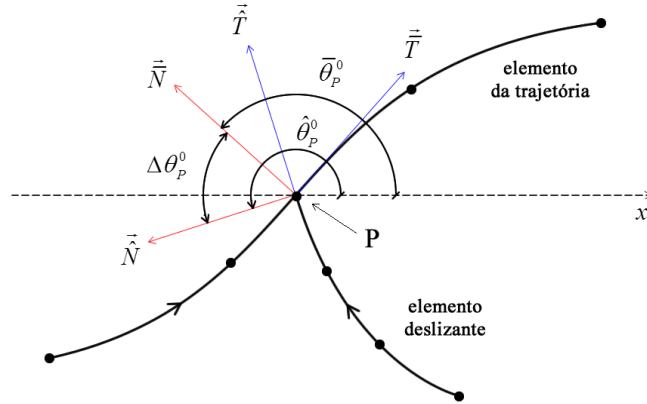


Figura 6 – Diferença entre o ângulo do ponto P medido no elemento mestre e no elemento escravo (a seta nos elementos finitos indica a orientação desses)

Analogamente ao que foi desenvolvido para $\Pi(\vec{Y})$, de modo a obter uma configuração de equilíbrio, aplica-se o princípio da energia potencial estacionária sobre a expressão (53). Utilizam-se como parâmetros as posições e ângulos dos nós do conjunto de elementos que apresentam a ligação deslizante, a variável s_p e os multiplicadores λ_i . Estes parâmetros incógnitos são convenientemente agrupados no vetor $\vec{Y}_L$. Da aplicação da estacionariedade ao funcional restrito resulta:

$$\delta \Pi_L = \delta \Pi + \delta \mathbb{L} = 0 \quad (54)$$

O termo $\delta \Pi$ se desenvolve conforme a Eq. (19) resultando na equação do movimento para os elementos livres. Já o termo $\delta \mathbb{L}$ é escrito como:

$$\delta \mathbb{L} = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \bar{Y}_i^\alpha} \delta \bar{Y}_i^\alpha + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \hat{Y}_i^\beta} \delta \hat{Y}_i^\beta + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial s_p} \delta s_p, \quad (55)$$

sendo α e β os nós dos elementos da trajetória e deslizante, respectivamente.

Resulta da Eq. (55) a seguinte expressão a ser adicionada à variação do funcional:

$$\delta \mathbb{L} = \vec{\Lambda} \cdot \delta \vec{Y}_L = \begin{Bmatrix} -\lambda_i \phi_\alpha(\xi_P) \\ \lambda_i \\ 0 \\ \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_P^0 \delta_{i3} \\ -\lambda_i \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \bar{Y}_i^\alpha \\ \delta \hat{Y}_i^P \\ \delta \hat{Y}_i^k \\ \delta \lambda_i \\ \delta s_p \end{Bmatrix}, \quad (56)$$

sendo k os nós do elemento deslizante, exceto o nó P que possui a ligação, e J_P o jacobiano da transformação do espaço adimensional da variável ξ para a variável $s(\xi)$ avaliado no ponto P escrito como $J_P = \sqrt{[\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_1^\ell]^2 + [\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_2^\ell]^2}$.

Portanto, a equação do movimento, Eq. (25), se reescreve como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_L + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_L + \vec{\Lambda} = \vec{0}, \quad (57)$$

na qual se reúnem as forças externas conservativas em um único vetor $\vec{F}$.

5.3 Solução do sistema não linear

O sistema não linear, Eq. (57), é resolvido por meio do algoritmo de Newton-Raphson, de maneira semelhante ao realizado no item 4. O vetor de desbalanceamento $\vec{g}_L$ para o novo sistema de equações toma a forma:

$$\vec{g}_L = \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_L + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_L + \vec{\Lambda} = \vec{0} \quad (58)$$

Nota-se que nesta expressão há somente o acréscimo do termo $\vec{\Lambda}$ referente às condições auxiliares impostas com os multiplicadores de Lagrange.

A expansão da Eq. (58) em série de Taylor, até a primeira ordem, resulta em:

$$\mathbf{H}_L \cdot (\Delta \vec{Y}_L)_{s+1} = -\vec{g}_L \left((\vec{Y}_L)_{s+1}^0 \right) \quad (59)$$

Nesta, $(\vec{Y}_L)_{s+1}^0$ é um vetor tentativa que contempla os parâmetros incógnitos e é escrito como $\left((\vec{Y}_L)_{s+1}^0 \right)^t = \left\{ \bar{Y}_i^\alpha \quad \hat{Y}_i^P \quad \hat{Y}_i^k \quad \lambda_i \quad s_p \right\}_{s+1}^0$.

A nova matriz hessiana $\mathbf{H}_L = \nabla \vec{g}_L$, obtida da segunda derivada do funcional restrito $\Pi_L(\vec{Y}_L)$, utilizada para a determinação da correção $(\Delta \vec{Y}_L)_{s+1}$ é dada por:

$$\mathbf{H}_L \cdot (\Delta \vec{Y}_L)_{s+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \vec{Y} \\ \Delta \vec{L} \end{Bmatrix}_{s+1}, \quad (60)$$

sendo, $(\Delta \vec{Y}_{s+1})^t = \left\{ \Delta \bar{Y}_i^\alpha \quad \Delta \hat{Y}_i^P \quad \Delta \hat{Y}_i^k \right\}_{s+1}$ o vetor que agrupa os parâmetros nodais do elemento finito de pórtico e $(\Delta \vec{L}_{s+1})^t = \left\{ \Delta \lambda_i \quad \Delta s_p \right\}_{s+1}$ o vetor que compõe os graus de liberdade adicionais do sistema, associados à variável s_p e aos multiplicadores.

A matriz $\mathbf{H}$ é a hessiana do conjunto de elementos obtida pela Eq. (38) e as demais matrizes são dadas por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\phi_\alpha(\xi_P) & -\lambda_i \phi_{\alpha,\xi}(\xi_P) / J_P \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P \\ -\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P & H_{s_p s_p} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

com,

$$H_{s_p s_p} = \lambda_i \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \left(\frac{1}{J_P} \right)^4 \phi_{n,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^n \phi_{m,\xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^m - \lambda_i \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \left(\frac{1}{J_P} \right)^2 \quad (62)$$

Nesta expressão, em notação indicial, o índice i se refere à direção (1, 2 ou 3, para o ângulo), k também indica a direção (1 ou 2), e, ℓ , m e n se referem aos nós do elemento da trajetória.

5.4 Determinação da coordenada adimensional da ligação deslizante

Para se determinar a coordenada adimensional inicial ξ_P , necessária ao procedimento numérico, utiliza-se o método dos mínimos quadrados para a solução do sistema sobredeterminado formado pelas Eq. (51) sem a presença dos termos relacionados ao giro. Para tanto, conhecidos os valores das posições dos elementos, é suficiente escrever-se os resíduos $r_i(\xi_P)$ das duas direções coordenadas como:

$$r_i(\xi_p) = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell \quad (63)$$

A função $p(\xi_p)$ a ser minimizada pode ser escrita como (Nocedal e Wright, 1999):

$$p(\xi_p) = \frac{1}{2} [r_i(\xi_p)]^2 = 0 \quad (64)$$

Expandindo-se esta função em série de Taylor até a aproximação de primeira ordem tem-se:

$$p(\xi_p) \cong \nabla p(\xi_p^0) + \nabla^2 p(\xi_p^0) \Delta \xi_p = 0 \quad (65)$$

Sendo ξ_p^0 um valor tentativa e desenvolvendo-se as derivadas necessárias pode-se encontrar a correção $\Delta \xi_p$ por:

$$\Delta \xi_p = - \frac{\nabla p(\xi_p^0)}{\nabla^2 p(\xi_p^0)}, \quad (66)$$

e o valor da variável como $\xi_p = \xi_p^0 + \Delta \xi_p$, até que o critério de parada $|\Delta \xi_p / \xi_p| \leq TOL$ seja satisfeito para uma dada tolerância TOL .

6 CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS

Para o cálculo dos esforços seccionais é realizada a integração das tensões de Cauchy sobre a área da seção transversal da barra. A tensão real σ , ou de Cauchy, está relacionada com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S pela expressão (Ogden, 1984):

$$\sigma = \frac{1}{\det A} A \cdot S \cdot A^t, \quad (67)$$

sendo, A o gradiente da função mudança de configuração dado pela Eq. (11).

Determinada a tensão de Cauchy para o sistema coordenado, convencionou-se um sistema de eixos local no qual sua coordenada local $\tilde{y}_1$ é perpendicular à seção transversal em um dado ponto e $\tilde{y}_2$ pertence ao plano da seção.

Assim, o esforço normal N , o esforço cortante V e o momento fletor M são dados por:

$$N = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{11} dA_0, \quad V = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{12} dA_0 = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{21} dA_0 \quad \text{e} \quad M = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{11} \tilde{y}_2 dA_0, \quad (68)$$

sendo $\tilde{\sigma}$ o tensor de tensões rotacionado para os eixos $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$, e A_0 é a área da seção transversal, neste caso igual à área inicial.

7 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A seguir apresentam-se alguns exemplos de uso das ligações deslizantes na simulação numérica de estruturas e mecanismos de modo a verificar os resultados obtidos e demonstrar sua aplicabilidade.

7.1 Carga móvel sobre viga biapoiada flexível

Neste exemplo apresenta-se uma carga constante $P = 628,48 N$ que se move horizontalmente com uma velocidade v por sobre uma viga simplesmente apoiada de 4,0 m de comprimento conforme a Fig. 7.

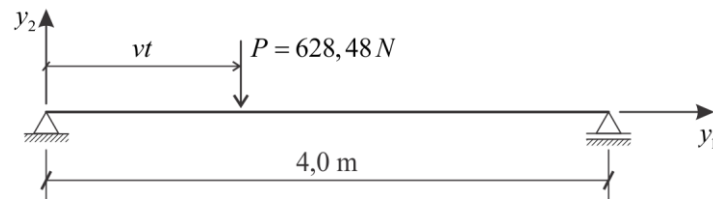


Figura 7 – Carga móvel com velocidade constante sobre viga flexível

A movimentação da carga é aqui idealizada por meio de um elemento finito orientado verticalmente com deslocamento imposto na direção da velocidade e em contato com a viga por meio de uma ligação deslizante. A carga concentrada é, então, aplicada ao nó que possui a ligação. Considera-se este elemento sem massa e com comprimento de 0,01% do comprimento da viga.

A viga possui seção quadrada de lado 0,10 m, massa específica de 8000,0 kg/m³, módulo de elasticidade longitudinal de 207,0 GPa e módulo transversal de 103,5 GPa. Esta foi modelada com 26 elementos finitos cúbicos sendo que se concentram seis elementos finitos em um trecho central com extensão de 0,10 m. Apesar de não ser necessária tal discretização para obtenção dos deslocamentos (Fig. 8) ela foi adotada de modo a se obter maior precisão dos esforços internos (Fig. 9 e 10) do nó no meio do vão.

Os dados desse problema foram adotados tal qual o exemplo apresentado por Hong e Ren (2011) e comparados com a solução analítica do problema da carga móvel apresentada por Frýba (1972). São analisadas respostas para três velocidades distintas, $0,2v_{cr}$, $0,4v_{cr}$ e $1,0v_{cr}$, sendo $v_{cr} = 115,33 \text{ m/s}$ a velocidade crítica que impõe deslocamento máximo durante o percurso da carga na viga. A resposta ilustrada nas figuras é coincidente com a solução analítica demonstrando, assim, a consistência da formulação proposta.

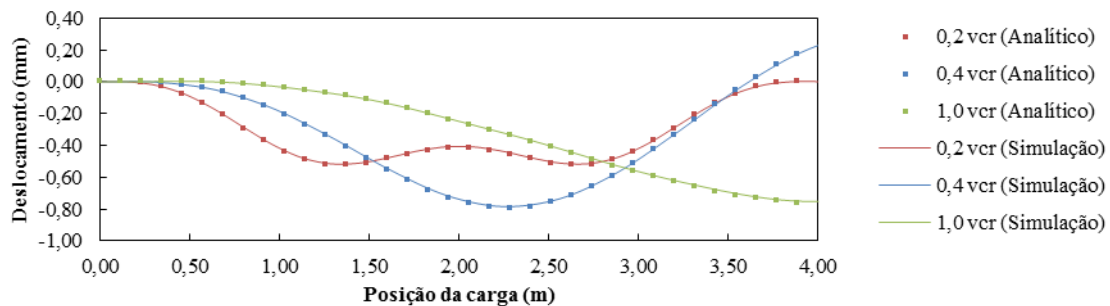


Figura 8 – Deslocamento vertical no meio vão

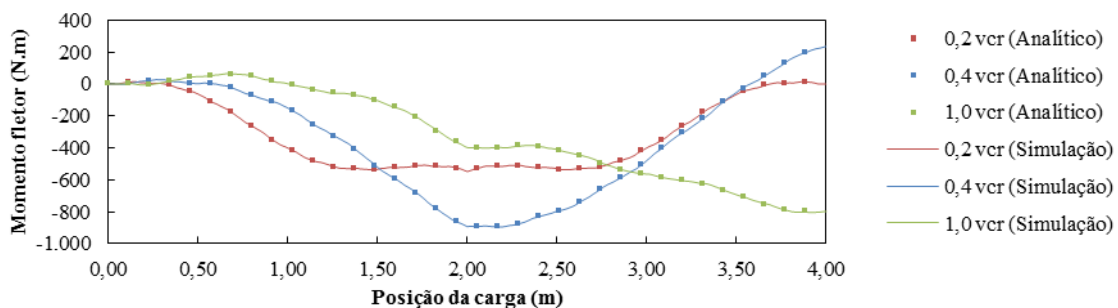


Figura 9 – Momento fletor no meio vão

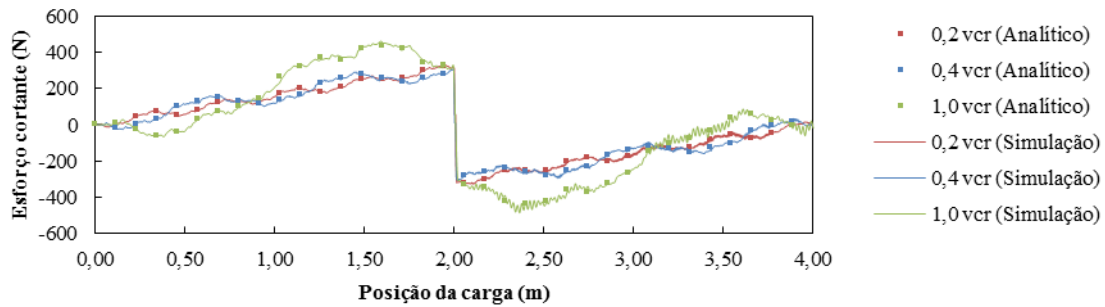


Figura 10 – Esforço cortante no meio vão

7.2 Mecanismo de retorno rápido

Apresenta-se um clássico mecanismo de retorno rápido utilizado amplamente em diversas máquinas como ilustrado na Fig. 11. A configuração e as propriedades deste mecanismo foram adotadas tal como em Bauchau (2000). O mecanismo é composto por um braço AB de 1,00 m de comprimento que gira em torno do apoio B e é ligado a uma barra NA de 0,25 m de comprimento. O movimento do sistema é imposto por uma manivela RS de 0,20 m de comprimento que gira em torno do apoio R com uma velocidade angular constante $\Omega = 5\pi \text{ rad/s}$ e desliza sobre o braço por meio de uma junta cilíndrica localizada no nó S.

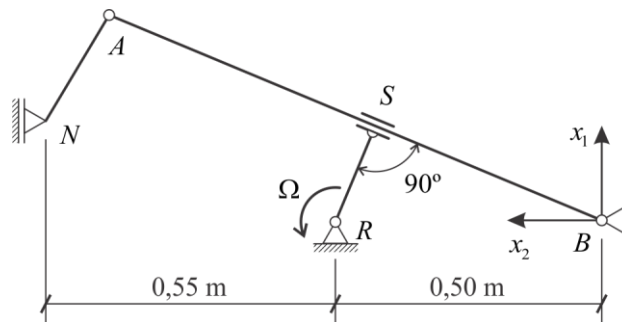


Figura 11 – Mecanismo de retorno rápido na configuração inicial

Todas as barras possuem seção transversal quadrada de lado 6,0 cm e massa específica de $1724,82 \text{ kg/m}^3$ e são modeladas com elementos finitos de aproximação cúbica. O braço é modelado com 24 elementos finitos e possui módulo de elasticidade longitudinal igual a 47,04 GPa. As demais barras são modeladas com 2 elementos finitos e possuem módulo de elasticidade longitudinal igual a $47,04 \cdot 10^6 \text{ GPa}$ de modo a simular um comportamento rígido. O módulo transversal é adotado como metade do valor longitudinal. Ainda são introduzidos elementos muito curtos (0,01% do comprimento da barra) nos nós N e S com massa específica apropriada de modo a representar massas de 0,31 kg e 2,50 kg, respectivamente.

Foram simulados três ciclos do mecanismo com incremento de tempo de $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Os resultados indicados a seguir se referem ao terceiro ciclo. Na Fig. 12 é ilustrada a velocidade do apoio N na direção do eixo 1.

A deflexão da ponta do braço, nó A, medida ortogonalmente a uma linha que acompanha o giro do braço no nó B é apresentada na Fig. 13 e o momento fletor de um ponto do braço a $\frac{1}{4}$ do apoio é informado na Fig. 14.

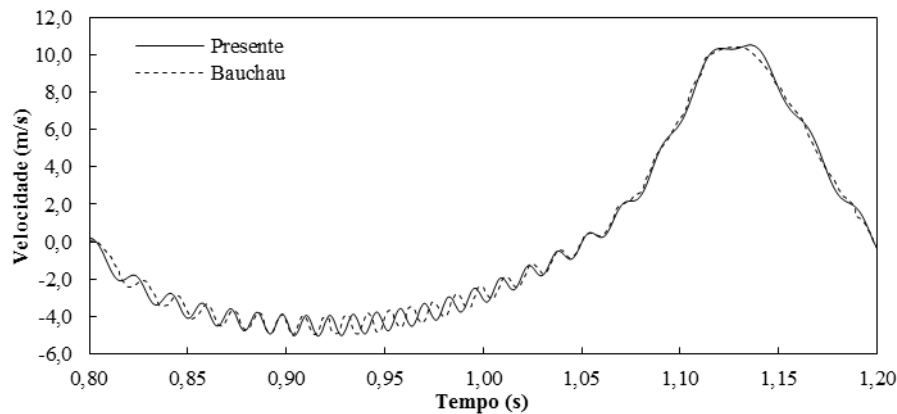


Figura 12 – Velocidade do apoio N na direção do eixo 1

Destas figuras nota-se boa concordância dos resultados com a referência de modo que o comportamento do mecanismo foi bem representado. Presume-se que as pequenas diferenças de fase entre as curvas se devam aos diferentes integradores temporais utilizados. Neste trabalho o integrador de Newmark foi empregado com os parâmetros que definem aceleração média constante dentro de cada passo de tempo ($\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$). Já no trabalho de Bauchau (2000) foi utilizado um esquema de estabilização que realiza o decaimento da energia potencial total em cada passo de tempo, o qual, além disso, é variável para toda a análise, acarretando as pequenas diferenças notadas.

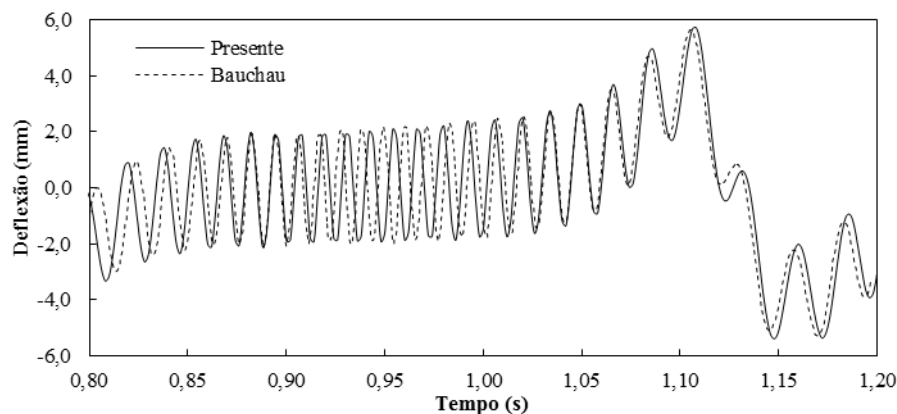


Figura 13 – Deflexão da ponta do braço

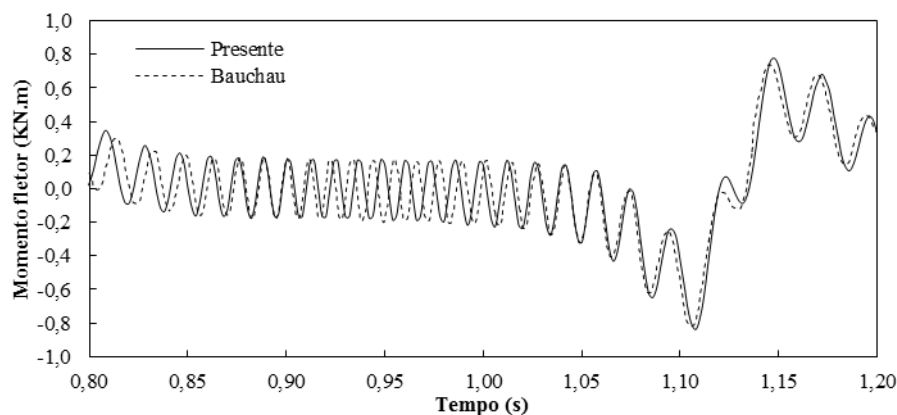


Figura 14 – Momento fletor de um ponto a ¼ do apoio B

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um equacionamento para a análise dinâmica não linear geométrica de pórticos planos contendo ligações deslizantes por meio do método dos elementos finitos baseado em posições.

Dos exemplos apresentados nota-se a boa capacidade de representação do comportamento dinâmico de corpos flexíveis a partir de uma formulação bastante simples para introdução das ligações entre os elementos finitos.

Como sequência deste trabalho pretende-se estender a metodologia empregada na introdução das ligações deslizantes para a simulação de estruturas e mecanismos tridimensionais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro e financiamento do laboratório, necessários para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- AMBROSIO, J. A. C.; NETO, M. A.; LEAL, R. P. Optimization of a complex flexible multibody systems with composite materials. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 2, p. 117-144, Sep 2007.
- BAUCHAU, O. A. On the modeling of prismatic joints in flexible multi-body systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 87-105, Jan 2000. ISSN 0045-7825.
- BAUCHAU, O. A.; BOTTASSO, C. L. Contact Conditions for Cylindrical, Prismatic, and Screw Joints in Flexible Multibody Systems. **Multibody System Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 251-278, 2001.
- BAUCHAU, O. A.; BOTTASSO, C. L.; NIKISHKOV, Y. G. Modeling rotorcraft dynamics with finite element multibody procedures. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 33, n. 10-11, p. 1113-1137, 2001.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579-595, 2000.
- CARDONA, A.; GERADIN, M.; DOAN, D. B. Rigid and flexible joint modeling in multibody dynamics using finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1-3, p. 395-418, 1991.
- CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. IN: 17TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 2003.
- _____. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47-48, p. 3712-3722, 2009.
- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541-3557, 8/20/ 2004. ISSN 0045-7825.

- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, 2009.
- _____. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319-333, 2011.
- _____. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1-15, 2014.
- DAI, L.; GUAN, F.; GUEST, J. K. Structural optimization and model fabrication of a double-ring deployable antenna truss. **Acta Astronautica**, v. 94, n. 2, p. 843-851, 2014.
- FRÝBA, L. **Vibration of solids and structures under moving loads**. Groningen: Noordhoff, 1972.
- GARCIA-VALLEJO, D. et al. Describing rigid-flexible multibody systems using absolute coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 34, n. 1-2, p. 75-94, Oct 2003.
- GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141-1174, 2006.
- GÉRADIN, M.; CARDONA, A. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- HONG, D. F.; REN, G. X. A modeling of sliding joint on one-dimensional flexible medium. **Multibody System Dynamics**, v. 26, n. 1, p. 91-106, Jun 2011.
- KIPER, G.; SÖYLEMEZ, E. Deployable space structures. RAST 2009 - Proceedings of 4th International Conference on Recent Advances Space Technologies, 2009. p.131-138.
- LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. New York: Dover Publications 1970.
- LEE, S. H. et al. The development of a sliding joint for very flexible multibody dynamics using absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 20, n. 3, p. 223-237, 2008.
- MITSUGI, J. et al. Deployment analysis of large space antenna using flexible multibody dynamics simulation. **Acta Astronautica**, v. 47, n. 1, p. 19-26, Jul 2000.
- MOON, Y. et al. Design and Kinematic Analysis of a New End-Effector for a Robotic Needle Insertion-Type Intervention System. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, v. 11, Dec 2014.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 44, p. 67-94, 1959.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 1999.
- OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
- REIS, M. C. J.; CODA, H. B. Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 7, p. 1163-1189, 2014.
- SUGIYAMA, H.; ESCALONA, J. L.; SHABANA, A. A. Formulation of three-dimensional joint constraints using the absolute nodal coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 31, n. 2, p. 167-195, 2003.
- YOO, W. S. et al. Developments of multibody system dynamics: Computer simulations and experiments. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 1, p. 35-58, 2007.