



DESENVOLVIMENTO DE UMA LIGAÇÃO DESLIZANTE PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS

Tiago Morkis Siqueira

morkis@usp.br

Humberto Breves Coda

hbcoda@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo

Avenida Trabalhador São Carlense 400, 13566-590, São Paulo, São Carlos, Brasil

Resumo. Neste trabalho se desenvolve uma formulação lagrangeana total do método dos elementos finitos para a análise não linear geométrica de estruturas aperticadas planas considerando ligações deslizantes. Nota-se este tipo de ligação em estruturas civis onde as vigas são conectadas aos pilares por meio de aparelhos de apoio. Em estruturas mecânicas este tipo de ligação é importante na modelagem de diversos tipos de mecanismos flexíveis articulados. Com a formulação proposta é possível a determinação de pontos críticos ao longo do caminho de equilíbrio assumido pela estrutura. O objetivo do trabalho é propor uma formulação para análise de estruturas com ligações deslizantes baseada no princípio da estacionariedade do funcional de energia potencial total, tendo como principais variáveis as posições e giros dos nós de elementos finitos. O modelo constitutivo é o de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona a deformação objetiva de Green-Lagrange com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Dois tipos de ligação deslizante serão propostas, as chamadas juntas prismática e cilíndrica. Seu desenvolvimento é feito de forma natural com a introdução de multiplicadores de Lagrange ao funcional de energia. A verificação do código computacional desenvolvido e da formulação proposta será feita utilizando-se de exemplos que evidenciem suas potencialidades de aplicação.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos posicional, Ligações deslizantes, Multiplicadores de Lagrange.

1 INTRODUÇÃO

Com a evolução no estudo da ciência dos materiais que permite a ampla utilização de materiais com melhores propriedades mecânicas é possível desenvolver estruturas cada vez mais arrojadas. Este ganho da capacidade resistente suscita a possibilidade de aplicação prática de elementos estruturais mais leves e, conseqüentemente, mais esbeltos em sua maioria.

A utilização dessas estruturas esbeltas e flexíveis impõe a necessidade de modelos de análise estrutural mais precisos, estimulando a realização de análises em âmbito não linear geométrico. Dessa maneira, quando rotações ou deslocamentos finitos são inerentes ao comportamento da estrutura, as diferenças entre a configuração inicial e atual dos corpos não podem mais ser desprezadas na formulação do problema.

A adoção de uma formulação para a análise em grandes deslocamentos permite também avaliar a condição de estabilidade para a trajetória de equilíbrio de uma estrutura, podendo, assim, verificar a ocorrência de pontos críticos.

Uma maneira de aperfeiçoar os códigos computacionais existentes de análise de estruturas reticuladas planas flexíveis é a consideração de ligações deslizantes internas entre os componentes do sistema. O uso desses tipos de conexões entre os corpos abre caminho para modelagem de diversas aplicações, aproximando o modelo numérico da realidade.

Neste trabalho, é dado enfoque na análise numérica e estática de estruturas aporticadas planas que possuem ligações deslizantes entre seus componentes. Essa é realizada por meio do método dos elementos finitos, com uma formulação especialmente desenvolvida para o elemento finito utilizado.

No que diz respeito à consideração da não linearidade geométrica dos corpos, será utilizada uma formulação do método dos elementos finitos baseada em posições em uma versão lagrangeana total. Utiliza-se a cinemática de Reissner para os elementos finitos de pórtico plano tal como em Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

Nesta formulação do método dos elementos finitos as equações de equilíbrio são obtidas a partir da estacionariedade do funcional de energia potencial total e o sistema não linear de equações resultante é resolvido utilizando-se o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson.

As ligações deslizantes são consideradas através da restrição do funcional de energia por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange, tendo seu equacionamento apresentado de forma original para a formulação lagrangeana total adotada neste trabalho.

Em geral, o emprego de ligações deslizantes em sistemas mecânicos e estruturais pode ser notado em estruturas aporticadas que possuem estas ligações internas especiais tais como ligações entre viga e pilar em estruturas pré-moldadas, mecanismos flexíveis articulados como os utilizados em pistões de automóveis, mecanismos de retorno rápido utilizados em máquinas de conformação, braços robóticos, maquinários diversos como retroescavadeiras, dentre outras (Bauchau, 2000; Bauchau e Bottasso, 2001; Garcia-Vallejo *et al.*, 2003; Greco e Coda, 2006; Yoo *et al.*, 2007; Hong e Ren, 2011; Moon *et al.*, 2014).

Neste trabalho serão apresentados exemplos para validação do equacionamento desenvolvido de modo a evidenciar a consistência da formulação proposta.

2 CINEMÁTICA DO ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO

A cinemática de Reissner foi escolhida para o elemento finito de pórtico plano, o qual tem como parâmetros nodais as posições dos nós, e não os deslocamentos como encontrado

tradicionalmente na literatura, além do ângulo da seção transversal, tal como nos trabalhos de Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

2.1 Configuração inicial

Para consideração da não linearidade geométrica, é necessário mapear o elemento finito em duas configurações distintas: a inicial e a atual. O mapeamento da configuração inicial, Fig. 1, inicia-se pela aproximação da linha de referência da barra de acordo com a seguinte expressão:

$$\vec{f}_{0i}^m(\xi) = x_i^m(\xi) = \phi_\ell(\xi) X_{i\ell}^m, \quad (1)$$

nesta, i indica a direção (1 ou 2), m se refere à linha de referência e ℓ designa somatório (notação indicial) sobre as funções de forma $\phi_\ell(\xi)$ e as coordenadas $X_{i\ell}^m$ dos nós sobre a linha de referência.

Na Fig. 1 se ilustra o mapeamento para um elemento cúbico, entretanto, tanto na formulação apresentada quanto no código desenvolvido pode-se escolher qualquer quantidade de nós ou aproximação desejada. Adotam-se como funções de forma os polinômios de Lagrange.

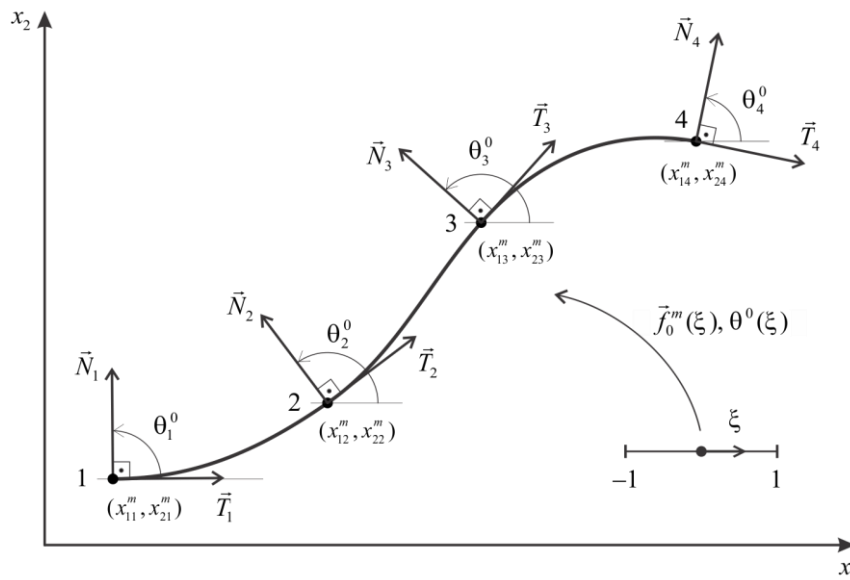


Figura 1 – Parametrização da linha de referência para a configuração inicial de um elemento com aproximação cúbica

O mapeamento da linha de referência a partir do espaço adimensional da variável ξ , Eq. (1) é chamado $\vec{f}_0^m(\xi)$. A posição inicial da seção transversal de cada nó do elemento é definida pelo ângulo θ_k^0 medido a partir da direção horizontal (eixo x_1), Fig. 1, que para a configuração inicial é considerado ortogonal à linha de referência. Os ângulos iniciais dos nós são dados pela Eq. (2) a partir do vetor N_{ik} , normal à linha de referência. Nesta fórmula os parênteses repetidos indicam não haver soma.

$$\theta_k^0 = \arctg(N_{2(k)} / N_{1(k)}), \quad (2)$$

sendo, $N_{1k} = -T_{2k} / \|\vec{T}\|$ e $N_{2k} = T_{1k} / \|\vec{T}\|$, e o vetor T_{ik} , tangente à linha de referência, obtido por $T_{ik} = x_{i,\xi}(\xi_k) = \phi_{\ell,\xi}(\xi_k) X_{i\ell}^m$.

Conhecidos os ângulos que definem a seção transversal para os nós do elemento é possível utilizar-se das mesmas funções de forma para aproximar um ângulo $\theta^0(\xi)$ ao longo da configuração inicial da barra como:

$$\theta^0(\xi) = \phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0 \quad (3)$$

De posse dessas informações é possível determinar a posição de qualquer ponto no interior da barra utilizando-se do vetor $g_i^0(\xi, \eta)$, Fig. 2, normal a um ponto da linha de referência na configuração inicial. Considera-se para isto a existência de uma variável adimensional a mais, η , ortogonal a ξ e que descreve a altura da barra no espaço real. Assim, um ponto genérico é expresso por:

$$x_i(\xi, \eta) = x_i^m(\xi) + g_i^0(\xi, \eta) \quad (4)$$

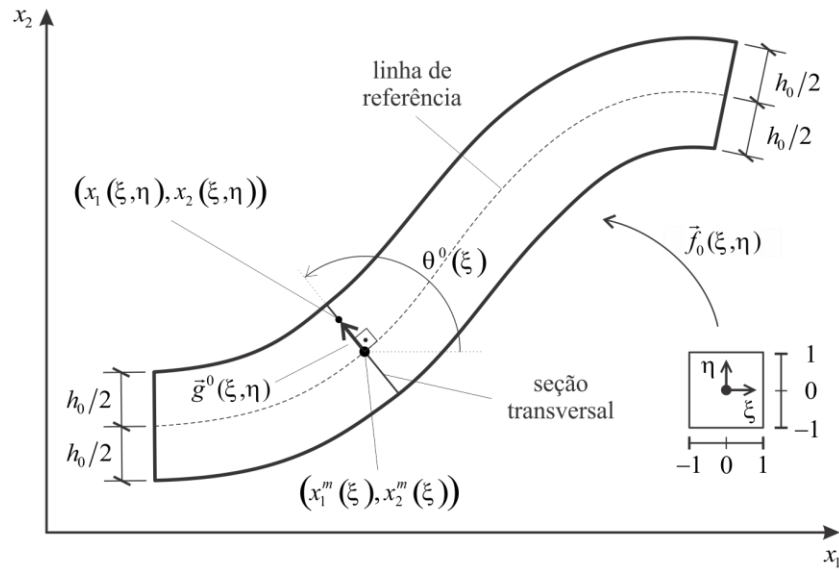


Figura 2 – Ponto P genérico na configuração inicial da barra

Adotando-se altura h_0 e base b_0 constantes para toda a barra, já que é tomado coeficiente de Poisson nulo, como explicado posteriormente, a linha de referência coincide com a linha média e pode-se determinar $g_i^0(\xi, \eta)$ em função do ângulo e da altura da seção transversal como:

$$g_1^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad \text{e} \quad g_2^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (5)$$

Substituindo-se as Eq. (1) e (5) na expressão (4) obtêm-se o mapeamento completo do elemento de pórtico na configuração inicial como:

$$f_{01}(\xi, \eta) = x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi) X_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (6)$$

$$f_{02}(\xi, \eta) = x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi) X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (7)$$

2.2 Configuração atual

As informações necessárias para que seja determinada a configuração inicial incluem as coordenadas da linha de referência, a altura e a base da seção transversal. A configuração atual é obtida por um processo iterativo não linear, de modo que, nesse momento, se escreve a configuração atual analogamente à inicial, imaginando-se que as variáveis incógnitas são

conhecidas como tentativa no processo numérico de solução. Assim, a função de mapeamento da configuração atual $f_{1i}(\xi, \eta)$ é dada por:

$$f_{11}(\xi, \eta) = y_1(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \quad (8)$$

$$f_{12}(\xi, \eta) = y_2(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \quad (9)$$

Nestas expressões y_i representa as coordenadas atuais de um ponto genérico dentro da barra, $Y_{i\ell}^m$ são as coordenadas atuais dos nós do elemento e θ_ℓ são os ângulos atuais da seção transversal. A partir da Fig. 3, da Eq. (8) e da Eq. (9) nota-se que as seções transversais permanecem planas, mas não mais ortogonais à linha de referência. Portanto, caracterizando a cinemática de Reissner, na qual se consideram os efeitos do cisalhamento. Além disso, a altura de referência da seção continua constante, já que na lei constitutiva a ser adotada impõe-se coeficiente de Poisson nulo.

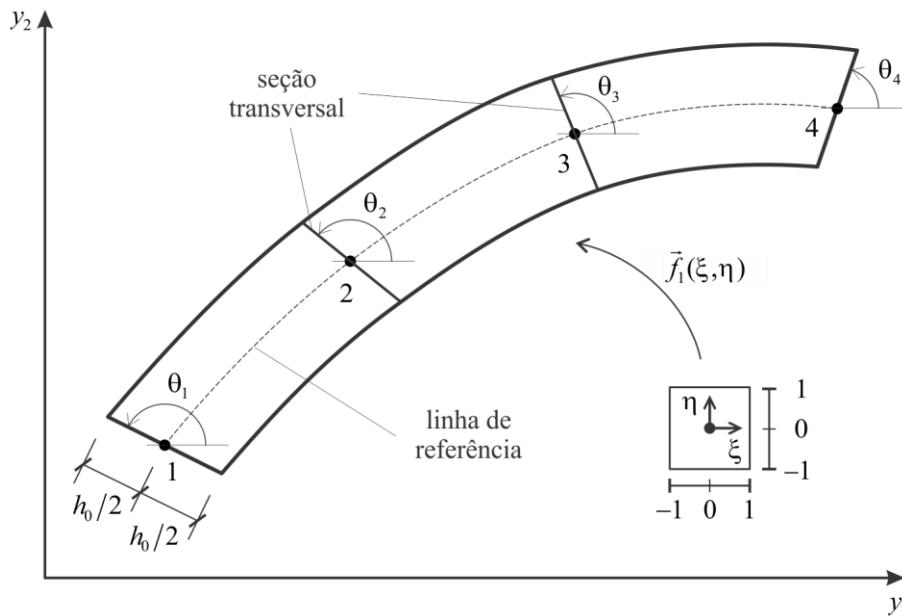


Figura 3 – Mapeamento da configuração atual – detalhe para os ângulos

2.3 Mudança de configuração e gradiente

Definidos os mapeamentos do espaço adimensional para as configurações inicial e atual pode-se descrever a mudança de configuração do corpo analisado. Isto é feito reunindo os mapeamentos das Fig. 2 e 3 em uma única representação, Fig. 4, na qual a função $\vec{f}$ descreve a mudança de configuração do estado inicial (B_0) para o estado atual (B). Esta função pode ser escrita como a composição entre os mapeamentos $\vec{f}_0$ e $\vec{f}_1$ como:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \quad (10)$$

O gradiente de $\vec{f}$, chamado de $\mathbf{A}$, que é um tensor de segunda ordem, é escrito a partir dos gradientes dos mapeamentos $\vec{f}_0$ e $\vec{f}_1$ por (Bonet *et al.*, 2000; Coda, 2003):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (11)$$

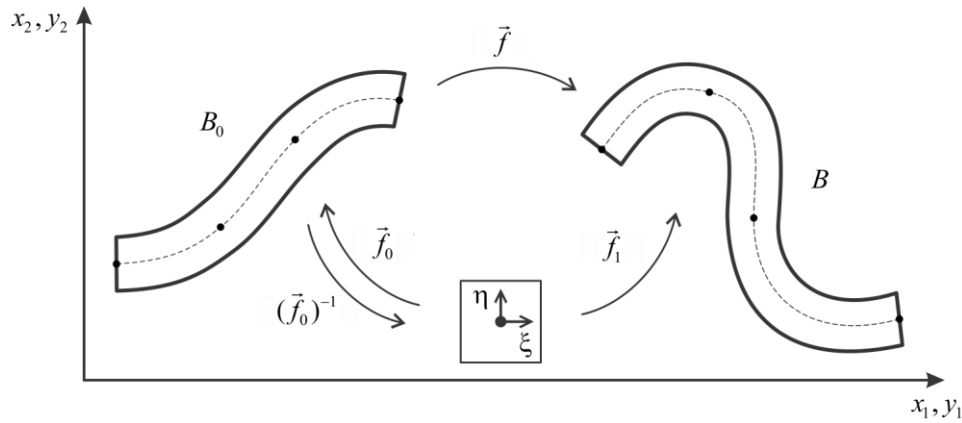


Figura 4 – Mudança de configuração – mapeamento posicional

Os gradientes para os mapeamentos inicial e atual são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Os elementos destes são obtidos diretamente das expressões (6), (7), (8) e (9) para serem avaliados em pontos de integração nas coordenadas ξ e η . Após a substituição os gradientes resultam em:

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,\xi}(\xi) X_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k^0 & \frac{h_0}{2} \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \\ \phi_{\ell,\xi}(\xi) X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k^0 & \frac{h_0}{2} \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}^0] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,\xi}(\xi) Y_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k & \frac{h_0}{2} \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \\ \phi_{\ell,\xi}(\xi) Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \phi_{k,\xi}(\xi) \theta_k & \frac{h_0}{2} \sin[\phi_{\ell}(\xi) \theta_{\ell}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

A medida de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}$, que é objetiva (Ogden, 1984), é adotada para desenvolver o elemento finito, sendo calculada por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki} A_{kj} - \delta_{ij}) \quad (15)$$

Nesta, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem e $\mathbf{C}$ é o alongamento de Cauchy-Green à direita.

3 EQUILÍBRIO NÃO LINEAR GEOMÉTRICO

3.1 Energia de deformação do elemento de pórtico

A energia específica de deformação de Saint-Venant-Kirchhoff é adotada neste trabalho para relacionar a deformação de Green ($\mathbf{E}$) ao segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$). Para um material homogêneo e isotrópico ela é dada por meio da seguinte expressão:

$$u_e = \frac{\mathbb{E}}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + \mathbb{G} (E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad \text{ou} \quad u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad (16)$$

Nesta, o coeficiente $\mathbb{E}$ se confunde com o módulo de elasticidade longitudinal para o caso de pequenas deformações e $\mathbb{G} = \mathbb{E}/[2(1+\nu)]$ com o módulo de elasticidade transversal, sendo ν o coeficiente de Poisson. O tensor de deformações de Green em notação indicial é escrito como E_{ij} e em notação diádica como $\mathbf{E}$. O tensor constitutivo elástico, em notação diádica, é indicado por $\mathfrak{C}$.

A expressão (16) evita o travamento por efeito Poisson (travamento volumétrico) ao desconsiderar a contração ou expansão do material quando adotado coeficiente de Poisson nulo. O travamento por cisalhamento é evitado pela alta ordem de aproximação utilizada na direção longitudinal, além disso, permite-se a variação do módulo de elasticidade transversal.

Como a deformação de Green foi escrita em função das posições nodais, a energia de deformação acumulada nos elementos estruturais é também função das posições. Esta é escrita como:

$$U_e(\vec{Y}) = \int_{V_0} u_e(\vec{Y}) dV_0 \quad (17)$$

Na qual V_0 é o volume inicial da estrutura analisada (Coda e Greco, 2004; Coda, 2009).

3.2 Energia potencial total e equação de equilíbrio

A energia potencial total do sistema mecânico $\Pi(\vec{Y})$ é dada pelo somatório da energia de deformação de todos os elementos de pórtico, da energia potencial das cargas externas concentradas (forças e momentos) e da energia potencial das cargas distribuídas, resultando em:

$$\Pi(\vec{Y}) = \int_{V_0} u_e(\vec{Y}) dV_0 - \vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \vec{y}^m dS_0 \quad (18)$$

Nesta expressão $\vec{F}$ é o vetor de forças externas nodais (incluindo os momentos), $\vec{q}$ é o vetor de forças externas distribuídas, escrito em função dos valores nodais como $q_i = \phi_i(\xi) Q_{\xi}$, $\vec{y}^m$ é a posição atual da linha de referência dos elementos de pórticos (Eq. (8) e Eq. (9)) e dS_0 é o comprimento infinitesimal inicial da linha de referência do elemento de pórtico curvo.

De modo a se obter a configuração de equilíbrio aplica-se o princípio da energia potencial estacionária sobre a expressão (18) utilizando como parâmetros as posições nodais:

$$\delta \Pi(\vec{Y}) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \frac{\partial (\vec{F} \cdot \vec{Y})}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \frac{\partial (\vec{q} \cdot \vec{y}^m)}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 = 0 \quad (19)$$

Sabendo que a energia específica de deformação é escrita em função das posições nodais por meio da deformação de Green, $u_e = u_e(\mathbf{E}(\vec{Y}))$, e que as forças são conservativas (independem da posição atual da estrutura), pode-se reescrever a expressão (19) como:

$$\delta \Pi(\vec{Y}) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial \vec{y}^m}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 = 0 \quad (20)$$

Do princípio do conjugado energético, nota-se que o primeiro termo da primeira integral é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$).

A posição atual da linha de referência pode ser obtida como $\vec{y}^m = \vec{\phi} \cdot \vec{Y}$, portanto sua derivada resulta em $\partial \vec{y}^m / \partial \vec{Y} = \vec{\phi}$. Assim, a Eq. (20) se escreve como:

$$\delta\mathbf{\Pi}(\vec{Y}) = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \otimes \vec{\phi} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 = 0 \quad (21)$$

onde o símbolo $\otimes$ representa o produto tensorial do espaço das direções associado à $\vec{q}$ com o espaço dos nós associado a $\vec{\phi}$.

De modo a simplificar o entendimento físico do procedimento não linear apresentado a seguir, pode-se reescrever a Eq. (21) como:

$$\delta\mathbf{\Pi}(\vec{Y}) = \vec{F}^{\text{int}} \cdot \delta \vec{Y} - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \mathbf{L} \cdot \vec{Q} \cdot \delta \vec{Y} = 0 \quad (22)$$

Nesta, $\vec{F}^{\text{int}}$ representa o vetor de forças nodais internas e $\mathbf{L}$ é a matriz que transforma as cargas distribuídas em cargas nodais equivalentes (Lanczos, 1970; Coda e Paccola, 2009; 2011). Dada à arbitrariedade de $\delta \vec{Y}$, a expressão (22) representa a equação de equilíbrio não linear geométrica:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} - \mathbf{L} \cdot \vec{Q} = 0 \quad (23)$$

3.3 Tensor de Piola-Kirchhoff e derivada da deformação de Green

O tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie $\mathbf{S}$ presente na Eq. (21) é obtido a partir da Eq. (16) e é escrito como:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} E_{11} & 2\mathbb{G} E_{12} \\ 2\mathbb{G} E_{12} & \mathbb{E} E_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

A derivada da deformação de Green em relação às posições nodais é obtida utilizando-se das Eq. (11) e (15) por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} [(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Nota-se que como $\partial (\mathbf{A}^1)^t / \partial \vec{Y} = (\partial \mathbf{A}^1 / \partial \vec{Y})^t$ a primeira parcela da soma é a transposta da segunda, o que é interessante em termos de implementação computacional.

Conhecido $\mathbf{A}^1$ a partir da Eq. (14), sua derivada para os graus de liberdade Y_α^β , sendo α a direção (1, 2 ou 3, para o ângulo) e β o nó do elemento, é escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_1^\beta} = \begin{bmatrix} \phi'_\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_2^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi'_\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_3^\beta} = \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \theta_\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta (\phi'_k \theta_k) - \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi'_\beta & -\frac{h_0}{2} \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \\ -\frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta (\phi'_k \theta_k) + \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi'_\beta & \frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \end{bmatrix} \quad (27)$$

com somatório sobre os nós ℓ e k do elemento (notação indicial).

Assim, a partir destas expressões é possível calcular as forças internas $\vec{F}^{\text{int}}$ do elemento, conforme as Eq. (19) a (23), como:

$$\vec{F}^{\text{int}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \quad (28)$$

Neste trabalho a integral acima foi avaliada por meio de integração numérica com o uso da quadratura de Gauss-Legendre pela expressão:

$$\vec{F}^{\text{int}} = b_0 w_{ig} w_{jg} \mathbf{S}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \det \mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (29)$$

na qual w_{ig} e w_{jg} são os pesos de Gauss para os pontos de integração ξ_{ig} e η_{jg} , respectivamente, e ig e jg indicam soma para a quantidade de pontos escolhida em cada direção.

4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR

Utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson para solução do sistema não linear de equações. A Eq. (23) é reescrita, juntando-se as forças externas conservativas em um único vetor $\vec{F}$, como:

$$\vec{g} = \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} = \vec{0} \quad (30)$$

Nesta expressão $\vec{g}$ é um vetor nulo quando a posição tentativa $\vec{Y}$ é a solução correta do problema ao se calcular as forças internas $\vec{F}^{\text{int}}$, caso contrário, este vetor representa o desbalanceamento mecânico do sistema.

A expressão (30) representa a equação de equilíbrio não linear geométrico e pode ser entendida simplesmente como $\vec{g}(\vec{Y}) = \vec{0}$. Ela é claramente não linear em relação à $\vec{Y}$. De modo a se expandir esta equação em série de Taylor escreve-se a segunda derivada da energia potencial total como:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \mathbf{H} = \nabla \vec{g} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \quad (31)$$

A expansão de primeira ordem resulta em:

$$\vec{g}(\vec{Y}) \cong \vec{g}(\vec{Y}^0) + \nabla \vec{g}(\vec{Y}^0) \cdot \Delta \vec{Y} = \vec{0} \quad (32)$$

Desta última expressão escreve-se o procedimento de Newton-Raphson para solução do sistema não linear como:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}^0) \quad \text{e} \quad \Delta \vec{Y} = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}^0) \quad (33)$$

No qual $\vec{Y}^0$ é uma posição tentativa (usualmente a posição de equilíbrio do corpo na iteração anterior) para o cálculo de $\vec{Y}$ utilizado na Eq. (30). Determinando-se $\Delta \vec{Y}$ pode-se calcular a nova posição tentativa para $\vec{Y}$ como:

$$\vec{Y} = \vec{Y}^0 + \Delta \vec{Y} \quad (34)$$

O critério de parada para uma dada tolerância TOL é satisfeito quando:

$$\frac{\|\vec{g}(\vec{Y})\|}{\|\vec{F}\|} \leq TOL \quad \text{ou} \quad \frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} \leq TOL \quad (35)$$

sendo $\vec{X}$ a posição inicial da estrutura.

4.1 Hessiana do elemento de pórtico plano

A hessiana $\mathbf{H}$ do elemento é necessária ao processo de solução do sistema não linear de equações como indicado na Eq. (33). Ela é dada pela segunda derivada da energia de deformação. Como se considera que a função da energia específica de deformação u_e é

contínua e finita no domínio V_0 do elemento e seu intervalo de integração possui valores constantes, a Eq. (31) pode ser desenvolvida como:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right) dV_0 \quad (36)$$

Nesta última integral, a derivada do tensor de Piola-Kirchhoff $\partial \mathbf{S} / \partial \vec{Y}$ para as incógnitas nodais é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \begin{bmatrix} \mathbb{E} E_{11} & 2G E_{12} \\ 2G E_{21} & \mathbb{E} E_{22} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

sendo as derivadas da deformação de Green conhecidas do cálculo da força interna $\vec{F}^{\text{int}}$.

Ainda é necessário calcular a segunda derivada da deformação de Green dada por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \left[2(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \mathbf{O} + \mathbf{O}^t \right], \quad (38)$$

com,

$$\mathbf{O} = (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (39)$$

Nestas expressões todos os termos são conhecidos, exceto $\partial^2 \mathbf{A}^1 / \partial \vec{Y} \partial \vec{Y}$, entretanto este assume valores não nulos somente para os graus de liberdade de giro (direção 3) resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial Y_3^\beta \partial Y_3^\zeta} &= \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial \theta_\beta \partial \theta_\zeta} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} \eta \left\{ \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta (\phi'_k \theta_k) - \cos(\phi_\ell \theta_\ell) [\phi_\beta \phi'_\zeta + \phi'_\beta \phi_\zeta] \right\} & -\frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta \\ -\frac{h_0}{2} \eta \left\{ \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta (\phi'_k \theta_k) + \sin(\phi_\ell \theta_\ell) [\phi_\beta \phi'_\zeta + \phi'_\beta \phi_\zeta] \right\} & -\frac{h_0}{2} \sin(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta \end{bmatrix}, \quad (40) \end{aligned}$$

sendo β e ζ os nós do elemento e com somatório sobre os nós ℓ e k do elemento (notação indicial).

A integração da segunda derivada da energia de deformação foi realizada numericamente com o uso da quadratura de Gauss-Legendre pela expressão:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = b_0 w_{ig} w_{jg} \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) + \mathbf{S}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \right] \det \mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (41)$$

na qual w_{ig} e w_{jg} são os pesos de Gauss para os pontos de integração ξ_{ig} e η_{jg} , respectivamente, e ig e jg indicam soma para a quantidade de pontos escolhida em cada direção.

5 INTRODUÇÃO DE LIGAÇÕES DESLIZANTES

A introdução das ligações deslizantes, seja na forma de uma junta prismática ou cilíndrica, nos elementos finitos de pórtico plano é realizada por meio da introdução de multiplicadores de Lagrange ao funcional de energia de maneira a restringir a posição, e/ou o giro, de um nó pertencente a um elemento finito às coordenadas geradas no interior de outro elemento finito qualquer, considerando a movimentação concomitante de todos os nós do problema estudado. Esta técnica é utilizada na modelagem de juntas entre corpos flexíveis e

pode ser encontrada em diversos trabalhos tais como de Cardona, Geradin e Doan (1991), Bauchau (2000), Bauchau e Bottasso (2001), G eradin e Cardona (2001), Garcia-Vallejo *et al.* (2003), Sugiyama, Escalona e Shabana (2003) e Lee *et al.* (2008). Entretanto, é aplicada originalmente neste trabalho para a formulação lagrangeana total em elementos finitos considerando a cinemática de Reissner baseada em posições.

Sua maior vantagem é a simplicidade com a qual é possível aplicar condições auxiliares ao elemento finito já existente por meio de restrições no movimento dos nós que possuem a ligação deslizando.

5.1 Restrições cinemáticas

A introdução das ligações deslizantes entre elementos finitos de pórtico plano é realizada por meio da consideração de um elemento denominado deslizando. Este possui um nó restrito a se deslocar sobre outros elementos. O grupo de elementos sobre os quais a ligação deslizando tem liberdade de movimento é designado de trajetória da ligação.

A Fig. 5 exemplifica um conjunto que inclui um elemento deslizando e a trajetória da ligação com aproximação cúbica. Apesar dessa ilustração, a formulação desenvolvida é   aplicável a elementos finitos com qualquer número de nós.

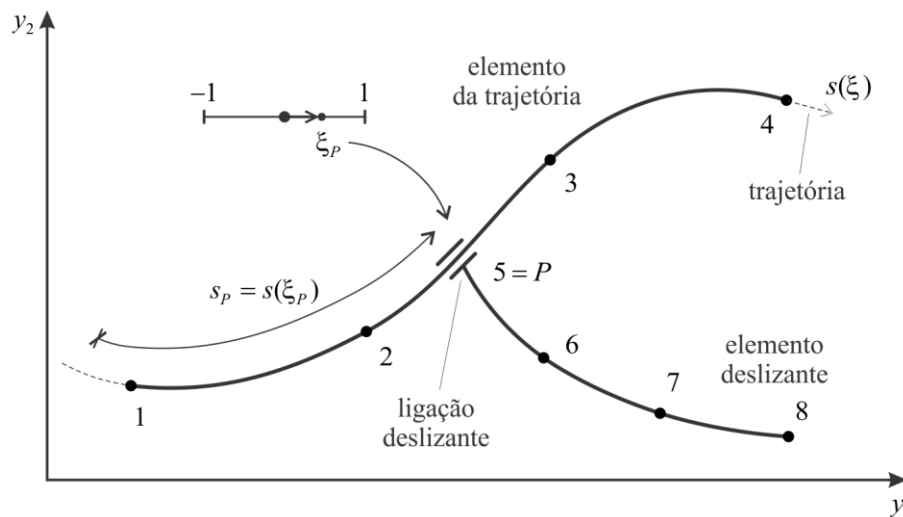


Figura 5 – Ligação deslizando em um conjunto de elementos com aproximação cúbica

Nos itens que seguem, utiliza-se a not  a  o $(\bar{\bullet})$ para o elemento da trajetória e $(\hat{\bullet})$ para o elemento deslizando.

Os parâmetros nodais (posição e ângulo) do nó com a ligação deslizando, denominado n  deslizando, e referido pelo  ndice P, podem ser descritos em função dos parâmetros nodais do elemento da trajetória e da variável $s_p = s(\xi_p)$. Esta indica a localização do nó deslizando sobre o comprimento da sua trajetória a partir de um ponto arbitrário nela. Já a coordenada ξ_p localiza o nó deslizando no espaço adimensional da linha de referência de um determinado elemento da trajetória.

A cinemática da ligação deslizando para uma junta prismática  , então, escrita por meio das relações:

$$\hat{Y}_i^P(s_p, \bar{Y}_i^\ell) = \phi_\ell(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} \quad (42)$$

Nesta expressão: i indica a direção (1, 2 ou 3, para o ângulo); ℓ se refere aos nós do elemento da trajetória (notação indicial); $\hat{Y}_i^P$ e $\bar{Y}_i^\ell$ referem-se às posições e ao ângulo do nó deslizante e dos nós do elemento mestre, respectivamente; $\Delta\theta_p^0$ é a diferença, na configuração inicial, entre o ângulo do nó deslizante e o ângulo do elemento da trajetória no mesmo ponto P; e δ_{i3} é o operador delta de Kronecker, igual à unidade quando a direção se referir ao ângulo e nulo caso contrário.

Para modelagem de uma junta cilíndrica utiliza-se da mesma hipótese representada pela Eq. (42), entretanto, é liberado o giro. Isso é possível simplesmente desconsiderando-se a restrição cinemática para o ângulo ($i = 3$).

A presença de $\Delta\theta_p^0$ na Eq. (42) se deve ao fato do ângulo ser medido a partir do eixo horizontal no sentido positivo (de y_1 para y_2) até o vetor normal de um ponto da linha de referência, fazendo com que seu valor dependa da disposição e orientação dos nós do elemento finito no plano. Isso leva a diferença existente no valor do ângulo do nó deslizante e um ângulo medido no elemento da trajetória no ponto P, que, apesar de localizarem-se no mesmo ponto do plano, pertencem a elementos distintos.

Conforme se observa na Fig. 6, pode-se expressar a diferença entre ângulos como $\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \bar{\theta}_p^0$. O valor do ângulo medido no elemento da trajetória $\bar{\theta}_p^0$ é obtido pela interpolação dos demais ângulos desse elemento com as funções de forma. Assim, chega-se à expressão:

$$\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \phi_\ell(\xi_p)\bar{\theta}_\ell^0 \quad (43)$$

Ressalta-se que pelo próprio caráter da junta prismática (engaste móvel) essa diferença se mantém constante durante o tempo, portanto seu valor obtido na configuração inicial não se altera com as mudanças de configuração do corpo.

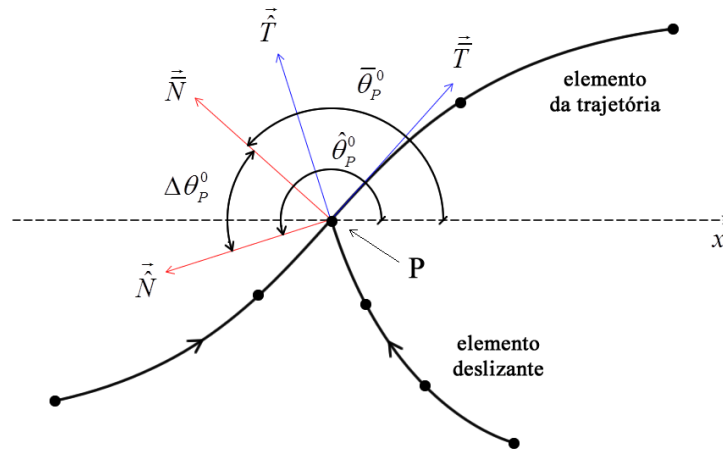


Figura 6 – Diferença entre o ângulo do ponto P medido no elemento mestre e no elemento escravo (a seta nos elementos finitos indica a orientação desses)

5.2 Alteração na equação do movimento

A inclusão das condições auxiliares dadas pelas Eq. (42) é realizada pela introdução de multiplicadores de Lagrange λ_i para cada uma das três direções i (Lanczos, 1970). Escreve-se um funcional de energia restrito $\Pi_L(\vec{Y}_L)$ a partir do funcional da Eq. (18) como:

$$\Pi_L(\vec{Y}_L) = \Pi(\vec{Y}) + \mathbb{L}(\vec{Y}_L), \quad (44)$$

com $\mathbb{L}(\vec{Y}_L) = \lambda_i \left[\hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_P^0 \delta_{i3} \right]$.

Analogamente ao que foi desenvolvido para $\Pi(\vec{Y})$, de modo a obter uma configuração de equilíbrio, aplica-se o princípio da energia potencial estacionária sobre a expressão (44). Utilizam-se como parâmetros as posições e ângulos dos nós do conjunto de elementos que apresentam a ligação deslizando, a variável s_P e os multiplicadores λ_i . Estes parâmetros incógnitos são convenientemente agrupados no vetor $\vec{Y}_L$. Da aplicação da estacionariedade ao funcional restrito resulta:

$$\delta\Pi_L = \delta\Pi + \delta\mathbb{L} = 0 \quad (45)$$

O termo $\delta\Pi$ se desenvolve conforme a Eq. (19) resultando na equação de equilíbrio para os elementos livres. Já o termo $\delta\mathbb{L}$ é escrito como:

$$\delta\mathbb{L} = \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\bar{Y}_i^\alpha} \delta\bar{Y}_i^\alpha + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\hat{Y}_i^\beta} \delta\hat{Y}_i^\beta + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\lambda_i} \delta\lambda_i + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial s_P} \delta s_P, \quad (46)$$

sendo α e β os nós dos elementos da trajetória e deslizando, respectivamente.

Resulta da Eq. (46) a seguinte expressão a ser adicionada à variação do funcional:

$$\delta\mathbb{L} = \vec{\Lambda} \cdot \delta\vec{Y}_L = \begin{Bmatrix} -\lambda_i \phi_\alpha(\xi_P) \\ \lambda_i \\ 0 \\ \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_P^0 \delta_{i3} \\ -\lambda_i \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\bar{Y}_i^\alpha \\ \delta\hat{Y}_i^P \\ \delta\hat{Y}_i^k \\ \delta\lambda_i \\ \delta s_P \end{Bmatrix}, \quad (47)$$

sendo k os nós do elemento deslizando, exceto o nó P que possui a ligação, e J_P o jacobiano da transformação do espaço adimensional da variável ξ para a variável $s(\xi)$ avaliado no ponto P escrito como $J_P = \sqrt{[\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_1^\ell]^2 + [\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_2^\ell]^2}$.

Portanto, a equação de equilíbrio, Eq. (23), se reescreve como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \vec{\Lambda} = \vec{0}, \quad (48)$$

na qual se reúnem as forças externas conservativas em um único vetor $\vec{F}$.

5.3 Solução do sistema não linear

O sistema não linear, Eq. (48), é resolvido por meio do algoritmo de Newton-Raphson, de maneira semelhante ao realizado no item 4. O vetor de desbalanceamento $\vec{g}_L$ para o novo sistema de equações toma a forma:

$$\vec{g}_L = \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \vec{\Lambda} = \vec{0} \quad (49)$$

Nota-se que nesta expressão há somente o acréscimo do termo $\vec{\Lambda}$ referente às condições auxiliares impostas com os multiplicadores de Lagrange.

A expansão da Eq. (49) em série de Taylor, até a primeira ordem, resulta em:

$$\mathbf{H}_L \cdot \Delta\vec{Y}_L = -\vec{g}_L(\vec{Y}_L)^0 \quad (50)$$

Nesta, $(\vec{Y}_L)^0$ é um vetor tentativa que contempla os parâmetros incógnitos e é escrito

como $\left((\vec{Y}_L)^0\right)^t = \left\{ \bar{Y}_i^\alpha \quad \hat{Y}_i^P \quad \hat{Y}_i^k \quad \lambda_i \quad s_P \right\}^0$.

A nova matriz hessiana $\mathbf{H}_L = \nabla \bar{g}_L$, obtida da segunda derivada do funcional restrito $\Pi_L(\bar{Y}_L)$, utilizada para a determinação da correção $\Delta \bar{Y}_L$ é dada por:

$$\mathbf{H}_L \cdot \Delta \bar{Y}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{Y} \\ \Delta \bar{L} \end{Bmatrix}, \quad (51)$$

sendo, $(\Delta \bar{Y})^t = \{\Delta \bar{Y}_i^\alpha \quad \Delta \bar{Y}_i^P \quad \Delta \bar{Y}_i^k\}$ o vetor que agrupa os parâmetros nodais do elemento finito de pórtico e $(\Delta \bar{L})^t = \{\Delta \lambda_i \quad \Delta s_p\}$ o vetor que compõe os graus de liberdade adicionais do sistema, associados à variável s_p e aos multiplicadores.

A matriz $\mathbf{H}$ é a hessiana do conjunto de elementos obtida pela Eq. (31) e as demais matrizes são dadas por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\phi_\alpha(\xi_P) & -\lambda_i \phi_{\alpha,\xi}(\xi_P) / J_P \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P \\ -\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P & H_{s_p s_p} \end{bmatrix}, \quad (52)$$

com,

$$H_{s_p s_p} = \lambda_i \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \left(\frac{1}{J_P} \right)^4 \phi_{n,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^n \phi_{m,\xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^m - \lambda_i \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \left(\frac{1}{J_P} \right)^2 \quad (53)$$

Nesta expressão, em notação indicial, o índice i se refere à direção (1, 2 ou 3, para o ângulo), k também indica a direção (1 ou 2), e, ℓ , m e n se referem aos nós do elemento da trajetória.

5.4 Determinação da coordenada adimensional da ligação deslizando

Para se determinar a coordenada adimensional inicial ξ_P , necessária ao procedimento numérico, utiliza-se o método dos mínimos quadrados para a solução do sistema sobredeterminado formado pelas Eq. (42) sem a presença dos termos relacionados ao giro. Para tanto, conhecidos os valores das posições dos elementos, é suficiente escrever-se os resíduos $r_i(\xi_P)$ das duas direções coordenadas como:

$$r_i(\xi_P) = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \quad (54)$$

A função $p(\xi_P)$ a ser minimizada pode ser escrita como (Nocedal e Wright, 1999):

$$p(\xi_P) = \frac{1}{2} [r_i(\xi_P)]^2 = 0 \quad (55)$$

Expandindo-se esta função em série de Taylor até a aproximação de primeira ordem tem-se:

$$p(\xi_P) \cong \nabla p(\xi_P^0) + \nabla^2 p(\xi_P^0) \Delta \xi_P = 0 \quad (56)$$

Sendo ξ_P^0 um valor tentativa e desenvolvendo-se as derivadas necessárias pode-se encontrar a correção $\Delta \xi_P$ por:

$$\Delta \xi_P = - \frac{\nabla p(\xi_P^0)}{\nabla^2 p(\xi_P^0)}, \quad (57)$$

e o valor da variável como $\xi_P = \xi_P^0 + \Delta \xi_P$, até que o critério de parada $|\Delta \xi_P / \xi_P| \leq TOL$ seja satisfeito para uma dada tolerância TOL .

6 CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS

Para o cálculo dos esforços seccionais é realizada a integração das tensões de Cauchy sobre a área da seção transversal da barra. A tensão real σ , ou de Cauchy, está relacionada com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S pela expressão (Ogden, 1984):

$$\sigma = \frac{1}{\det A} A \cdot S \cdot A^t, \quad (58)$$

sendo, A o gradiente da função mudança de configuração dado pela Eq. (11).

Determinada a tensão de Cauchy para o sistema coordenado, convencionou-se um sistema de eixos local no qual sua coordenada local $\tilde{y}_1$ é perpendicular à seção transversal em um dado ponto e $\tilde{y}_2$ pertence ao plano da seção.

Assim, o esforço normal N , o esforço cortante V e o momento fletor M são dados por:

$$N = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{11} dA_0, \quad V = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{12} dA_0 = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{21} dA_0 \quad \text{e} \quad M = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{11} \tilde{y}_2 dA_0, \quad (59)$$

sendo $\tilde{\sigma}$ o tensor de tensões rotacionado para os eixos $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$, e A_0 é a área da seção transversal, neste caso igual à área inicial.

7 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A seguir apresentam-se exemplos de aplicações contendo ligações deslizantes para evidenciar a adequação da formulação proposta à simulação de estruturas com estas ligações em elementos de pórtico plano.

7.1 Pórtico com junta prismática

Neste exemplo apresenta-se um pórtico plano contendo uma junta prismática (engaste móvel interno) na ligação entre a viga e um pilar como ilustra a Fig. 7. A estrutura está solicitada por uma carga concentrada $P = 1000 \text{ N}$ no meio do vão e um momento fletor $M = 500 \text{ N.m}$ no extremo livre do trecho em balanço. Adota-se para as barras seção transversal retangular com 0,20 m de base e altura de 0,60 m, módulo de elasticidade longitudinal de 20,0 GPa e módulo transversal de 10,0 GPa. A viga foi modelada com 8 elementos finitos e cada pilar com 3 elementos finitos, todos de aproximação cúbica.

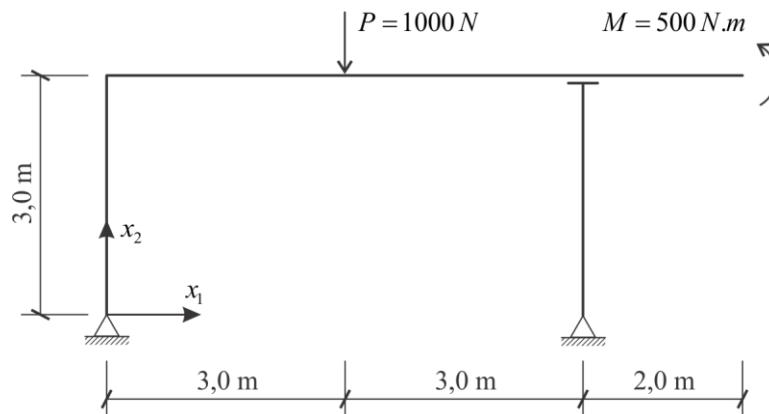


Figura 7 – Pórtico com ligação deslizante na ligação viga-pilar

Apresentam-se os resultados dos esforços internos, na convenção usual de engenharia, na forma dos seus diagramas de esforço normal (DEN), esforço cortante (DEC) e momento fletor (DMF) conforme a Fig. 8. Os valores obtidos a partir da simulação numérica coincidem com os valores encontrados pelo cálculo manual da estrutura isostática, demonstrando, assim, a consistência da formulação proposta.

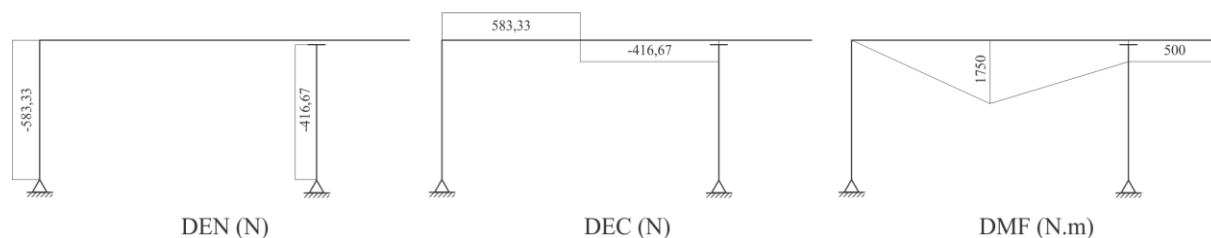


Figura 8 – Diagramas de esforços internos

Ilustram-se também os resultados de deslocamentos nas duas direções e giro nas Fig. 9, 10 e 11, respectivamente.

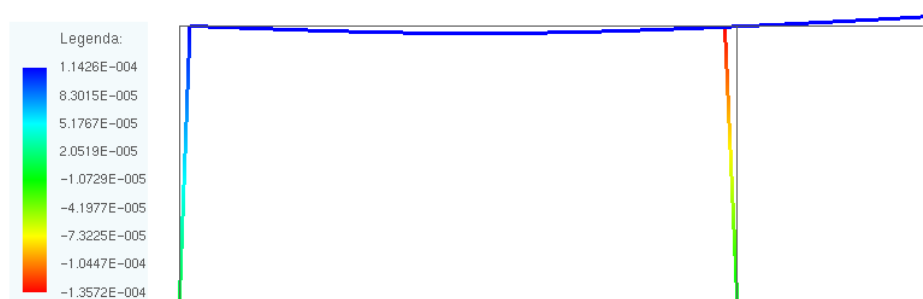


Figura 9 – Deslocamento horizontal (m) ampliado 1000 vezes



Figura 10 – Deslocamento vertical (m) ampliado 1000 vezes

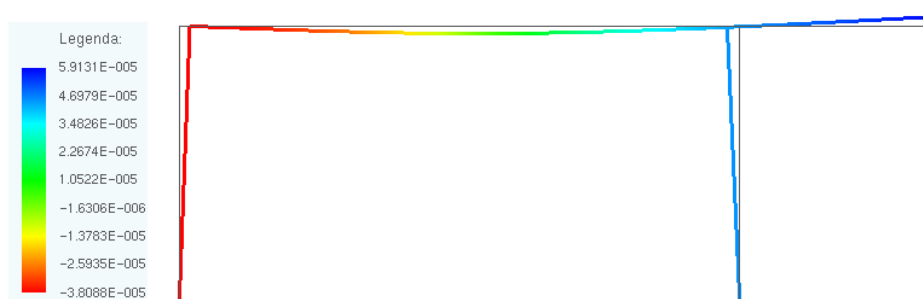


Figura 11 – Giro (rad) ampliado 1000 vezes

7.2 Trajetória de equilíbrio de arco abatido

Apresenta-se neste exemplo uma estrutura de pórtico em forma de arco abatido bi apoiado com vão $L = 10,0m$ e altura $h = 1,0m$ sujeita à ação de uma manivela. Esta é fixa em uma extremidade a qual é imposto um giro prescrito $\psi = 1,8rad$. No seu outro extremo ela é conectada ao arco por meio de uma junta cilíndrica (apoio móvel interno), conforme ilustra a Fig. 12. Na configuração inicial as dimensões indicadas na Fig. 12 são: $H = 2,4606m$, $d_1 = 1,6178m$ e $d_2 = 0,5523m$.

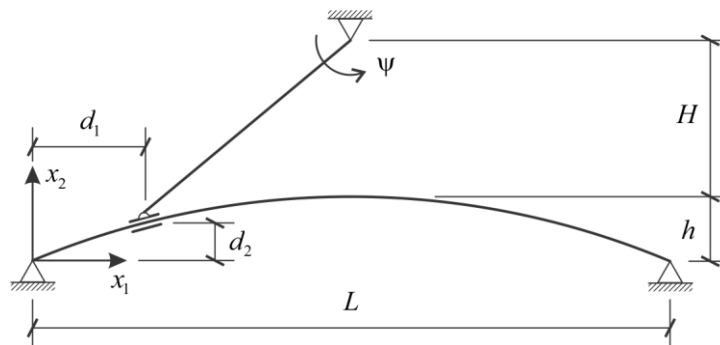


Figura 12 – Configuração inicial da estrutura

Toda a estrutura é flexível com seção transversal quadrada de lado igual a 10,0 cm. O arco foi discretizado em 12 elementos finitos de aproximação cúbica e possui módulo de elasticidade longitudinal igual a 200,0 GPa. A manivela é modelada com cinco elementos finitos e possui módulo de elasticidade longitudinal dez vezes maior do que o arco. O módulo de elasticidade transversal é adotado como metade do valor longitudinal para todas as barras.

A evolução do momento reativo necessário à movimentação do nó fixo da manivela é apresentada na Fig. 13 juntamente com algumas configurações deformadas da estrutura. Nas Fig. 14 e 15 são apresentados os resultados de esforço normal para o ponto médio da manivela e a posição vertical do ponto central do arco, respectivamente.

Nota-se dessas curvas a ocorrência de instabilidades presentes em diversos pontos limites (indicados por momento nulo mudando de sinal), que puderam ser avaliados devido ao controle do giro da manivela. O que era esperado dado à estrutura ser abatida.

Além disso, observa-se para o ponto correspondente à $\psi = 1,656rad$ a existência de uma tangente vertical à esquerda da curva de momento e uma tangente com valor diferente à direita, indicando a presença do fenômeno de *snap-back*. Devido à utilização do método de Newton-Raphson neste sistema de vários graus de liberdade não foi possível obter o trecho da trajetória no qual este equilíbrio instável ocorre. Para tanto seria necessária a adoção de um método de comprimento de arco na solução do sistema.

Especialmente na Fig. 14 percebe-se a existência de valores de ângulo para os quais o esforço normal na manivela é nulo. Portanto, dos resultados apresentados, nota-se claramente a potencialidade da formulação desenvolvida e sua consistência na avaliação do comportamento estrutural.

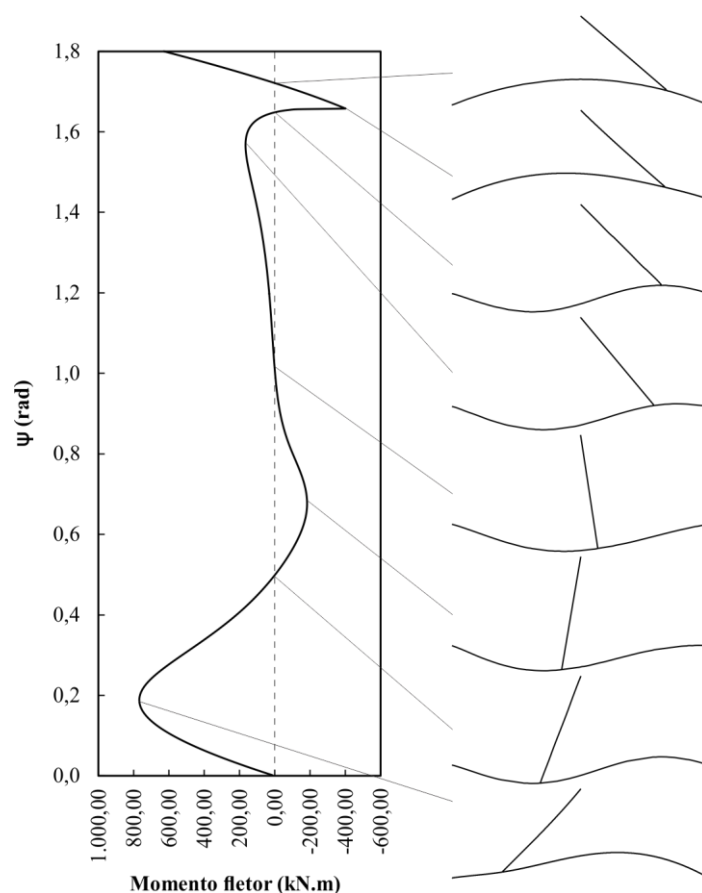


Figura 13 – Momento fletor no nó de aplicação do giro e deformadas da estrutura

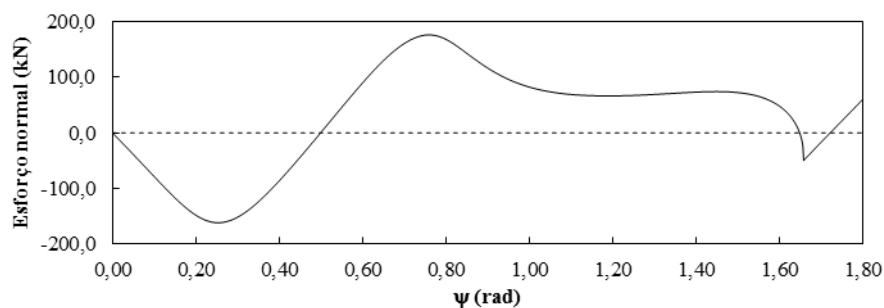


Figura 14 – Esforço normal no ponto médio da manivela

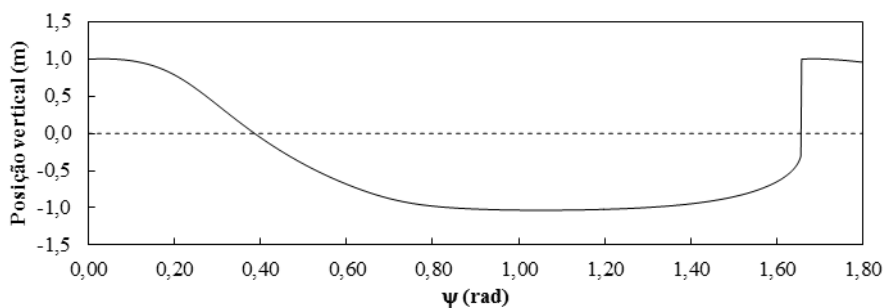


Figura 15 – Posição vertical do ponto central do arco

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um equacionamento para a análise não linear geométrica de pórticos planos contendo ligações deslizantes por meio do método dos elementos finitos baseado em posições. Como pode se observar, tanto a formulação não linear geométrica de pórticos planos com a cinemática de Reissner, quanto à técnica de multiplicadores de Lagrange para a introdução das ligações deslizantes foram adequadamente implementadas e testadas.

Com os exemplos apresentados pode-se perceber que a formulação é capaz de representar adequadamente o comportamento de estruturas deformáveis contendo ligações deslizantes, incluindo-se a análise de instabilidades, por meio de uma formulação bastante simples para sua introdução ao sistema estrutural.

Como sequência deste trabalho pretende-se estender a metodologia empregada na introdução das ligações deslizantes para a simulação de estruturas tridimensionais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro e financiamento do laboratório, necessários para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- BAUCHAU, O. A. On the modeling of prismatic joints in flexible multi-body systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 87-105, Jan 2000. ISSN 0045-7825.
- BAUCHAU, O. A.; BOTTASSO, C. L. Contact Conditions for Cylindrical, Prismatic, and Screw Joints in Flexible Multibody Systems. **Multibody System Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 251-278, 2001.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579-595, 2000.
- CARDONA, A.; GERADIN, M.; DOAN, D. B. Rigid and flexible joint modeling in multibody dynamics using finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1-3, p. 395-418, 1991.
- CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. IN: 17TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 2003.
- _____. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47-48, p. 3712-3722, 2009.
- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541-3557, 8/20/ 2004. ISSN 0045-7825.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, 2009.

_____. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319-333, 2011.

_____. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1-15, 2014.

GARCIA-VALLEJO, D. et al. Describing rigid-flexible multibody systems using absolute coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 34, n. 1-2, p. 75-94, Oct 2003.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141-1174, 2006.

GÉRADIN, M.; CARDONA, A. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.

HONG, D. F.; REN, G. X. A modeling of sliding joint on one-dimensional flexible medium. **Multibody System Dynamics**, v. 26, n. 1, p. 91-106, Jun 2011.

LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. New York: Dover Publications 1970.

LEE, S. H. et al. The development of a sliding joint for very flexible multibody dynamics using absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 20, n. 3, p. 223-237, 2008.

MOON, Y. et al. Design and Kinematic Analysis of a New End-Effector for a Robotic Needle Insertion-Type Intervention System. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, v. 11, Dec 2014.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 1999.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984.

REIS, M. C. J.; CODA, H. B. Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 7, p. 1163-1189, 2014.

SUGIYAMA, H.; ESCALONA, J. L.; SHABANA, A. A. Formulation of three-dimensional joint constraints using the absolute nodal coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 31, n. 2, p. 167-195, 2003.

YOO, W. S. et al. Developments of multibody system dynamics: Computer simulations and experiments. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 1, p. 35-58, 2007.