



UM MODELO PARA O CÁLCULO DA FLECHA EM VIGAS DE AÇO COM ABERTURAS NA ALMA CONSIDERANDO AS INFLUÊNCIAS DA FORMA E DA POSIÇÃO DAS ABERTURAS

Daniel Boy Vasconcellos

José Carlos Lopes Ribeiro

Gustavo de Souza Veríssimo

danielboyvasconcellos@gmail.com

jcarlos.ribeiro@ufv.br

gustavo@ufv.br

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa

Av. P. H. Rolfs, s/n, Campus da UFV, 36570-000, Viçosa/MG - Brasil

Resumo. Neste trabalho desenvolveu-se um modelo semiempírico, ajustado por regressão não linear, para determinação do deslocamento vertical (flecha) em vigas de aço com aberturas na alma. O modelo foi construído a partir de um conjunto de resultados de simulações numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). As simulações foram feitas com o software ABAQUS, variando-se a relação vão/altura da viga, a relação entre a altura da abertura e a altura da viga e variando-se o tipo de abertura e sua posição. As equações semiempíricas, propostas para quatro tipos comuns de carregamento, apresentaram excelente concordância com os resultados numéricos e permitem o cálculo da flecha em vigas com e sem aberturas, considerando, em ambos os casos, os deslocamentos devido à flexão e ao cisalhamento.

Palavras-chave: Vigas de aço, Aberturas na alma, Flecha, MEF, Modelo semiempírico

1 INTRODUÇÃO

Nos sistemas de piso de edifícios em estrutura metálica de múltiplos andares geralmente lida-se com o problema da integração entre estrutura e dutos de serviços (instalações diversas de energia, água, esgoto, incêndio, ar condicionado, etc.). No passado, a alternativa de fazer aberturas nas almas das vigas para passar os dutos de serviços era evitada devido à dificuldade de descrever ou prever a distribuição de tensões e deformações no entorno das aberturas. Diante disso, a alternativa era passar os dutos sob as vigas. Esta solução implica em aumento do espaço vertical necessário por pavimento.

Mais recentemente, tem se tornado frequente a necessidade de limitar a altura dos pavimentos de um edifício, ora por exigências de regulamentos municipais, ora por aspectos econômicos ou estéticos. A alternativa de fazer aberturas nas vigas para passar os dutos, e assim economizar espaço vertical, tem um apelo enorme, pois resulta em redução de volumes e áreas da construção, possibilitando economia tanto na fase construtiva como, posteriormente, em manutenção e operação.

Diante disso, diversos estudos vêm sendo realizados para se conhecer as reais distribuições de tensões e deformações em vigas de aço com aberturas na alma, dando origem a modelos de cálculo capazes de prever a capacidade resistente desses elementos.

A Figura 1 mostra uma estrutura de edifício em que as vigas possuem aberturas na alma para a passagem de dutos de serviço. As aberturas podem ser concêntricas ou excêntricas em relação à semialtura da seção transversal da viga.



Figura 1. Vigas de aço com aberturas na alma (Ribeiro et al., 2013)

Vários estudos foram feitos nas décadas de 1960, 1970 e 1980 nos Estados Unidos e no Canadá, abordando casos particulares de aberturas em almas de vigas, tais como aberturas circulares, retangulares, concêntricas e excêntricas. Além disso, investigou-se casos de aberturas presentes em vigas de aço isoladas e em vigas mistas. Posteriormente, baseado em vários desses estudos, Darwin (1990) publicou um guia de cálculo pelo *American Institute of Steel Construction (AISC)*, entidade responsável pela norma americana de projeto de estruturas de aço.

Além de alterar a capacidade resistente à flexão e ao cisalhamento das vigas, a presença de aberturas na alma pode afetar em maior ou menor grau os deslocamentos verticais sofridos pelas vigas sob carregamento (Veríssimo, 1996). A elaboração de um modelo analítico capaz de fornecer o deslocamento vertical máximo de vigas com aberturas é difícil, tendo em vista as diversas variáveis e as inúmeras possibilidades de arranjos das aberturas envolvidas no processo.

Diante disso, o presente trabalho propõe, com base em várias simulações numéricas obtidas via Método dos Elementos Finitos (MEF), um modelo semiempírico capaz de calcular a flecha máxima sofrida em uma viga de aço com aberturas concêntricas retangulares, quadradas ou circulares, para cada carregamento simétrico seguinte: uniformemente distribuído, uma força concentrada no meio do vão, duas forças concentradas a um terço do vão e três forças concentradas a um quarto do vão. Esses carregamentos foram escolhidos por serem os mais comuns em vigas de sistemas de piso em estruturas metálicas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Várias formulações foram desenvolvidas para o cálculo da flecha em vigas com abertura na alma. Pode-se citar os seguintes trabalhos voltados para vigas de aço: McCormick (1972), ASCE (1992) e Dougherty e Brian (1980). Esses procedimentos determinam os deslocamentos devido às aberturas na alma, que são posteriormente somados à flecha máxima da viga sem abertura. Entre os três, o processo de Dougherty e Brian (1980) é o que considera menos simplificações e o mais genérico (Veríssimo, 1996). Há ainda os trabalhos propostos por Donahey (1987) e Donahey e Darwin (1986), que abrangem o caso de vigas mistas e utilizam análise matricial para o cálculo das deformações.

Segundo Veríssimo (1996), o processo analítico aproximado de Dougherty fornece resultados com precisão razoável, mas só é aplicável em casos particulares em que existe apenas uma abertura na peça ou duas aberturas simétricas em relação ao vão e, além disso, é voltado apenas para vigas de aço.

A análise matricial estabelecida por Donahey (1987) e Donahey e Darwin (1986) fornece resultados plausíveis quando comparados com dados de ensaio e são melhores ainda quando se inclui na análise as deformações do cisalhamento. Esse método apresenta-se, também, como uma alternativa mais geral, já que contempla vigas mistas e aberturas múltiplas com posições quaisquer. Além disso, esse procedimento gera resultados mais precisos em relação aos de Dougherty (Veríssimo, 1996).

Veríssimo e Ribeiro (2012) apresentaram um modelo semiempírico, dado pela Eq. (1), para estimar a flecha ($\delta_{tot,ab}$) de uma viga de aço com aberturas na alma submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Esse modelo foi obtido através da regressão não linear de um conjunto de resultados de simulações numéricas desenvolvidas no *software* ABAQUS (Simulia, 2012). A regressão foi feita minimizando-se o somatório dos quadrados das diferenças entre os valores encontrados pela equação semiempírica proposta e os obtidos nos modelos via MEF.

$$\delta_{tot,ab} = \delta_{tot} \left[1 + 5167 \left(\frac{d}{L} \right)^{3.19} \left(\frac{h_o}{d} \right)^{6.48} \left(\frac{n}{\alpha} \right)^{1.42} \right] \quad (1)$$

Na equação acima δ_{tot} é a flecha da viga sem aberturas, causada pela combinação de ações de serviço aplicável, calculada conforme a ABNT NBR 8800:2008, n é o número de aberturas, d é a altura do perfil, h_o é altura da abertura, L é o vão da viga e α é um coeficiente

de ajuste, igual a 1 para aberturas retangulares com razão de aspecto máxima de 2:1, 2 para aberturas quadradas e 3 para aberturas circulares.

Aprimorando a Equação (1), Ribeiro et al. (2013) acrescentaram um termo (I_o) para contabilizar a perda de inércia na viga devido à abertura e considerar indiretamente a esbeltez da alma, conforme a Eq. (2). O acréscimo do termo I_o melhorou a correlação dos resultados do modelo semiempírico com os resultados da simulação numérica.

$$I_o = \frac{t_w h_o^3}{d^2 b_f t_f} \quad (2)$$

Após refazer a regressão não linear com base no Método dos Mínimos Quadrados, os autores obtiveram a Eq. (3), onde α é igual a 1.0 para aberturas retangulares, 2.9 para aberturas quadradas e 4.5 para aberturas circulares.

$$\delta_{tot,ab} = \delta_{tot} \left[1 + 18065 \left(\frac{d}{L} \right)^{3.56} \left(\frac{h_o}{d} \right)^{7.59} \left(\frac{n}{\alpha} \right)^{1.83} (1 - I_o)^{0.319} \right] \quad (3)$$

Observa-se, no entanto, que a equação acima não considera a influência da posição da abertura nos deslocamentos verticais da viga e não possibilita o emprego simultâneo de aberturas de tipos diferentes em uma mesma viga.

3 METODOLOGIA

3.1 Aspectos gerais

Para atingir os objetivos propostos, foi realizado um estudo paramétrico por meio de análises elásticas lineares de primeira ordem de vigas biapoiadas com aberturas concêntricas em relação à linha neutra, efetuadas com modelos numéricos de elementos finitos construídos com o auxílio do *software* ABAQUS (Simulia, 2012), como mostrado na Figura 2.

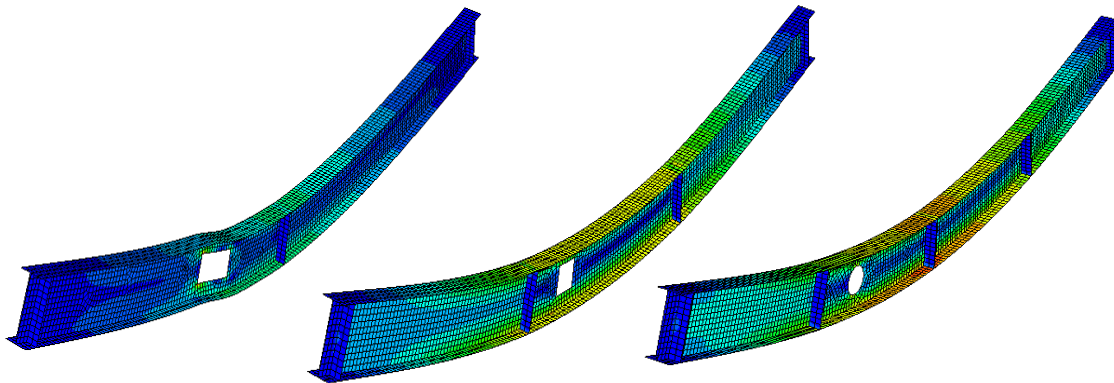


Figura 2. Modelos de elementos finitos de viga com aberturas na alma

Como parte do estudo paramétrico, foram simulados diversos casos em que alguns parâmetros geométricos do modelo de elementos finitos foram variados, de modo a produzir uma série de resultados que pudesse ser submetida a um processo de ajuste estatístico, visando à elaboração de um modelo semiempírico de simples aplicação para o cálculo da flecha máxima de vigas com aberturas.

Para o monitoramento da flecha, adotou-se a média dos deslocamentos verticais no meio do vão do ponto superior e inferior da alma, ainda que a presença de uma abertura isolada,

fora do centro do vão, desloque a posição da deflexão linear vertical máxima. Isso é satisfatório, tendo em vista que esse desvio da posição da flecha máxima, na maioria dos casos, é relativamente pequeno.

A ação considerada para as análises com carregamento uniformemente distribuído foi de 1 kN/m e, em relação aos casos com forças concentradas, utilizou-se 1 kN para cada força.

Para o modelo constitutivo do aço, adotou-se 200 GPa para o módulo de elasticidade (E) e 0.3 para o coeficiente de Poisson (ν), conforme sugerido pela ABNT NBR 8800:2008, e restringiu-se o estudo, como já mencionado, para as aberturas circulares, quadradas e retangulares com razão de aspecto de 2:1.

Como o cálculo da flecha de vigas típicas de sistemas de piso é bem conhecido, buscou-se construir uma abordagem simples que facilitasse o trabalho do engenheiro. Assim, a estratégia adotada foi ajustar um modelo semiempírico capaz de computar os deslocamentos decorrentes da presença de aberturas na alma e somá-las à flecha da viga sem aberturas. O modelo semiempírico foi obtido a partir de análise de regressão não-linear dos resultados numéricos.

3.2 Características do modelo numérico

O modelo numérico foi discretizado utilizando-se elementos do tipo S8R, um elemento de casca quadrilateral com oito nós e integração reduzida.

Para a definição da dimensão ideal dos elementos, foi realizada uma análise de sensibilidade, a partir da qual constatou-se que uma malha com elementos de quatro centímetros fornece resultados com precisão satisfatória para os deslocamentos sofridos pelas vigas.

Foram modelados enrijecedores de alma, com a mesma espessura da mesa e distantes de $12t_w$ da extremidade da viga (t_w é espessura da alma), para evitar deformação localizada na região dos apoios em função da reação de apoio, já que o enrijecedor permite um espraiamento mais suave do esforço de reação na viga. Diante dessa justificativa, também modelou-se enrijecedores de alma sob cada força concentrada. Os raios de concordância entre as mesas e a alma dos perfis laminados foram desprezados para fins de modelagem.

A Figura 3 mostra, esquematicamente, as regiões adotadas para as condições de contorno do apoio de segundo gênero, na região do enrijecedor. Ao longo da linha azul (horizontal) impediu-se a translação vertical e ao longo da linha vermelha (vertical) impediu-se a translação na direção perpendicular a alma (vínculo de garfo). No ponto preto, presente apenas em um dos enrijecedores de extremidade da viga, impediu-se a translação longitudinal.

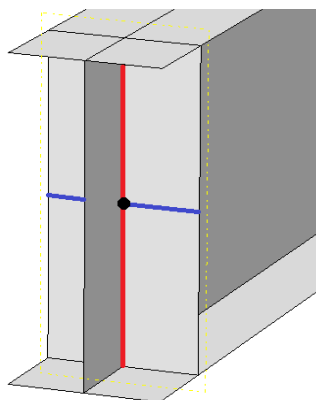


Figura 3. Detalhe das condições de contorno (apoio de 2º gênero)

O vão L da viga, para os cálculos subsequentes, foi tomado como sendo a distância entre enrijecedores de extremidade e, além disso, considerou-se uma distância mínima para a locação de uma abertura, entre a borda de uma abertura e um enrijecedor, igual à altura d do perfil (ASCE, 1992).

3.3 Definição dos parâmetros e do modelo semiempírico

Foram definidos alguns parâmetros que, presumivelmente, influenciam na flecha de vigas com aberturas na alma, conforme Veríssimo e Ribeiro (2012) e Ribeiro et al. (2013), a saber:

=> a relação entre o vão da viga e a altura da seção do perfil de aço $[L/d]$;

=> a relação entre a altura da abertura e a altura da seção do perfil de aço $[h_o/d]$;

=> um fator (I_o) que relaciona a inércia da abertura com a inércia da seção do perfil de alma cheia dado pela Eq. (2).

Além desses, também foram considerados os seguintes parâmetros:

=> a relação entre a posição do centro geométrico da abertura na viga e o vão da viga $[x/L]$;

=> o efeito do cisalhamento na flecha da viga por meio da relação entre a inércia do perfil de alma cheia em torno do eixo de simetria perpendicular à alma, representado neste trabalho por I_z , e o produto do vão da viga ao quadrado pela área da alma $[I_z/(L^2 A_w)]$.

O propósito, então, foi determinar uma equação para cada tipo de abertura da seguinte forma:

$$f_o = f_{Tot} \left(1 + \sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (4)$$

em que:

f_o é a flecha da viga com abertura;

f_{Tot} é a flecha da viga com alma cheia considerando a flecha devido ao momento fletor (f_M) e a flecha devido à força cortante (f_V);

m_i é um fator para cada abertura i que leva em conta a influência dos parâmetros citados anteriormente;

n é o número de aberturas.

Tendo em vista que o problema em causa envolve apenas análises lineares, é válido o Princípio da Superposição dos Efeitos, representado pelo somatório na Eq. (4). Desenvolvendo-se a Eq. (4) tem-se:

$$f_o = f_{Tot} (1 + \sum m) = (f_M + f_V) (1 + \sum m) = f_M \left(1 + \frac{f_V}{f_M} \right) (1 + \sum m) \quad (5)$$

As variáveis que envolvem o termo f_V/f_M da Eq. (5) foram obtidas para cada tipo de carregamento descrito no item 1.2. Para melhor visualização, desenvolve-se a seguir uma análise para o caso de carregamento uniformemente distribuído.

Com base na Figura 4 e pela Resistência dos Materiais, sabe-se que $f_M = 5qL^4/(384EI_z)$ e, como o material foi considerado elástico-linear, a energia de deformação (U_i) devida ao cisalhamento é dada pela Eq. (6) a seguir:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (6)$$

em que τ é a tensão de cisalhamento e G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento. É razoável supor que o esforço cortante é resistido apenas pela alma e possui distribuição praticamente uniforme nesse elemento, ou seja, $\tau = V/A_w$, em que V é a força cortante em uma seção da viga e A_w é a área da alma. Assim, para uma força F fictícia aplicada de cima para baixo no meio do vão, e um carregamento uniformemente distribuído q , de acordo com o segundo teorema de Castigliano e com base na Eq. (6), tem-se que:

$$\delta = \frac{\partial U_i}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \right) = \int_V \frac{\tau}{G} \frac{\partial \tau}{\partial F} dV = \int_V \left[\frac{V}{A_w G} \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{V}{A_w} \right) \right] dV \quad (7)$$

em que δ é o deslocamento na direção e sentido de F , ou seja, $\delta = f_V$. A força cortante varia ao longo da viga ($0 \leq x \leq L/2$) de acordo com a expressão $qL/2 + F/2 - qx$, em que a direção e sentido de x estão indicadas na Figura 4.

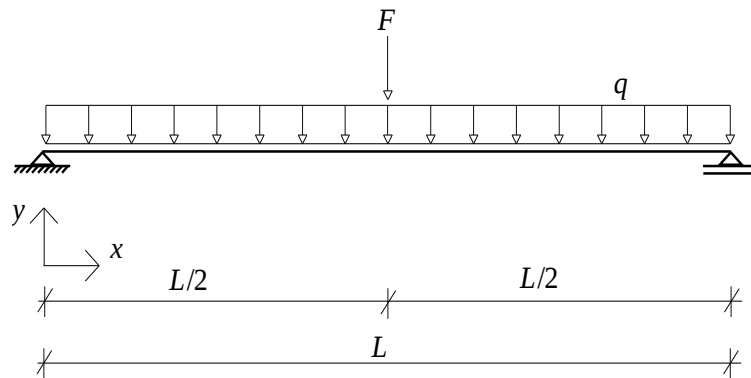


Figura 4. Esquema para a aplicação do segundo teorema de Castigliano em uma viga sob carregamento uniformemente distribuído

Substituindo-se a expressão para V na Eq. (7), utilizando-se da simetria do problema e lembrando que F é uma força fictícia, obtém-se:

$$f_V = \frac{2}{A_w^2 G} \int_0^{L/2} \left[\left(\frac{qL}{2} + \frac{F}{2} - qx \right) \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{qL}{2} + \frac{F}{2} - qx \right) \right] A_w dx =$$

$$= \frac{1}{A_w G} \int_0^{L/2} \left(\frac{qL}{2} - qx \right) dx = \frac{1}{A_w G} \left(\frac{qL^2}{4} - \frac{qL^2}{8} \right) \Rightarrow f_v = \frac{qL^2}{8A_w G} \quad (8)$$

Assim, substituindo-se a Eq. (8) e a expressão para f_M na relação f_v/f_M , tem-se:

$$\frac{f_v}{f_M} = \frac{qL^2}{8A_w G} \frac{384 E I_z}{5 q L^4} = \frac{384 E I_z}{8 A_w 0.385 E 5 L^2} = 24.94 \frac{I_z}{A_w L^2} \quad (9)$$

em que utilizou-se o coeficiente de Poisson ν igual a 0.3 na relação $G = E/[2(1+\nu)]$ para a obtenção de G em função de E . O termo $I_z/(A_w L^2)$, que é um dos parâmetros mencionados no item 3.3, também aparece no desenvolvimento da relação f_v/f_M para os outros carregamentos. As constantes que acompanham esse termo não foram inseridas na regressão tendo em vista que fez-se um ajuste estatístico nas equações finais em uma etapa posterior.

3.4 Modelo para análise de regressão

Com base na Eq. (5), a equação para regressão assume a seguinte forma ($n = 1$):

$$f_o = f_M \left(1 + x_{10} \frac{I_x}{A_w L^2} \right) \left\{ 1 + x_1 \left(\frac{d}{L} \right)^{x_2} \left(\frac{h_o}{d} \right)^{x_3} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^{x_4} + x_5 \left(\frac{x}{L} \right)^{x_6} + x_7 \left(\frac{x}{L} \right)^{x_8} \right] I_o^{x_9} \right\} \quad (10)$$

em que convencionou-se:

$$\beta = \left(1 + x_{10} \frac{I_x}{A_w L^2} \right) \quad (11)$$

$$m = x_1 \left(\frac{d}{L} \right)^{x_2} \left(\frac{h_o}{d} \right)^{x_3} \delta I_o^{x_9} \quad (12)$$

sendo:

$$\delta = \left(\frac{x}{L} \right)^{x_4} + x_5 \left(\frac{x}{L} \right)^{x_6} + x_7 \left(\frac{x}{L} \right)^{x_8} \quad \text{para } (x/L) \leq 0.50 \quad (13a)$$

$$\delta = \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{x_4} + x_5 \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{x_6} + x_7 \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{x_8} \quad \text{para } (x/L) > 0.50 \quad (13b)$$

O termo I_o é dado pela Eq. (2).

3.5 Planejamento das simulações

Visando cobrir toda a faixa de variação de esbeltez da alma para as séries de perfis laminados fabricados no Brasil, foram utilizados cinco perfis I laminados de abas paralelas conforme mostrado na Tabela 1.

Tabela 1. Perfis utilizados nas análises

Perfil	Esbeltez de alma ($\lambda_w = h/t_w$)
W 310×21	57.25
W 460×52	56.32
W 460×82	43.23
W 460×106	33.97
W 760×134	60.42

Para cada um dos perfis listados na Tabela 1 foram simulados modelos para três tipos de abertura, três relações L/d , três relações h_o/d e dez posições de abertura conforme mostrado na Tabela 2. O tipo “R” representa as aberturas retangulares, o “Q” as quadradas, o “C” as circulares e o “S” os casos sem aberturas.

Tabela 2. Planejamento das simulações

Para cada perfil I estudado	Tipo: R, Q, C ou S	$L/d = 10$	$h_o/d = 0.3$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
			$h_o/d = 0.5$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
			$h_o/d = 0.7$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
		$L/d = 15$	$h_o/d = 0.3$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
			$h_o/d = 0.5$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
			$h_o/d = 0.7$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
		$L/d = 20$	$h_o/d = 0.3$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
			$h_o/d = 0.5$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$
			$h_o/d = 0.7$	$x/L(\%) = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50$

Devido à restrição para locação de uma abertura a uma distância mínima de um enrijecedor, diferentes números de casos foram processados para cada tipo de carregamento, como mostrado na Tabela 3.

Tabela 3. Números de casos processados

Tipo de Carregamento	Retangular	Quadrada	Circular	Sem abertura	Total
Uniformemente distribuído	380	390	390	15	1175
Uma força concentrada	265	285	285	15	850
Duas forças concentradas	185	230	230	15	660
Três forças concentradas	100	120	120	15	355

3040

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com os resultados das análises numéricas, foi feita uma análise de regressão não linear utilizando a ferramenta Solver do programa EXCEL 2007. A regressão foi realizada de modo a minimizar simultaneamente o somatório dos quadrados dos erros e os valores absolutos dos erros percentuais. Dessa análise, as constantes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ da Eq. (10) foram obtidas para cada equação referente ao seu caso de carregamento e à sua respectiva abertura conforme mostrado na Tabela 4 e na Tabela 5. Essas equações possuem a forma expressa pela Eq. (14) (para $n = 1$).

$$f_o = f_M \beta (1 + m) \quad (14)$$

Tabela 4. Equações obtidas para o carregamento uniformemente distribuído e para o de uma força concentrada

		Uniformemente Distribuído	Uma força concentrada
β		$\beta = 1 + 17.2 \frac{I_z}{A_w L^2}$	$\beta = 1 + 27.75 \frac{I_z}{A_w L^2}$
Ret.	m	$m = 176 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.03} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{7.75} \delta I_o^{-0.61}$	$m = 174 \left(\frac{d}{L}\right)^{2.98} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{7.95} \delta I_o^{-0.594}$
	δ	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 91 \left(\frac{x}{L}\right)^{-0.0415} - 186 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.04}$	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 66 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.05} - 186 \left(\frac{x}{L}\right)^{17.44}$
Quad.	m	$m = 132 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.59} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{6.2} \delta I_o^{-0.555}$	$m = 81 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.45} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{6.91} \delta I_o^{-0.490}$
	δ	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{20} + 105 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.161} - 145 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.74}$	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{20} + 67 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.11} - 144 \left(\frac{x}{L}\right)^{12.06}$
Circ.	m	$m = 177 \left(\frac{d}{L}\right)^{5.13} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{3.86} \delta I_o^{-0.483}$	$m = 159 \left(\frac{d}{L}\right)^{4.45} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{4.66} \delta I_o^{-0.257}$
	δ	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 87 \left(\frac{x}{L}\right)^{-0.283} - 189 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.96}$	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 53 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.20} - 189 \left(\frac{x}{L}\right)^{14.07}$

Tabela 5. Equações obtidas para o carregamentos de duas e de três forças concentradas

		Duas forças concentradas	Três forças concentradas
β		$\beta = 1 + 17.52 \frac{I_z}{A_w L^2}$	$\beta = 1 + 16.38 \frac{I_z}{A_w L^2}$
Ret.	m	$m = 351 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.17} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{8.32} \delta I_o^{-0.633}$	$m = 395 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.34} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{8.61} \delta I_o^{-0.620}$
	δ	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19.83} + 182 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.26} - 334 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.11}$	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 197 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.09} - 370 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.05}$
Quad.	m	$m = 190 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.61} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{7.06} \delta I_o^{-0.636}$	$m = 395 \left(\frac{d}{L}\right)^{4.09} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{9.10} \delta I_o^{-0.548}$
	δ	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{20} + 122 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.35} - 209 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.17}$	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 197 \left(\frac{x}{L}\right)^{-0.07} - 370 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.19}$
Circ.	m	$m = 185 \left(\frac{d}{L}\right)^{6.06} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{4.49} \delta I_o^{-0.589}$	$m = 200 \left(\frac{d}{L}\right)^{4.33} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{8.64} \delta I_o^{-0.161}$
	δ	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{20} + 130 \left(\frac{x}{L}\right)^{-1.23} - 180 \left(\frac{x}{L}\right)^{15.10}$	$\delta = \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 75 \left(\frac{x}{L}\right)^{-0.33} - 180 \left(\frac{x}{L}\right)^{17.44}$

Na Tabela 6 é mostrado o coeficiente de determinação (R^2), o coeficiente de determinação ajustado ($\bar{R}^2$) e o coeficiente de variação (c_v) para cada modelo de regressão, correspondente ao seu tipo de abertura.

Tabela 6. Resultados estatísticos dos modelos semiempíricos

Tipo de carregamento	Forma da abertura	Parâmetros estatísticos		
		R^2	$\bar{R}^2$	$c_v(\%)$
Uniformemente distribuído	Retangular	0.997	0.997	0.89%
	Quadrada	0.978	0.978	0.77%
	Circular	0.947	0.947	0.73%
Uma força concentrada	Retangular	0.998	0.998	0.92%
	Quadrada	0.982	0.982	0.92%
	Circular	0.949	0.948	0.93%
Duas forças concentradas	Retangular	0.974	0.973	1.22%
	Quadrada	0.958	0.957	0.89%
	Circular	0.893	0.891	0.87%
Três forças concentradas	Retangular	0.961	0.960	0.77%
	Quadrada	0.913	0.909	0.70%
	Circular	0.771	0.763	0.74%

Os parâmetros estatísticos apresentados na Tabela 6 são dados por:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(k+1)}(1-R^2) \quad (15)$$

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{tot}} \quad (16)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2} = \sqrt{\frac{SQ_{res}}{N}} \quad (17)$$

$$c_v = \frac{\sigma}{\mu} \quad (18)$$

Na Equação (15), n é o número de amostras e k o número de variáveis explicativas, que neste trabalho foram cinco (item 3.3). Nas Equações (16) e (17) tem-se:

$$SQ_{res} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad (19)$$

e:

$$SQ_{tot} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (20)$$

em que:

N é o número de amostras;

y_i é o valor observado;

$\bar{y}$ é a média das observações;

e $\hat{y}_i$ é o valor estimado (previsão de y_i).

Na Equação (17), a população considerada para o cálculo do desvio padrão é a diferença $\hat{y}_i - y_i$. Neste caso, a média do erro μ se aproxima continuamente de zero, o que torna razoável a simplificação mostrada na Eq. (17).

Porém, para o cálculo do coeficiente de variação c_v , atribuir zero à média μ da população de erros leva a uma indeterminação. Assim, optou-se por calcular o coeficiente de variação em relação à média da população y_i , ou seja, $\mu = \bar{y}$, sendo $\bar{y}$ a média dos resultados para f_o/f_M obtidos via MEF. Desta forma, o coeficiente de variação c_v representa o desvio padrão dos erros de estimativa da flecha da viga com abertura em relação ao incremento médio de flecha na viga devido à presença da abertura.

Na Tabela 7 apresentam-se os erros máximos e mínimos correlacionando os resultados obtidos pelos modelos semiempíricos com os fornecidos via MEF.

Tabela 7. Erros percentuais dos modelos de regressão

Caso de carregamento	Tipo de abertura	Erros (%)	
		Mínimo	Máximo
Uniformemente distribuído	Retangular	-2.54	+2.63
	Quadrada	-1.46	+1.69
	Circular	-1.23	+1.69
Uma força concentrada	Retangular	-2.06	+2.02
	Quadrada	-1.82	+2.02
	Circular	-1.35	+1.98
Duas forças concentradas	Retangular	-2.67	+4.51
	Quadrada	-1.32	+1.81
	Circular	-0.88	+1.81
Três forças concentradas	Retangular	-2.12	+1.84
	Quadrada	-2.12	+1.51
	Circular	-2.12	+1.51

Como mostrado nas Tabelas 6 e 7, o ajuste estatístico para os modelos com carregamento uniformemente distribuído foi excelente. Os coeficientes de determinação e determinação ajustado estão bem próximos da unidade e o coeficiente de variação possui valores bastante reduzidos.

Os resultados para os modelos com uma, duas e três forças concentradas também foram muito bons. Para todos os tipos de carregamento, exceto o de duas forças concentradas com abertura retangular, os erros percentuais situaram-se em uma de faixa de $\pm 3\%$, o que revela boa precisão para cálculos de flecha. O erro máximo de $+4.51\%$ para o carregamento de duas forças concentradas com abertura retangular é conservador, já que superestima o deslocamento vertical máximo da viga.

Observa-se ainda que, na maioria dos casos analisados, o R^2 e $\bar{R}^2$ aumentam da abertura circular para a quadrada e desta para a retangular. Entretanto, os erros absolutos máximos e o c_v da abertura circular, na maioria dos casos, são menores ou iguais aos da abertura quadrada que, por sua vez, são menores ou iguais aos da abertura retangular. Portanto, ainda que em alguns casos o coeficiente de determinação para aberturas circulares apresenta-se relativamente baixo, a validação dessas regressões é satisfatória.

5 EXEMPLO

Deseja-se calcular a flecha máxima de uma viga de aço biapoiada com vão $L = 9$ m, constituída de um perfil laminado W530×74 com altura (d) igual a 0.529 m, largura das mesas (b_f) igual 0.166 m, espessura das mesas (t_f) igual 0.0136 m e espessura da alma (t_w) igual 0.0097 m, contendo uma abertura retangular, situada a 1.5 m do apoio de segundo gênero e com relação $h_o/d = 0.6$, e uma abertura circular, localizada no centro do vão e com relação $h_o/d = 0.7$, como representado na Figura 5. A viga está submetida ao carregamento de serviço e, para os cálculos subsequentes, desconsidera-se a contribuição dos raios de concordância entre as mesas e a alma na inércia da viga.

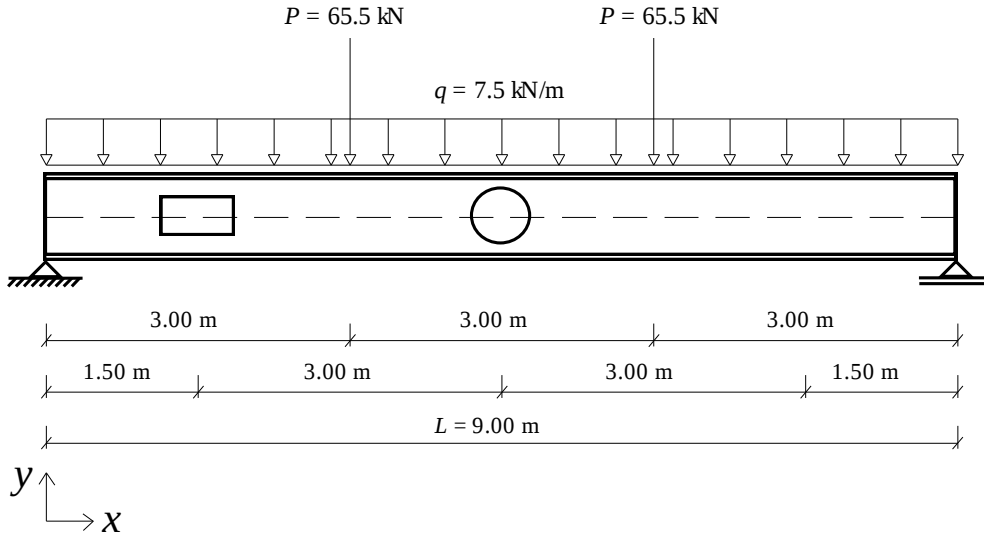


Figura 5. Esquema de carregamento na viga

Pelo Princípio da Superposição dos Efeitos, o carregamento da viga da Figura 5 pode ser decomposto em dois carregamentos como mostrado na Figura 6.

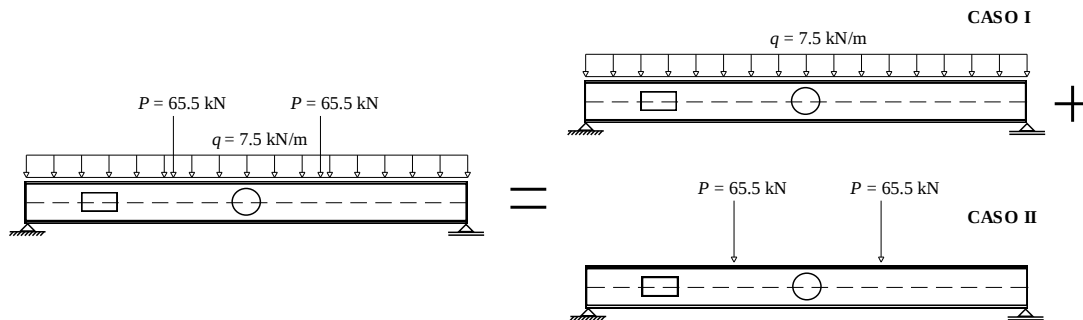


Figura 6. Separação dos carregamentos para cálculo da flecha total

Prossegue-se, agora, para a determinação da flecha máxima do caso I da Figura 6. Determinação de f_M :

$$f_M = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_z} = \frac{5}{384} \times \frac{7.5 \times 10^{-3} \times 9000^4}{200 \times 40205.77 \times 10^4} = 7.97 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (21)$$

Utilizando a expressão de β da Tabela 4 referente ao carregamento uniformemente distribuído tem-se:

$$\beta = 1 + 17.2 \frac{I_z}{L^2 A_w} = 1 + 17.2 \times \frac{40205.77 \times 10^4}{9000^2 \times (529 \times 9.7)} = 1.0166 \quad (22)$$

Cálculo de I_o para a abertura retangular de acordo com a Eq.(2):

$$I_o = \frac{t_w h_o^3}{d^2 b_f t_f} = \frac{9.7 \times (0.6 \times 529)^3}{529^2 \times 166 \times 13.6} = 0.491 \quad (23)$$

Cálculo de I_o para a abertura circular:

$$I_o = \frac{t_w h_o^3}{d^2 b_f t_f} = \frac{9.7 \times (0.7 \times 529)^3}{529^2 \times 166 \times 13.6} = 0.780 \quad (24)$$

Sendo δ_1 e m_1 os parâmetros referentes à abertura retangular e δ_2 e m_2 os parâmetros referentes à abertura circular, pela Tabela 4 e para o carregamento uniformemente distribuído tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta_1 = & \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 91 \left(\frac{x}{L}\right)^{-0.0415} - 186 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.04} = \left(\frac{1500}{9000}\right)^{19} + 91 \left(\frac{1500}{9000}\right)^{-0.0415} + \\ & - 186 \left(\frac{1500}{9000}\right)^{1.04} = 69.16 \end{aligned} \quad (25)$$

Utilizando-se as Equações (23) e (25) chega-se a:

$$\begin{aligned} m_1 = & 176 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.03} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{7.75} \delta_1 I_o^{-0.61} = 176 \left(\frac{529}{9000}\right)^{3.03} \times (0.6)^{7.75} \times 69.16 \times \\ & \times (0.491)^{-0.61} = 0.0669 \end{aligned} \quad (26)$$

Vale ressaltar que a Eq. (26) mostra que a abertura retangular incrementa a flecha da viga sem abertura do caso I em 6.69 %. Prosseguindo-se com o cálculo do parâmetro δ_2 :

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \left(\frac{x}{L}\right)^{19} + 87 \left(\frac{x}{L}\right)^{-0.283} - 189 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.96} = \left(\frac{4500}{9000}\right)^{19} + 87 \left(\frac{4500}{9000}\right)^{-0.283} + \\ & - 189 \left(\frac{4500}{9000}\right)^{1.96} = 57.28 \end{aligned} \quad (27)$$

Utilizando-se as Equações (24) e (27) obtém-se:

$$\begin{aligned} m_2 = & 177 \left(\frac{d}{L}\right)^{5.13} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{3.86} \delta_2 I_o^{-0.483} = 177 \left(\frac{529}{9000}\right)^{5.13} \times (0.7)^{3.86} \times 57.28 \times \\ & \times (0.78)^{-0.483} = 0.0014 \end{aligned} \quad (28)$$

De acordo com a Eq. (4) e utilizando as Equações (21), (22), (26) e (28) tem-se:

$$f_o = f_M \beta \left(1 + \sum_{i=1}^2 m_i\right) = 7.97 \times 1.0166 \times [1 + (0.0669 + 0.0014)] = 8.65 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (29)$$

Segue-se, agora, para a determinação da flecha máxima do caso II da Figura 6. Cálculo de f_M :

$$f_M = \frac{23}{648} \frac{PL^3}{EI_z} = \frac{23}{648} \times \frac{65.5 \times 10^{-3} \times 9000^3}{200 \times 40205.77 \times 10^4} = 21.07 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (30)$$

Utilizando a expressão de β da Tabela 5 referente a duas forças concentradas tem-se:

$$\beta = 1 + 17.52 \frac{I_z}{A_w L^2} = 1 + 17.52 \times \frac{40205.77 \times 10^4}{(529 \times 9.7) \times 9000^2} = 1.0169 \quad (31)$$

Seguindo-se a mesma convenção do caso I para o cálculo dos parâmetros δ e m , obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta_1 = & \left(\frac{x}{L}\right)^{19.83} + 182 \left(\frac{x}{L}\right)^{0.26} - 334 \left(\frac{x}{L}\right)^{1.11} = \left(\frac{1500}{9000}\right)^{19.83} + 182 \left(\frac{1500}{9000}\right)^{0.26} \\ & - 334 \left(\frac{1500}{9000}\right)^{1.11} = 68.51 \end{aligned} \quad (32)$$

Utilizando-se as Equações (23) e (32) chega-se a:

$$\begin{aligned} m_1 = & 351 \left(\frac{d}{L}\right)^{3.17} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{8.32} \delta_1 I_o^{-0.633} = 351 \left(\frac{529}{9000}\right)^{3.17} (0.6)^{8.32} \times 68.51 \times \\ & \times (0.491)^{-0.633} = 0.0675 \end{aligned} \quad (33)$$

Cálculo do parâmetro δ_2 do caso II:

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \left(\frac{x}{L}\right)^{20} + 130 \left(\frac{x}{L}\right)^{-1.23} - 180 \left(\frac{x}{L}\right)^{15.10} = \left(\frac{4500}{9000}\right)^{20} + 130 \left(\frac{4500}{9000}\right)^{-1.23} \\ & - 180 \left(\frac{4500}{9000}\right)^{15.10} = 304.93 \end{aligned} \quad (34)$$

Utilizando-se as Equações (24) e (34) obtém-se:

$$\begin{aligned} m_2 = & 185 \left(\frac{d}{L}\right)^{6.06} \left(\frac{h_o}{d}\right)^{4.49} \delta_2 I_o^{-0.589} = 185 \left(\frac{529}{9000}\right)^{6.06} (0.7)^{4.49} \times 304.93 \times \\ & \times (0.78)^{-0.589} = 0.0005 \end{aligned} \quad (35)$$

Assim, pela Eq. (4), tem-se que a flecha da viga devido às cargas concentradas considerando a presença das aberturas é, de acordo com as Equações (30), (31), (33) e (35):

$$f_o = f_M \beta \left(1 + \sum_{i=1}^2 m_i\right) = 21.07 \times 1.0169 \times [1 + (0.0675 + 0.0005)] = 22.89 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (36)$$

A flecha total (f_{total}) da viga, então, é dada pela soma das Equações (29) e (36):

$$f_{total} = 8.65 + 22.89 = 31.54 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (37)$$

A Figura 7 mostra os deslocamentos verticais obtidos por meio de análise numérica para a viga deste exemplo.

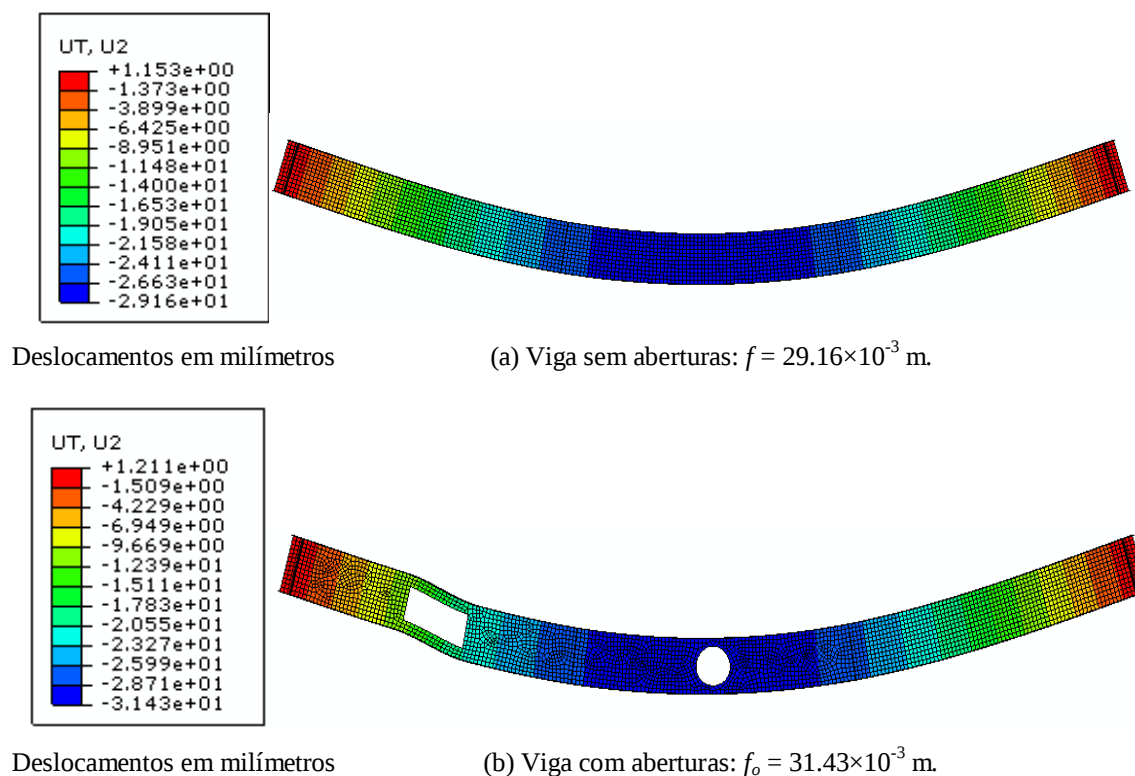


Figura 7. Deslocamentos verticais obtidos na análise numérica para (a) viga sem abertura e (b) viga com aberturas.

Pela Figura 7, observa-se que as duas aberturas provocaram um aumento de +7.78% na flecha da viga. Além disso, nota-se que a flecha do modelo semiempírico (31.54×10^{-3} m) apresentou um erro de +0.36% em relação ao resultado da modelagem numérica (31.43×10^{-3} m), o que mostra a eficácia das equações semiempíricas desenvolvidas neste trabalho.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram desenvolvidos modelos semiempíricos para o cálculo de flechas máximas em vigas com aberturas na alma. A fim de ajustar estatisticamente os modelos através de uma análise de regressão não linear, foram processados 1175 casos com carregamento uniformemente distribuído, 850 casos com uma força concentrada, 660 casos com duas forças concentradas e 355 casos com três forças concentradas sendo que, 15 modelos de cada carregamento citado, foram processados sem aberturas. Foi utilizado o *software* ABAQUS, que tem por base o MEF.

Para cada tipo de carregamento, variou-se a relação L/d , h_o/d , x/L e o tipo de abertura, obtendo-se no final uma equação relacionada a um tipo de abertura (retangular, quadrada ou circular) e a um carregamento estudado. Essas equações abrangem uma vasta possibilidade de arranjo de aberturas em vigas, contudo restringem-se a perfis I duplamente simétricos e a aberturas concêntricas.

Por fim, conclui-se que os resultados obtidos dos modelos semiempíricos apresentaram ótima correlação com os fornecidos via MEF. As equações para o cálculo de flechas são muito úteis e de fácil implementação em uma planilha eletrônica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e à Universidade Federal de Viçosa pelo apoio para a realização e divulgação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ABNT, 2008. NBR 8800:2008 – *Projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.
- ASCE, 1992. Task Committee on Design Criteria for Concrete Structure in Steel and Concrete. *Proposed Specification for Structural Steel Beams with Web Openings*. ASCE Journal of the Structural Division 118:No.ST12:3315-3324.
- Darwin, D., 1990. *Steel and composite beams with web openings*. Steel Design Guide Series 2, American Institute of Steel Construction, Chicago.
- Donahey & Rex C., 1987. *Deflections of Composite Beams with Web Openings*. Building Structures, Proceedings, ASCE Structures Congress, D. R. Sherman, ed., Orlando, Florida, August 1987: 404-17.
- Donahey, Rex C., & Darwin, David, 1986. *Performance and Design of Composite Beams with Web Openings*. Structural Engineering and Engineering Materials SM Report No. 18, University of Kansas Center for Research, Lawrence, Kansas.
- Dougherty & Brian K., 1980. *Elastic Deformation of Beams with Web Openings*. ASCE Journal of the Structural Division 106:No.ST1: 301-312.
- McCormick & M. M., 1972. *Open Web Beams-Behavior, Analysis and Design*. BHP Melbourne Laboratories Report 17/18, Melbourne, Australia, Feb.
- Ribeiro, J. C. L., Veríssimo, G. S., Paes, J. L. R. & Fakury, R. H., 2013. *Um modelo semiempírico para determinação da flecha em vigas de aço com aberturas na alma*. In CILAMCE 2013, Pirenópolis, GO, Brasil.
- Simulia, Dassault Systèmes Corp., 2012. *ABAQUS Documentation v 6.12*. Providence, RI, USA.
- Veríssimo, G. S., 1996. *Análise e comportamento de vigas de aço e vigas mistas com aberturas na alma*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, UFMG, Belo Horizonte.
- Veríssimo, G. S. & Ribeiro, J. C. L., 2012. *Flechas em vigas com aberturas na alma*. Relatório Técnico, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.